L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/lenseignementmat19inte

E

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT

PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES

CHRONIQUE SCIENTIFIQUE — MÉLANGES — BIBLIOGRAPHIE

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRIGÉE PAR

C.-A. LAISANT
Docteur ès sciences.
ancien Examinateur d'admission à l'Ecole polytechnique de Paris.

H. FEHR
Docteur ès sciences
Professeur à l'Université de Genève.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. BUHL
Docteur ès sciences
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Organe officiel de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

TOME DIX-NEUVIÈME

1917

298943
12. 4. 34

PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR

GENÈVE
GEORG & Cie, ÉDITEURS

1917

GA
11
E65
c.19-20

IMPRIMERIE ALBERT KUNDIG

GENÈVE (SUISSE)

HENRI POINCARÉ

Œuvres publiées par M. G. Darboux

Tome second [1]

par

A. Buhl (Toulouse).

L'Enseignement mathématique se fait un devoir de signaler cette publication impatiemment attendue et qui, commençant par le Tome second, nous livre l'œuvre magistrale de la jeunesse de Poincaré, celle qui a trait aux fonctions fuchsiennes.

Je me fais un plaisir d'écrire ici, non un article bibliographique, car toute publicité de caractère bibliographique serait ridiculement superflue, mais une sorte d'avertissement que je dédie à des camarades, à des élèves même, qui m'ont souvent demandé « s'ils pourraient lire Poincaré ». Personnellement, je fus parfois fort embarrassé à cause de la dispersion des Mémoires. De plus, les études faites jadis, à la Sorbonne, ne nous donnaient pas assez l'impression de pouvoir approcher les travaux du Maître.

Nous entendions parler de choses admirables et nous aurions voulu les admirer alors que nous possédions à peine le programme de la Licence. L'enfance a toutes les audaces ! D'autres maîtres également vénérés, MM. Gaston Darboux, Paul Appell, Emile Picard, semblaient plus près de nous, alors que Poincaré s'en éloignait encore en ne professant guère, à l'époque dont je parle, que dans la chaire de mécanique

---

[1] Un magnifique volume in-4° de LXXVII-628 pages, 19 figures et un portrait. Paris, Gauthier-Villars, 1916. Prix : 35 fr.

céleste. Je n'ai point dédaigné cette dernière science mais, en général, elle avait peu d'adeptes. Quelques-uns de ceux qui entendirent les grands cours de M. Picard, sur les fonctions abéliennes, fuchsiennes, hyperabéliennes, hyperfuchsiennes, furent peut-être trop rapidement dispersés par les nécessités de la vie et quand, profitant de quelque halte salutaire, ils voulaient regarder encore les sommets de la science, ils constataient avec chagrin que leur isolement ne leur en laissait plus les moyens matériels ; ils manquaient de l'appui d'un livre, d'un texte imprimé trouvable et maniable partout.

Ceux-là rendront grâce à M. Darboux, ainsi qu'à ses collaborateurs, M. N.-E. Nörlund, M. E. Lebon, pour la publication de ces *Œuvres* où tant de merveilles vont être habilement réunies. J'imagine aussi que bien des jeunes géomètres à l'esprit créateur verront maintenant une vaste mine, d'exploitation commode, là où des gisements d'une égale richesse totale, avaient cependant le grave défaut d'être séparés et de ne pouvoir être véritablement réunis que par qui avait déjà quelque connaissance de leur structure.

Cet ensemble de travaux sur les fonctions automorphes renferme, à coup sûr, des passages de difficultés très inégales. Tout le monde ne poussera pas la lecture au même degré d'avancement, mais je n'hésite pas à affirmer que tout esprit mathématique de puissance moyenne peut saisir les premières lignes du chef-d'œuvre et voir l'art simple et fécond qui engendre tous les détails, cet esprit ne poursuivrait-il point ceux-ci en toute leur complexité.

* * *

Avant de passer à des descriptions mathématiques, il serait injuste de ne point mentionner un *Eloge historique d'Henri Poincaré* qui s'ajoute, comme un nouveau joyau, aux *Eloges académiques et Discours* de M. G. Darboux. Cet Éloge historique, lu en Séance publique annuelle du 15 décembre 1913, et déjà imprimé dans les publications de l'Institut, constitue une magnifique préface au volume d'aujourd'hui. Les articles

suscités par la mort de Poincaré ont été fort nombreux; plusieurs sont dus à ses confrères de l'Académie des Sciences.

Celui de M. Darboux a, au plus haut degré, le charme de l'intimité; il nous laisse pénétrer dans la vie enfantine de qui devait devenir un prodigieux géomètre; il abonde en anecdotes délicates et imprévues. Il nous montre non seulement le savant, mais l'enfant au foyer paternel, l'homme au foyer familial, puis le citoyen et enfin le grand patriote qui, dans les heures tragiques que nous vivons, élève toujours, malgré la tombe, l'éclatant flambeau de la Science française.

* * *

Je ne conseille point l'abord des fonctions fuchsiennes à qui ne connaîtrait point les fondements de la théorie des fonctions elliptiques. Au point de vue logique ce n'est cependant pas essentiel; les secondes fonctions sont des cas particuliers des premières et l'étude d'un cas général peut permettre de descendre ensuite au cas particulier. Mais, à ce compte-là, on pourrait ignorer aussi la trigonométrie élémentaire dont toutes les formules sont des dégénérescences de formules elliptiques. Le défi ainsi porté au sens commun serait peut-être trop violent. D'ailleurs, Henri Poincaré, lui-même, nous a rappelé qu'en matière d'acquisition de connaissances nouvelles, il nous fallait généralement repasser par où ont passé nos pères « rapidement, mais sans brûler d'étapes » (*Science et Méthode*, p. 135).

Mais il faut reconnaître que l'ensemble des traités relatifs aux fonctions elliptiques — pour ne parler que des traités — forme un monument où le fil d'Ariane risque souvent d'échapper des mains du néophyte. Je prends sur moi de n'en indiquer qu'un, celui de P. Appell et E. Lacour (Gauthier-Villars, 1897) qui me semble merveilleusement adapté au but. En étudiant une vingtaine de pages de cet Ouvrage, en trois ou quatre endroits différents, on sera suffisamment armé pour aborder la lecture du Tome II des Œuvres de Poincaré.

La première chose à faire est de se familiariser avec la double périodicité traduite par l'existence du champ complexe divisé en parallélogrammes. C'est immédiat.

On observera ensuite que les fonctions doublement périodiques ne naissent pas dans ce champ de manière absolument directe. La plus simple de toutes, la fonction $\wp u$ de Weierstrass, est la dérivée du quotient de $\sigma' u$ par σu. La fonction σu elle-même n'est pas doublement périodique : quand on ajoute des périodes à son argument u, elle se reproduit *multipliée par un facteur exponentiel.*

Voyons maintenant les constructions de Jacobi (Appell et Lacour, chap. IV). Elles aussi reposent essentiellement sur la construction préliminaire de fonctions Θ et H remarquables surtout par de beaux et faciles développements en séries ; mais ce ne sont que certains quotients, formés avec ces fonctions, qui donnent sn, cn, dn, fonctions jouissant alors d'une double périodicité proprement dite.

Venons à l'œuvre de Poincaré.

Une œuvre géniale n'est pas quelque nouvel enchevêtrement, tellement complexe que personne, jusque-là, n'avait pu réussir à bâtir quelque chose d'aussi compliqué.

C'est, au contraire, la claire perception d'une harmonie très simple que les yeux grossiers des contemporains ne voient point ; c'est l'esquisse rapide de l'artiste, imprévue mais cependant lumineuse et frappante dès qu'elle existe. Ceci est vrai dans tous les domaines de la pensée et plus particulièrement encore dans le domaine mathématique.

Combien simple est l'égalité (où l'on peut toujours avoir $ad - bc = 1$)

$$z' = \frac{az + b}{cz + d}. \tag{1}$$

Cependant l'esprit reste confondu quand on songe à l'inépuisable champ de merveilles qu'elle engendre. Elle transforme la variable complexe z en z' et z', à son tour, peut donner une transformée

$$z'' = \frac{a'z' + b'}{c'z' + d'} = \frac{(aa' + cb')z + ba' + db'}{(ac' + cd')z + bc' + dd'} \tag{2}$$

qui ne diffère de z' que par un changement de coefficients. L'ensemble des transformations (1), à coefficients divers, forme un *groupe*. Mais que de variété dans celui-ci.

Ainsi, considérons toutes les rotations qui permettent de faire coïncider un polyèdre régulier avec lui-même, par de simples échanges de sommets. Une projection stéréographique de ces sommets fera correspondre aux rotations sphériques des transformations planes du type (1). Il y a déjà là quelque chose d'énorme ; dans les groupes *linéaires* du type (1) nous venons d'apercevoir les *groupes polyédriques*. A ceux-ci correspondent des formes algébriques invariantes par les transformations des dits groupes ; ce sont les *fonctions polyédriques* qu'il faut sans doute mentionner d'abord au point de vue logique. Elles ont été considérées avant Poincaré et jouent notamment un rôle considérable dans les travaux de Klein. C'est, si l'on veut, une généralisation dans l'espace, de la théorie des polygones réguliers et de l'équation binôme. Je dirais même que de tels points relèvent plutôt de l'algèbre que de l'analyse infinitésimale, en me hâtant toutefois d'ajouter que je ne crois point aux cloisons étanches, justement dans un domaine où l'arithmétique, l'algèbre et l'analyse ont des rencontres admirables.

Un autre groupe formé de substitutions (1) est le groupe *modulaire ;* il correspond au cas où a, b, c, d sont entiers. Les fonctions invariantes par ce groupe sont dites *fonctions modulaires*, car elles naissent de la relation qui existe entre le rapport des périodes d'une fonction elliptique et son *module*, constante arbitraire figurant naturellement dans la fonction, de même que l'excentricité de l'ellipse figure naturellement dans l'arc, de même qu'un angle d'écart initial est élément arbitraire dans un mouvement pendulaire.

Sans autre préparation que celle indiquée, on pourra facilement lire, à ce sujet, le chapitre XIII du *Traité* de MM. Appell et Lacour.

Il y a déjà, en ceci, quelque chose d'extrêmement frappant. On veut construire des fonctions doublement périodiques ; dès qu'on y a réussi, elles en livrent d'autres qui manifestent des propriétés particulières mais indéniables *d'automor-*

phisme, c'est-à-dire des propriétés d'invariance quant aux transformations d'un certain groupe linéaire formé de substitutions du type (1).

Henri Poincaré s'est peu servi de ces préliminaires. Il laisse les groupes et les fonctions polyédriques se développer en Allemagne et il ne jette guère que des coups d'œil rétrospectifs sur les fonctions modulaires. Notons cependant que la réalité des coefficients du groupe modulaire entraîne qu'à un z réel correspond un z' réel. En d'autres termes, l'axe réel est invariant par toutes les transformations du groupe. Les groupes *fuchsiens* ont, en général, un cercle, *dit cercle fondamental*, pour ligne invariante analogue.

C'est ici qu'il convient de quitter les études préliminaires, plus ou moins d'accord avec ce que je viens d'indiquer, pour étudier directement le texte du Maître disparu. Dans le Tome II qui vient d'être publié, je n'hésite pas à distinguer, comme absolument fondamentaux, les deux Mémoires intitulés: *Théorie des groupes fuchsiens* (pp. 108-168) et *Sur les fonctions fuchsiennes* (pp. 169-257). Avant la page 108 du Volume, on trouve dix-huit Notes ou petits Mémoires en lesquels Poincaré fait des esquisses sommaires des résultats obtenus mais en ne démontrant que peu de choses. Je crois qu'il vaut mieux lire d'abord les Mémoires développés ; on reviendra ensuite sur les dix-huit Notes en question, qui pourront alors aider à fixer dans l'esprit les points les plus saillants des théories complètes.

Dans la *Théorie des groupes fuchsiens*, nous voyons d'abord que ces groupes sont formés de substitutions du type (1), les coefficients a, b, c, d étant réels (mais non entiers, car alors le groupe fuchsien dégénérerait en groupe modulaire). Le cercle fondamental, dans ces conditions est encore l'axe réel, mais on peut montrer tout de suite que ce peut être un cercle quelconque, ce qui est établi dans un paragraphe spécial terminant le travail (p. 164).

Soit la substitution à coefficients réels

$$\left(z, \frac{az+b}{cz+d}\right). \tag{3}$$

Faisons-lui correspondre la substitution

$$\left(\frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta},\quad \frac{a\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+b}{c\dfrac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta}+d}\right) \tag{4}$$

où α, β, γ, δ sont des constantes complexes *fixes*. Si a, b, c, d varient, avec la seule condition $ad - bc = 1$, il est clair que les substitutions (4) forment un groupe. Pour (3) la ligne invariante est l'axe réel, dont l'équation est

$$\text{partie imaginaire de } z = 0 .$$

Pour (4) la ligne invariante est, de même, le *cercle*

$$\text{partie imaginaire de } \frac{\alpha z+\beta}{\gamma z+\delta} = 0 .$$

C'est, comme je l'ai déjà dit, le *cercle fondamental.*

Evidemment, le raisonnement ne serait pas valable si a, b, c, d devenaient imaginaires aussi ; ce serait le cas des groupes *kleinéens*, qui n'ont point de cercle invariant.

Revenons aux substitutions réelles. Henri Poincaré dit qu'elles transforment une figure quelconque du champ complexe en une figure *congruente* (p. 112). Ces figures congruentes sont analogues aux figures égales de la géométrie élémentaire, où elles sont déduites les unes des autres par des *déplacements* qui, eux aussi, forment un groupe. La géométrie des figures congruentes est analogue à celle de Lobatschewsky, à celle d'Euclide sans le fameux postulat. C'est le cas de reparler de ces êtres non-euclidiens que Poincaré ne dessina que plus tard, qui vivraient dans un monde où les déplacements seraient des substitutions linéaires plus générales ; leur géométrie serait non-euclidienne, leur trigonométrie pourrait faire usage des fonctions fuchsiennes, ce qui n'est peut-être pas très aisé à se représenter au point de vue des calculs pratiques, mais, ayant évolué dans un univers plus complexe, ils pourraient, par adaptation, être plus intelligents que nous. Depuis la mort de Poincaré, ces êtres s'endorment. Je demande qu'on les fasse revivre,

qu'on les réveille ! Sont-ils si fictifs ? Ils le sont à coup sûr beaucoup moins que les pygmées, les géants, les Lilliputiens des voyages de Gulliver, toutes fictions qu'il serait grand dommage de rayer de la littérature.

Dans les êtres fictifs de Poincaré, je vois une des plus belles conquêtes de l'esprit. L'humanité ne peut se passer de mythes et certains ont dit que la science balayait impitoyablement ceux-ci. Quelle erreur ! Elle en crée de bien plus beaux que ceux d'une imagination arbitraire !

Revenons à la forme mathématique des congruences entre figures. L'idée du déplacement sans déformation nous paraît, bien à tort, présenter des privilèges spéciaux quant à la conservation des longueurs et des aires. Pour les substitutions du type (2), l'intégrale

$$\int \frac{\text{mod } dz}{y},$$

étendue à un arc de courbe, reste invariante quand cet arc est transformé en un arc congruent. Il en est de même pour l'intégrale double

$$\int\int \frac{dx\,dy}{y^2}$$

étendue à une aire et à l'aire congruente. En quoi ces intégrales sont-elles *logiquement* différentes de celles qui ne contiennent point les dénominateurs y et y^2 et que nous appelons *longueur* et *aire* ?

Les groupes fuchsiens sont *discontinus*. Ils possèdent une *région fondamentale* R_0 limitée par des arcs de cercle qui, prolongés quand il y a lieu, sont normaux au cercle fondamental. Les transformations du groupe changent R_0 en des régions congruentes et l'ensemble de ces régions forme un domaine que l'on étend de proche en proche de même que, dans la théorie des fonctions elliptiques, on passe d'un parallélogramme des périodes à des parallélogrammes voisins aussi nombreux qu'il est nécessaire ; l'un de ces parallélogrammes est une région fondamentale R_0. Dans les deux cas, un point de R_0 ne reste jamais dans R_0 par une substitu-

tion du groupe ; c'est en ceci que consiste la discontinuité. Dans les deux cas également, il y a une infinité de régions congruentes à R_0, ce qui revient à dire qu'il y a une infinité de substitutions dans le groupe. Henri Poincaré nous rappelle ici (p. 117) qu'il y a cependant des transformations du type (1) qui ne comprennent qu'un nombre fini de substitutions, allusion manifeste aux groupes polyédriques.

Mais, comme je l'ai dit, c'est là un intermédiaire sur lequel il ne s'appuiera pas. Quant à examiner comment la région R_0 doit être choisie, c'est une chose que je ne pourrais indiquer qu'en recopiant la plus grande partie du texte du Maître. Il y a là une étude d'attention absolument inévitable et que l'avenir ne simplifiera peut-être pas beaucoup car, si elle n'est pas difficile, elle est, du moins, assez étendue à cause des nombreux cas particuliers qu'elle comprend. La R_0 d'un groupe fuchsien est un être essentiellement plus subtil que le parallélogramme des fonctions doublement périodiques. C'est le dressoir d'orfèvrerie, aux sculptures fines et délicates, à côté de la rustique table carrée.

Voici cependant une propriété merveilleuse de cette R_0, propriété facile à décrire.

On sait qu'une fonction algébrique quelconque est uniforme sur une surface (dite *surface de Riemann*) formée de plans superposés et de lignes de passage permettant de passer d'un feuillet à un autre. Une telle surface présente une *connexion* spéciale ; elle est comparable à un tore, à une sphère transpercée de part en part par des puits, toutes surfaces qui ne se morcellent pas forcément quand on y fait, avec des ciseaux, une coupure qui est cependant une courbe fermée. Ainsi on ne morcelle pas un tore en le coupant le long d'un seul méridien. Le *genre* d'une surface de Riemann est un nombre qui caractérise la surface au point de vue du nombre des coupures nécessaires pour la rendre simplement connexe, c'est-à-dire morcelable par toute nouvelle coupure.

Or il se trouve que la R_0 d'un groupe fuchsien est limitée par des côtés se correspondant deux à deux et qu'on peut rouler, déformer cette région jusqu'à souder les côtés correspondants et obtenir ainsi une surface identique à une

surface de Riemann. D'où la notion de *genre* pour un groupe fuchsien. Rien que cette notion suffit à montrer quelles différences profondes peuvent exister entre ces groupes et, dans ce premier grand Mémoire, Henri Poincaré ne cherche guère à montrer autre chose, mais il y a là le germe de l'idée de l'uniformisation des fonctions algébriques quelconques au moyen des fonctions invariantes par le groupe fuchsien, ce dernier, avec sa R_0, jouant un rôle qui correspond complètement au rôle primitivement joué par la surface riemannienne.

J'ai hâte de parler du Mémoire suivant, mais il me semble toujours qu'on ne saurait trop s'arrêter sur la *Théorie des groupes fuchsiens ;* elle est le terrain fondamental qu'il faut analyser scrupuleusement avant d'en vouloir tirer une moisson ; qui le connaîtra bien moissonnera aisément.

La première révélation du Mémoire *Sur les fonctions fuchsiennes* est l'extrême facilité avec laquelle ces fonctions se construisent au point de vue formel.

Soit H une fonction rationnelle et considérons la série

$$\Theta(z) = \sum (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} \, \mathrm{H}\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

où, à toutes les valeurs de l'indice i, correspondent toutes les substitutions d'un groupe fuchsien.

Remplaçons, dans cette égalité, z par

$$z_j = \frac{\alpha_j z + \beta_j}{\gamma_j z + \delta_j}.$$

Alors $\Theta(z_j)$ se compose d'abord du facteur $(\gamma_j z + \delta_j)^{2m}$ que l'on peut écrire en avant du sigma puisqu'il ne dépend pas de i. Quant aux facteurs qui restent sous le sigma, on voit sans peine, par le calcul immédiat qui donne (2) en partant de deux substitutions (1), qu'ils sont les mêmes que ceux qui figurent dans $\Theta(z)$; ils ont simplement changé de place. Donc

$$\Theta(z_j) = (\gamma_j z + \delta_j)^{2m} \, \Theta(z) \, .$$

Soit Θ_1 une autre fonction formée comme Θ, c'est-à-dire telle que

$$\Theta_1(z_j) = (\gamma_j z + \delta_j)^{2m}\,\Theta_1(z) .$$

Si nous divisons nos deux dernières égalités membre à membre, nous aurons une fonction $F(z)$ telle que

$$F(z_j) = F(z) .$$

C'est la fonction *fuchsienne*. Elle est le quotient de fonctions Θ dites *thêtafuchsiennes*, de même que les fonctions elliptiques de Jacobi sont des quotients de fonction Θ à multiplicateurs destinés aussi à disparaître par division.

Il est extraordinaire, je dirais presque incompréhensible, que des légendes redoutables se soient créées autour de choses aussi simples. Des gens à érudition mathématique notable, des agrégés par exemple, m'ont parlé des fonctions fuchsiennes en termes véritablement superstitieux : « Nous avons essayé, mais nous n'y pouvons rien comprendre ! » Ce serait un problème psychologique intéressant que de chercher à déterminer la cause de telles opinions. Je le laisse de côté. Je puis pronostiquer maintenant que, si les sujets que je viens d'indiquer sont bien compris, tout le reste du Volume pourra être travaillé. Par « bien compris » j'entends surtout la compréhension *formelle* des choses. Je ne vois aucun inconvénient à ce que, dans une première lecture, on laisse de côté des démonstrations telles que celle concernant la convergence des séries thêtafuchsiennes.

Je vais, quant à la suite, être bref. Feuilletant rapidement ces admirables pages, j'indiquerai simplement, d'une touche ultra-légère, les merveilles qu'on y rencontre.

Les fonctions thêtafuchsiennes ont des zéros et des infinis qui s'étudient élégamment par l'application des théorèmes généraux de Cauchy. Le plus grand intérêt est du côté de leurs points singuliers essentiels qui se rangent sur le cercle fondamental. Tantôt on peut passer entre eux pour prolonger analytiquement la fonction, tantôt ils se pressent sur ce cercle jusqu'à en faire une ligne singulière infranchissable par les procédés tayloriens. Des travaux ultérieurs ont montré que,

pour les fonctions analytiques les plus générales, de tels cas étaient plutôt normaux que singuliers ; les fonctions thêta-fuchsiennes les ont éclairés d'une vive lumière.

Toutes les fonctions fuchsiennes de même groupe sont fonctions rationnelles de deux d'entre elles, x et y.

Soient v_1 et v_2 des fonctions de x, telles que

$$\frac{v_2}{v_1} = z \ , \qquad v_1 \frac{dv_2}{dx} - v_2 \frac{dv_1}{dx} = v_1^2 \frac{dz}{dx} = 1 \ .$$

Alors

$$\frac{1}{v_1} \frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{1}{v_2} \frac{d^2 v_2}{dx^2} = \varphi(x, y) \ ,$$

car on voit facilement que les deux premiers membres de cette double égalité jouissent de l'automorphisme fuchsien. *Ainsi*

$$v_1 = \sqrt{\frac{dx}{dz}} \qquad \text{et} \qquad v_2 = z\sqrt{\frac{dx}{dz}}$$

sont les deux intégrales de l'équation

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = v\varphi(x, y)$$

où φ est fonction rationnelle du point analytique (x, y).

C'est là une conséquence capitale, claire, lumineuse du premier théorème souligné.

La classification des fonctions fuchsiennes repose surtout sur celle des groupes fuchsiens correspondants. C'est une des raisons pour lesquelles, plus haut, je préconisais surtout l'étude des groupes. Les rapports avec la théorie des équations différentielles linéaires, à coefficients algébriques, percent avec les premières constructions fonctionnelles ; nous allons y revenir avec les écrits plus particulièrement consacrés à ces équations.

Dans l'intervalle mentionnons le Mémoire *Sur les groupes kleinéens* (pp. 258-299).

D'un mot j'ai déjà situé ces groupes par rapport aux groupes fuchsiens ; il faut cependant ajouter que de notables différences de méthodes apparaissent ici. Les transformations qui transportent sur la sphère les réseaux polygonaux

plans entraînent des considérations spatiales ; des sphères divisent l'espace en le rapportant tout entier à une certaine région fondamentale. Ces résultats furent d'ailleurs confirmés par des méthodes différentes dues à M. E. Picard.

Arrivons au travail *Sur les groupes des équations linéaires* (pp. 300-401). Il a d'abord une importance historique, car il s'appuie surtout sur les recherches de Fuchs ; c'est vraisemblablement en ce domaine que se dessinèrent les premiers résultats de Poincaré, d'où l'idée de qualifier de *fuchsiennes* les nouvelles transcendantes y découvertes. Klein ne sembla pas le comprendre tout d'abord. A la suite d'un court Mémoire *Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires*, publié aux *Mathematische Annalen* et qu'on trouvera dans le présent Volume (pp. 92-105), le géomètre allemand félicite Poincaré mais critique ses dénominations. Henri Poincaré répond doucement mais fermement que ces dénominations n'ont pas été choisies au hasard ; c'est bien à Fuchs qu'il entend rattacher le point de départ de ses recherches.

Fuchs, en effet, ouvrit un nouveau et vaste champ de recherches en appliquant les méthodes de Cauchy à l'étude des intégrales des équations linéaires. Des intégrales distinctes

$$y_1, y_2, \ldots, y_p \tag{5}$$

ne peuvent se muer en d'autres et devenir ainsi plus nombreuses quand la variable tourne autour de points singuliers. Toute intégrale d'apparence nouvelle n'est qu'une fonction linéaire des p précédentes. A toutes les singularités possibles correspond un ensemble de substitutions linéaires formant un groupe et, quelles que soient les substitutions constructrices, certaines fonctions de leurs coefficients sont toujours les mêmes : ces fonctions sont des *invariants*.

Je me borne à dire que le mode de correspondance entre ces invariants et les coefficients de l'équation est précisément exprimable par les fonctions fuchsiennes. En particulier, des intégrales qui se reproduisent multipliées par $(x-a)^\lambda$, quand x tourne autour de a, et qui, à ce titre, sont indéniablement

multiformes, donnent des quotients où le facteur singulier disparaît, tout comme disparaissait, lors de la formation des fonctions fuchsiennes, le facteur des fonctions thètafuchsiennes. On voit qu'il y a une certaine méthode de quotients qui joue, en Analyse, un rôle primordial, même dans des questions d'origines fort diverses.

La conclusion essentielle est que les intégrales (5) peuvent être des fonctions uniformes d'un z qui est le rapport des intégrales d'une équation du second ordre à coefficients rationnels en x et y (si x et y sont liés algébriquement). Alors x est une fonction fuchsienne (ou kleinéenne) en z. Quant aux p expressions (5) des v à l'aide de z ce sont les fonctions *zétafuchsiennes* pour lesquelles un Mémoire spécial (pp. 402-462) termine la série des précédents. Je ne ferai guère que le mentionner. Comme je le montrais quelques lignes plus haut, on arrive aisément à comprendre que l'équation $v'' = v\,\varphi(x, y)$ soit intégrée par les fonctions fuchsiennes. Mais n'y a-t-il pas un abîme pour passer de là à l'équation linéaire d'ordre quelconque ? Non. C'est un peu — que l'on me passe ici beaucoup d'imagination simplificative — comme si l'on constatait d'abord que l'équation linéaire, du second ordre, *à coefficients constants*, s'intègre par les transcendantes élémentaires ; on n'aurait aucune peine à se convaincre, ensuite, que ce résultat est valable pour l'équation d'ordre quelconque. Eh bien, les fonctions fuchsiennes jouent précisément, par rapport aux équations linéaires quelconques, à coefficients algébriques, le rôle des fonctions élémentaires qui suffisent à l'intégration dans le cas des coefficients constants.

Je viens de parler, en somme, des cinq grands Mémoires relatifs aux groupes fuchsiens, aux fonctions fuchsiennes, aux groupes kleinéens, aux groupes des équations linéaires, aux fonctions zétafuchsiennes, Mémoires publiés de manière continue, dans les *Acta mathematica* et qui suffiraient à eux seuls à l'immortelle renommée de leur auteur.

Les fonctions fuchsiennes et l'Arithmétique (pp. 463-511) n'ont pas un rapport absolument direct avec ce qui précède. Je disais incidemment, en une page précédente, que des

êtres non-euclidiens pourraient se servir des fonctions fuchsiennes, comme nous nous servons des fonctions trigonométriques, mais qu'on a peine cependant à imaginer ce que seraient leurs calculs pratiques. Les difficultés que je me représente sont surtout situées dans le domaine de l'arithmétique. Ces fameux êtres non-euclidiens seraient sans doute bien embarrassés s'ils n'avaient que celle que nous connaissons, mais nul doute qu'ils n'en aient une autre, aux moyens beaucoup plus puissants et dont les progrès auraient marché de pair avec ceux de leur analyse.

Les fonctions fuchsiennes et l'équation $\Delta u = e^u$ (pp. 512-591) forment un exposé où à coup sûr, il faut reconnaître quelque complication. Si des transcendantes, de nature fuchsienne, permettent d'intégrer cette équation, elle peut aussi l'être autrement, notamment par des méthodes d'approximation étudiées par M. E. Picard. On conçoit la possibilité d'éclairer les deux choses l'une par l'autre.

Fonctions modulaires et fonctions fuchsiennes (pp. 592-618) terminent le Volume. Henri Poincaré écrivit ces lignes au seuil de la mort. Il envoya le manuscrit aux *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, le 7 juillet 1912, veille du jour où il entra à la clinique où il devait succomber. Et, chose bien singulière, il effectua un rapprochement qui, dans les grands travaux de sa jeunesse, ne semble l'avoir tenté que médiocrement. Se pénétrer des fonctions modulaires pour passer ensuite au cas plus général des fonctions fuchsiennes, ce n'est pas une mauvaise idée, à condition de ne pas se laisser absorber trop longtemps par les premières. Mais vraiment Henri Poincaré dédaigna cet échelon sur lequel, à la fin, il paraît cependant vouloir descendre. Au dessous, il n'y avait plus que la nuit du tombeau mais, au dessus, quelle éblouissante auréole de gloire !

Note. — Cet article a été écrit avant la mort de M. Darboux survenue le 23 février. La malheureuse nouvelle n'y devait rien changer. Disons seulement, avec tant d'autres voix, l'affliction de la Science française ainsi frappée de coups répétés en la personne de ses plus illustres représentants. A. B.

DEUX CONFÉRENCES SUR LA NOMOGRAPHIE

données les 28 et 29 juillet 1914 à l'Université d'Edimbourg[1]

PAR

Maurice d'Ocagne, Prof. à l'Ecole Polytechnique de Paris.

II. — APPLICATION DES NOMOGRAMMES A ALIGNEMENT AUX DIFFÉRENTS CAS DE RÉSOLUTION DES TRIANGLES SPHÉRIQUES

Préliminaires.

1. — Si l'on désigne, dans un triangle sphérique, les côtés par a, b, c et les angles opposés par A, B, C, ces six éléments étant exprimés en fractions (degrés ou grades) de la circonférence, les problèmes concernant la résolution des triangles sphériques, tels qu'ils se présentent en astronomie, géodésie et navigation, sont tous renfermés dans l'énoncé général que voici :

Etant donnés trois des six éléments a, b, c, A, B, C, *trouver* l'un *des autres.*

Il convient de noter que, contrairement à ce qui se rencontre dans les traités classiques, cet énoncé propose la recherche d'*un seul* des éléments inconnus, et non des trois.

Cette distinction est essentielle au point de vue de la solution par les méthodes nomographiques. Ainsi qu'on le verra par la suite, le premier énoncé exige pour sa solution trois nomogrammes distincts, tandis que, pour le second, un seul suffit.

---

[1] Au cours du *Colloquium* tenu à l'occasion du tricentenaire de l'invention des logarithmes. Pour la *première partie, voir l'Enseig. mathém.* du 15 nov. 1916.

2. — S'il ne s'agit d'obtenir qu'un seul des trois éléments inconnus, comme cela a lieu dans les importantes applications à l'astronomie, il y a lieu de considérer la disposition du système de quatre éléments, constitué par les trois éléments donnés et celui qui est inconnu.

Cette disposition peut être l'une des trois suivantes :

1° Deux couples d'éléments contigus séparés l'un de l'autre par deux éléments non intervenants, tels que A, b et B, a. Une semblable disposition sera désignée par le symbole (2, 2).

2° Trois éléments contigus et le quatrième isolé de ce groupe, par conséquent opposé à celui des éléments qui se trouve au milieu du groupe, par exemple b, A, c et a. Une telle disposition sera désignée par le symbole (3, 1).

3° Quatre éléments contigus comme C, a, B, c. Une telle disposition sera désignée par le symbole (4).

A ces trois dispositions correspondent respectivement les formules

$$\sin A \sin b = \sin a \sin B \ , \qquad (1)$$

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \ , \qquad (2)$$

$$\cos a \cos B = \sin a \operatorname{cotg} c - \sin B \operatorname{cotg} C \ , \qquad (3)$$

dans chacune desquelles l'un quelconque des quatre éléments peut être pris comme inconnue. Dans le cas (3,1), si l'élément isolé est un angle au lieu d'un côté, comme cela a lieu pour la formule (2), il est nécessaire d'appliquer la formule au triangle supplémentaire en remplaçant a, b, c, A par par $\pi - A$, $\pi - B$, $\pi - C$, $\pi - a$.

Il est aisé de voir que, si l'on se donne trois quelconques des six éléments d'un triangle, on peut toujours leur associer l'un des trois autres, de façon à obtenir une disposition (3, 1). Une fois ce premier élément déterminé par l'application de la formule (2), on peut encore constituer une disposition (3, 1) pour chacun des deux éléments restants en l'associant convenablement à trois autres pris parmi les quatre déjà connus. Il en résulte qu'*au moyen de la seule formule* (2) *on peut obtenir la résolution* COMPLÈTE *du triangle.*

Mais il est avantageux, dans certaines applications de l'astronomie, de déterminer *directement un seul* des trois

éléments inconnus, sans avoir à passer par l'intermédiaire d'un des autres, et cela nécessite l'application de la formule particulière qui correspond à la disposition des éléments auxquels on a affaire. Donc, pour la résolution nomographique directe, dans tous les cas possibles, trois nomogrammes sont nécessaires, correspondant aux trois formules fondamentales ci-dessus données.

3. — Avant de passer à la construction de ces trois nomogrammes, il convient de faire une remarque spéciale relative aux formules applicables au triangle rectangle. Supposons que deux des éléments (autres que l'angle droit) d'un tel triangle soient donnés. Pour en déduire un troisième, nous n'avons qu'à considérer la disposition formée par ces trois éléments et l'angle droit et à appliquer la formule appropriée.

Par exemple, si nous voulons connaître la relation entre l'hypoténuse a, l'un des côtés b et l'angle compris C, nous reconnaissons que la disposition formée par ces trois éléments et l'angle droit A est de celles désignées par (4). Une permutation circulaire de (3) donne

$$\cos b \cos C = \sin b \operatorname{cotg} a - \sin C \operatorname{cotg} A ,$$

qui, lorsqu'on tient compte de $A = \frac{\pi}{2}$, devient

$$\cos b \cos C = \sin b \operatorname{cotg} a ,$$

ou

$$\operatorname{tg} b = \operatorname{tg} a \cos C ,$$

formule classique, et de même pour les autres cas.

Il est ainsi démontré que les trois nomogrammes appropriés aux formules (1), (2), (3) fournissent la solution complète de tous les problèmes en question. Il est vrai que d'autres formules, telles que les analogies de Neper, sont employées pour les calculs ordinaires. Cela a pour but de permettre de recourir au calcul logarithmique ; mais une telle considération n'intervient pas lorsque l'on fait usage des méthodes nomographiques.

Nomogramme de la formule (1).

4. — Pour obtenir un nomogramme de la formule (1) il suffit de l'écrire sous la forme

$$\frac{\sin a}{\sin b} = \frac{\sin A}{\sin B}, \qquad (1)$$

La construction est alors immédiatement évidente par la géométrie la plus élémentaire.

Si, sur deux droites parallèles, on porte les segments A_0A et A_0a proportionnels à sin A et sin a, B_0B et B_0b propor-

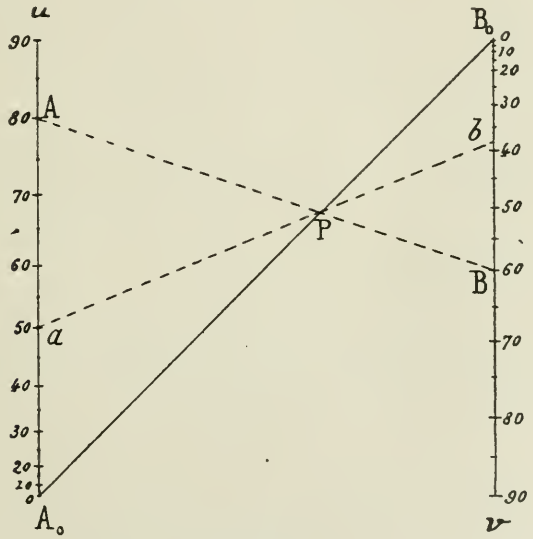


Fig. 13.

tionnels à sin B et sin b respectivement, l'équation précédente exprime que les droites AB et ab coupent la droite A_0B_0 au même point P (fig. 13)[1].

Cela suggère l'idée de construire deux échelles de sinus

[1] Cette figure et les suivantes sont faites à une trop petite échelle pour pouvoir se prêter à un usage courant et ne doivent être regardées que comme servant à illustrer les explications données dans le texte.

identiques, sur deux axes parallèles, avec les zéros en A_0 et B_0 et des graduations de sens contraires en vue de faire en sorte que ce point P tombe entre A_0 et B_0. *Les deux droites* AB *et* ab *coupent alors* A_0B_0 *en un même point* P.

Supposons, par exemple, que A, B, *a* soient donnés et *b* à trouver. L'opération est la suivante : *Les points dont les cotes sont* A *et* B *sur les deux échelles sont joints par une droite qui coupe* A_0B_0 *en un point* P; *la droite joignant ce point* P *au point coté* a *sur la première échelle coupe la seconde en un point dont la cote est* b.

Nous avons eu recours à la géométrie élémentaire pour exposer le principe de ce nomogramme parce que c'est la méthode la plus naturelle ; mais il est clair que, si on le veut, on peut établir ce principe suivant la théorie générale ; il suffit de procéder comme suit :

Appelant *t* la commune valeur des deux rapports ci-dessus, on a

$$\sin a = t \sin b \ ,$$

et, si l'on pose [1]

$$\sin a = u \ , \qquad \sin b = -v \ ,$$

il vient pour l'équation du point (*t*),

$$u + vt = 0 \ .$$

Celle-ci représente les points de l'axe A_0B_0 des origines, et de même pour le second rapport.

Nomogramme de la formule (2).

5. — Récrivant cette formule sous la forme

$$\cos a - \sin b \sin c \cos A = \cos b \cos c \ ,$$

nous voyons que, pour obtenir sa représentation par un nomogramme à alignement, il suffit de poser

$$u = \cos a \ , \qquad v = -\cos A \ . \qquad (4)$$

[1] Ici, comme dans la suite, il est fait usage de coordonnées parallèles *u* et *v* pour la construction des nomogrammes (1, 5), et l'on désigne par A_0 et B_0 les origines des axes coordonnés afin de réserver la notation A et B pour les angles des triangles sphériques.

Ces équations définissent les graduations des axes A_0u et B_0v et donnent pour le réseau des points (b, c) l'équation

$$u + v \sin b \sin c = \cos b \cos c \ . \tag{5}$$

La symétrie de cette équation en b et c montre que les courbes (b) et les courbes (c) sont les mêmes. Ce sont les courbes de cette famille unique qui, en se recoupant elles-mêmes, engendrent le réseau des points (b, c).

Proposons-nous d'abord de former l'équation des courbes du système obtenu par la variation de c. Nous avons à déterminer le lieu du point d'équation (5) lorsque c y est regardé comme variable. L'équation en u et v de ce lieu résulte de l'élimination de ce paramètre c entre l'équation (5) et sa dérivée prise par rapport à c, c'est-à-dire

$$v \sin b \cos c = - \cos b \sin c \ , \tag{6}$$

Faisant la somme des équations (5) et (6) après avoir multiplié, d'une part, la première par $\sin c$ et la seconde pas $\cos c$, et, d'autre part, la première par $\cos c$ et la seconde par $\sin c$, on a les équations

$$u \sin c = - v \sin b \ , \qquad u \cos c = \cos b \ ,$$

qui, élevées au carré et additionnées, donnent

$$u^2 = v^2 \sin^2 b + \cos^2 b \ , \tag{7}$$

qu'on peut écrire

$$u^2 - 1 = \sin^2 b (v^2 - 1) \ . \tag{7'}$$

Sous la forme (7), l'équation montre que *les courbes* (b) *sont des ellipses dont un axe est dirigé suivant la droite* A_0B_0 *joignant les origines des axes* A_0u *et* B_0v[1]. Sous la forme (7') l'équation fait apparaître que *ces ellipses appartiennent à un faisceau tangentiel comprenant les coniques dégénérées* $u^2 - 1 = 0$, $v^2 - 1 = 0$ *qui consistent chacune en un couple de points réels* ($u = \pm 1$, $v = \pm 1$).

En d'autres termes, *les ellipses* (b) *sont toutes inscrites dans*

[1] Voir, pour une théorie complète des coniques en coordonnées parallèles, la brochure de l'auteur : *Coordonnées parallèles et axiales* (Paris ; Gauthier-Villars ; 1885).

le quadrilatère formé par les quatre droites joignant chacun des points $u = \pm 1$ *à chacun des points* $v = \pm 1$.

Si, comme c'est le cas sur la fig. 14, nous prenons comme module de chacune des échelles des cosinus, la moitié de la distance entre les axes A_0u et B_0v, ces axes étant perpendiculaires à A_0B_0, les points $u = \pm 1$, $v = \pm 1$ forment un

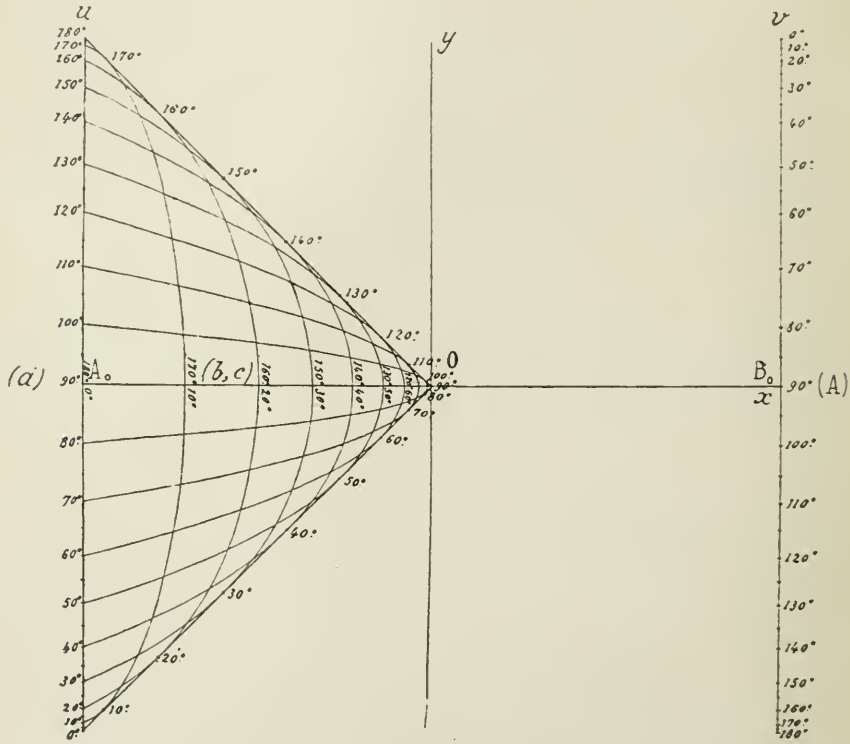


Fig. 14.

carré dont deux des côtés sont parallèles à A_0B_0. Ces deux côtés et les deux diagonales du carré constituent les quatre tangentes communes à toutes les ellipses (*b*).

6. — Pour le tracé de ces ellipses, point par point, nous aurons recours aux coordonnées cartésiennes rapportées aux axes Ox et Oy pour lesquels l'origine O est le milieu A_0B_0.

le sens positif de Ox confondu avec OB_0, l'axe Oy parallèle aux axes A_0u et B_0v et de même sens.

Avec ces axes, les coordonnées du point (b, c) sont

$$x = -\frac{1 - \sin b \sin c}{1 + \sin b \sin c}, \qquad y = \frac{\cos b \cos c}{1 + \sin b \sin c}. \tag{8}$$

Notons que, si b et c sont compris entre O et π,

$$-1 < x < 0$$

et que

$$0 < y < 1 \qquad \text{ou} \qquad -1 < y < 0$$

suivant que b et c sont tous deux du même côté ou de côtés différents par rapport à $\frac{\pi}{2}$.

Cette dernière remarque est importante en ce qu'elle donne le moyen d'éviter toute ambiguïté dans la correspondance entre les couples de valeurs de b et c et les points du réseau (b, c). L'équation (7) montre que l'ellipse (b) ou (c) est la même pour deux valeurs supplémentaires de l'angle correspondant ; en outre, les ellipses (b) et (c) ont deux points communs symétriques par rapport à Ox dans la partie utilisée du réseau ; mais la remarque ci-dessus établit clairement que l'on doit prendre le point au-dessus ou au-dessous de Ox suivant que b et c sont du même côté ou de côtés différents par rapport à $\frac{\pi}{2}$.

Supposons maintenant que b et c soient égaux ou supplémentaires, de telle sorte que les ellipses correspondantes coïncident. Par passage à la limite, on voit que l'on doit prendre pour point (b, c) sur le nomogramme le point de contact de l'ellipse unique avec l'une des tangentes communes issues de O, soit au-dessus, soit au-dessous de Ox. Dans chaque cas, en vertu de ce qui précède, il n'y a pas la moindre hésitation à avoir dans le choix de ce point (b, c), non plus que dans la détermination de la valeur d'un de ces angles lorsqu'un tel point et la valeur de l'autre angle sont connus.

L'équation cartésienne de l'ellipse (b), dont (7) fait connaître

l'équation en coordonnées parallèles, est facile à former. Des équations (8) on tire sans difficulté

$$\sin b \sin c = \frac{1+x}{1-x}, \qquad \cos b \cos c = \frac{2y}{1-x},$$

d'où, par élimination de c,

$$\frac{(1+x)^2}{\sin^2 b} + \frac{4y^2}{\cos^2 b} = (1-x)^2$$

ou

$$(1+x^2)\cos^2 b + 4y^2 \sin^2 b = (1-x)^2 \sin^2 b \cos^2 b. \qquad (9)$$

De cette équation on tire immédiatement que, pour $x = -1$, on a $y = \pm \cos b$, c'est-à-dire que l'ellipse (b) coupe l'échelle a portée sur A_0u aux points cotés b et $\pi - b$.

Il convient aussi de remarquer que si, dans (7), on fait $v = o$, on a $u = \pm \cos b$, ce qui signifie que la droite joignant les points cotés b et $\pi - b$ de l'échelle (a) au point B_0 sont tangentes à l'ellipse (b) en ces points.

7. — Au moyen soit des formules (8), soit de l'équation (9), nous pouvons construire les ellipses (b) [avec lesquelles, ainsi que nous l'avons précédemment observé, coïncident les ellipses (c)] par les procédés ordinaires de la géométrie analytique. Mais un mode de construction plus simple et plus expéditif est fourni par la considération de l'équation (2). En fait, d'après ce que nous avons vu, cette équation exprime l'alignement des points (a) de A_0u, (A) de B_0v et (b, c). Deux tels alignements obtenus pour (b, c) par le calcul de deux couples simples de valeurs de a et A déterminent la position de ce point (b, c).

Or, la formule (2) montre que, pour $A = o$, nous avons $a = b - c$, et, pour $A = \pi$, $a = b + c$. Ces deux couples de valeurs de a et A déterminent des droites dont le point d'intersection coïncide avec le point (b, c).

De là, la construction suivante du système des ellipses (b) ou (c) : *Les axes* A_0u *et* B_0v *portant les échelles* (a) *et* (A) *définies par les formules* (4), *on joint chacun des points* $A = o$ *et* $A = \pi$ *à tous les points de l'échelle* (a) *et l'on obtient ainsi deux faisceaux de droites dont les mutuelles intersections se trou-*

vent sur les ellipses (b). *Pour que deux droites de ces faisceaux se coupent en un point de l'ellipse* (b) *il est nécessaire et suffisant que la somme ou la différence des angles correspondant à ces deux droites soit égale à* 2b.

C'est par ce moyen qu'a été construit le nomogramme de la fig. 14. Son mode d'emploi résulte dans tous les cas de l'énoncé suivant :

Le point (b, c) *étant celui des points d'intersection des ellipses* (b) *et* (c) *qui est au-dessus ou au-dessous de* A_0B_0 *suivant que* b *et* c *sont ou non du même côté par rapport à* $\frac{\pi}{2}$, *les points cotés* (a), (A) *et* (b, c) *sont en ligne droite.*

Nomogramme de la formule (3).

8. — Récrivons cette formule ainsi

$$\operatorname{cotg} c \sin a - \operatorname{cotg} C \sin B = \cos a \cos B \tag{3}$$

et posons

$$u = \operatorname{cotg} c \ , \qquad v = - \operatorname{cotg} C \ . \tag{10}$$

Ces formules définissent les échelles portées sur les axes A_0u et B_0v et donnent pour le réseau de points (a, B) l'équation

$$u \sin a + v \sin B = \cos a \cos B \ . \tag{11}$$

Pour avoir l'équation en u et v de la courbe (a) résultant de la variation de B, il faut éliminer B entre cette équation et sa dérivée prise par rapport à B, c'est-à-dire

$$v \cos B = - \cos a \sin B \ . \tag{12}$$

Si l'on fait la somme de ces équations après les avoir multipliées respectivement d'abord par cos B et — sin B, puis par sin B et cos B, on obtient

$$u \sin a \cos B = \cos a \ , \qquad u \sin a \sin B = - v \ ,$$

équations qui, élevées au carré et additionnées, donnent

l'équation cherchée

$$u^2 \sin^2 a = v^2 + \cos^2 a \ , \tag{13}$$

ou

$$(u^2 + 1) \sin^2 a = v^2 + 1 \ . \tag{13'}$$

Sous la forme (12), l'équation montre que *les courbes* (a) *sont des hyperboles dont un des axes est situé sur* A_0B_0, et, d'après la forme (13'), il est évident que *ces hyperboles forment un faisceau tangentiel comprenant les coniques dégénérées* $u^2 + 1 = 0$, $v^2 + 1 = 0$, *qui consistent chacune en un couple de points imaginaires* ($u = \pm i$ *et* $v = \pm i$).

En d'autres termes, *les hyperboles* (a) *sont toutes inscrites dans le quadrilatère formé par les quatre droites joignant chacun des points* $u = \pm i$ *à chacun des points* $v = \pm i$.

Par rapport aux axes cartésiens que nous associons de façon permanente aux axes parallèles A_0u et B_0v, ces droites ont pour équations

$$y = \pm i \ , \qquad y = \pm ix \ .$$

Les dernières sont les droites *isotropes* issues de l'origine 0, ce qui prouve que *l'origine* 0 *est un foyer commun à toutes les hyperboles du faisceau* [1].

Si nous permutons a avec B, et u avec v, cela ne change rien à l'équation (11), de sorte que nous avons immédiatement pour l'équation des courbes (B)

$$u^2 + 1 = (v^2 + 1) \sin^2 B \ , \tag{14}$$

qui définit un faisceau d'hyperboles, algébriquement identique au précédent. Seulement, les hyperboles (a), qui ont un foyer commun en O, ont leur concavité tournée du côté de A_0, tandis que les hyperboles (B) qui ont aussi un foyer commun en O ont leur concavité tournée du côté B_0. Ces deux faisceaux (a) et (B) sont symétriques l'un de l'autre par rapport à Oy (fig. 15) [2].

---

[1] Il est à noter que ces hyperboles n'ont en commun qu'un seul foyer et non deux, attendu que les deux autres côtés du quadrilatère dans lequel elles sont inscrites sont des parallèles imaginaires à Ox et non des droites isotropes.

[2] Ce nomogramme a été effectivement construit en vue de son application particulière à la détermination particulière de l'azimut, pour le point à la mer, par le M. lieutenant de vaisseau Perret (*Association française pour l'avancement des sciences. Congrès de Cherbourg. 1905*).

9. — Comme dans le cas précédent, nous allons passer aux coordonnées cartésiennes, par rapport aux mêmes axes que ci-dessus, en vue de la construction des hyperboles point par point.

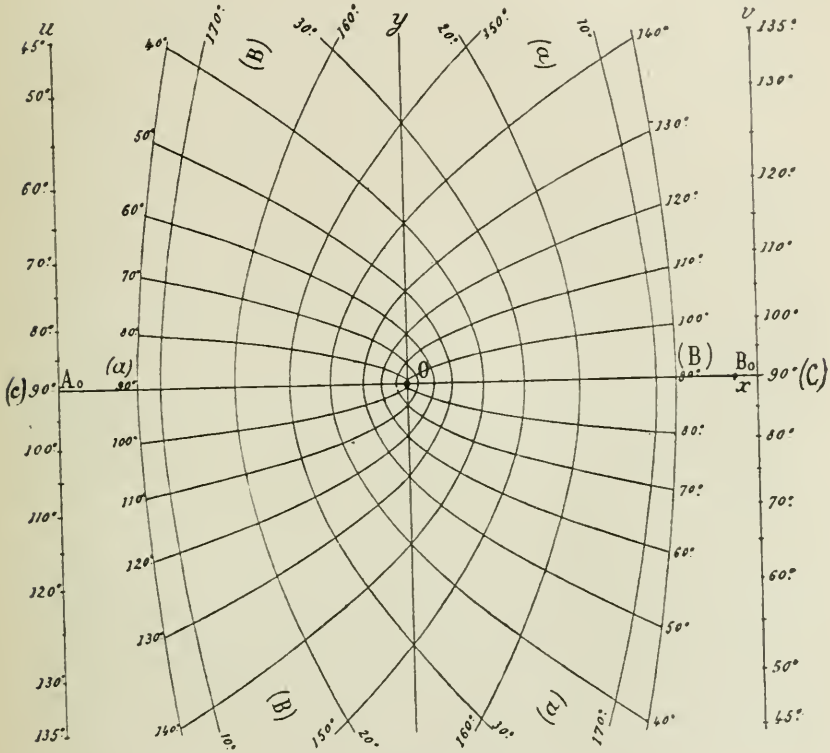


Fig. 15.

Les coordonnées du point (a, B) sont

$$x = \frac{\sin \mathrm{B} - \sin a}{\sin \mathrm{B} + \sin a}, \qquad y = \frac{\cos a \cos \mathrm{B}}{\sin a + \sin \mathrm{B}}. \tag{15}$$

Notons que si a et B sont compris 0 et π, nous avons toujours

$$-1 < x < 1,$$

et que

$$y > 0 \qquad \text{ou} \qquad y < 0,$$

suivant que a et B sont ou non du même côté par rapport à $\frac{\pi}{2}$. Cela donne le moyen de faire disparaître toute ambiguïté dans la détermination, sur la partie utile du nomogramme, du point correspondant à un couple de valeurs données de a et B.

Pour avoir l'équation cartésienne des hyperboles (a), nous n'avons qu'à tirer de (15)

$$\sin B = \frac{1+x}{1-x} \sin a \ , \qquad \cos B = \frac{2y}{1-x} \operatorname{tg} a \ ,$$

et nous obtenons ainsi

$$(1+x)^2 \sin^2 a + 4y^2 \operatorname{tg}^2 a = (1-x)^2$$

ou

$$(1-x)^2 \cos^2 a - 4y^2 \sin^2 a = (1+x)^2 \sin^2 a \cos^2 a \ . \qquad (16)$$

Grâce à la remarque précédente concernant la permutation des axes A_0u et B_0v dont les équations cartésiennes sont respectivement $x+1=0$ et $x-1=0$, nous déduisons immédiatement de là l'équation des hyperboles (B)

$$(1+x)^2 \cos^2 B - 4y^2 \sin^2 B = (1-x)^2 \sin^2 B \cos^2 B \ . \qquad (17)$$

De la comparaison de ces équations (16) et (17) avec l'équation (9) il ressort immédiatement que les deux faisceaux d'ellipses et d'hyperboles, ci-dessus rencontrés, se déduisent l'un de l'autre au moyen de la transformation homographique

$$x' = \mp x \ , \qquad y' = yi \ ,$$

qui fait correspondre aux droites issues de l'origine et inclinées à 45° sur A_0B_0 les droites isotropes semblablement issues de O.

Pour $x = -1$, l'équation (16) donne $y = \pm \operatorname{cotg} a$, ce qui montre que l'hyperbole (a) rencontre l'axe A_0u aux points cotés a et $\pi - a$ de l'échelle (c). De même, si l'on fait $x = 1$ dans l'équation (17), on voit que l'hyperbole (B) coupe l'axe B_0v aux points cotés B et $\pi - B$ de l'échelle (c).

D'ailleurs, si l'on fait $v = o$ dans l'équation (13), ou $u = 0$

dans l'équation (14), on constate que les tangentes aux hyperboles (a) en leurs points d'intersection avec A_0u passent par B_0 et que les tangentes aux hyperboles (B) en leurs points d'intersection avec B_0v passent par A_0.

Contrairement à ce qui avait lieu pour le précédent nomogramme, dont la partie utile — lorsque les variables restent comprises entre o et π — est enfermée dans une aire limitée, ce nouveau nomogramme, pour les mêmes limites attribuées aux variables, s'étend de $-\infty$ à $+\infty$ dans la direction de Oy. Pratiquement, donc, il n'est possible de construire qu'une partie restreinte de ce nomogramme. Pour atteindre des valeurs des variables en dehors de ce domaine, il est nécessaire de recourir à des transformations homologiques comme celles qui ont été envisagées dans la première conférence (I, 7 et note additionnelle).

Nomogrammes divers relatifs à la résolution des triangles sphériques.

10. — Si l'on ne stipule pas, comme nous l'avons fait ci-dessus, que l'on veut obtenir un élément inconnu d'un triangle sphérique dont trois éléments sont donnés, *à l'aide d'une seule lecture*, on peut arriver à ce résultat au moyen de plusieurs lectures successives faites sur un nomogramme unique. Au point de vue de la construction, ce nomogramme est beaucoup plus simple que les précédents et constitue ce qu'on peut appeler une *grille trigonométrique*.

Cette grille se construit de la manière suivante : à un cercle gradué en degrés on circonscrit un carré dont les côtés sont parallèles et perpendiculaires au diamètre 0° — 180°. A l'intérieur de ce carré on trace les droites joignant les points de division du cercle qui sont symétriques soit par rapport au diamètre 0° — 180°, soit au diamètre 90° — 270°. Chacune de ces droites est associée aux graduations des deux points du cercle divisé qu'elle relie.

Il a été établi que, grâce à l'introduction, en certains cas, d'angles auxiliaires, cette grille permet d'obtenir la résolu-

tion complète de tout triangle sphérique[1]. Mais une telle solution, comme on s'en rend aisément compte, offre surtout un intérêt théorique. En pratique, il y a un sérieux avantage à obtenir le résultat cherché au moyen d'une seule lecture et c'est là ce qui confère leur importance aux nomogrammes que nous venons de décrire ci-dessus.

Dans certaines applications, l'un des quatre éléments en question peut être regardé comme constant, et il devient avantageux, en un tel cas, de construire un nomogramme particulier à trois variables se déduisant d'un des précédents nomogrammes par fixation, sur l'un des quatre systèmes cotés, d'un élément unique correspondant à la valeur constante donnée.

Supposons, par exemple, que le problème consiste à représenter la relation entre les trois côtés a, b, c d'un triangle sphérique rectangle en A. La relation en question, qui peut se déduire de (2) lorsqu'on y fait $A = \frac{\pi}{2}$, est

$$\cos a = \cos b \cos c \ . \tag{18}$$

Le nomogramme correspondant est celui de la fig. 14 sur lequel on supprime la graduation (A) de l'axe B_0v, *tous les alignements étant alors pris sur le point* B_0.

Une telle solution présente l'intérêt théorique d'être contenue dans le cas général. Mais il est clair qu'on peut lui substituer une solution beaucoup plus simple qui s'offre immédiatement à l'esprit. Posant

$$u = \cos a \ , \qquad v = -\cos b \ ,$$

on a, pour c, l'échelle

$$u + v \cos c = 0 \ ,$$

portée sur l'axe A_0B_0.

Les échelles (a) et (b) sont obtenues par remplacement, sur la fig. 13, des angles inscrits le long de A_0u et de B_0v par leurs compléments, et l'échelle (c) n'est autre que la projec-

[1] On voudra bien se reporter au mémoire publié par l'auteur sur ce sujet (*Bulletin de la Société mathématique de France*, T. 32, 1904, p. 196).

tion de (a) sur A_0B_0 à partir du point $b = 0$, puisque, pour cette valeur de b, la formule (18) donne $a = c$.

Pour prendre un autre exemple, proposons-nous de représenter la relation entre l'angle horaire AH, la déclinaison δ

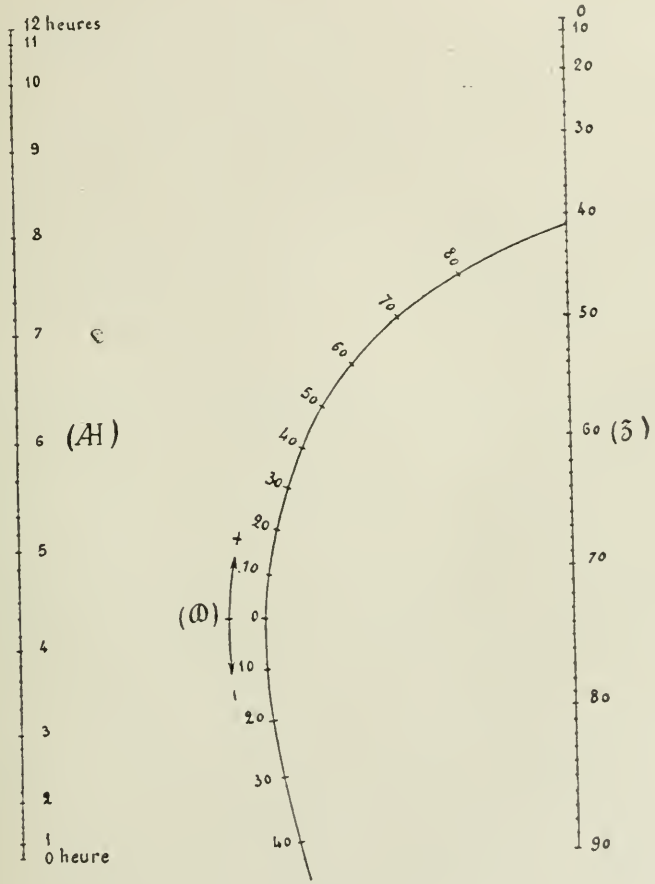


Fig. 16.

et la distance zénithale z d'un astre quelconque pour une latitude constante φ. Cette relation est fournie par la formule (2) où l'on fait

$$a = z\,, \qquad b = \frac{\pi}{2} - \varphi\,, \qquad c = \frac{\pi}{2} - \delta\,, \qquad A = AH\,.$$

Ici, φ est supposé constant. Il est dès lors suffisant de marquer sur l'ellipse (b) correspondant à cette valeur de φ, les points répondant aux diverses valeurs de Ω, c'est-à-dire les points où les diverses ellipses (c) rencontrent cette ellipse (b) (fig. 16).

D'ailleurs, AH variant de 0° à 180° tandis que z varie seulement de 0° à 90°, on peut prendre pour cette seconde échelle un module double de celui de la première, de façon à donner à ces échelles des longueurs égales. Cela revient à effectuer une certaine transformation homographique sur la partie qui vient d'être particularisée du nomogramme général de la formule (2). C'est ainsi qu'a été construit le nomogramme représenté par la fig. 16, en vue de la préparation des observations à l'équatorial de l'Observatoire de Paris [1] ($\varphi = 48° \, 50' \, 11''$).

[1] Au sujet de la construction de ce nomogramme, le lecteur peut consulter une note de l'auteur dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, T. 135, p. 728 (1902).

LES ANTINOMIES DE RUSSELL ET DE BURALI-FORTI

ET LE

PROBLÈME FONDAMENTAL DE LA THÉORIE DES ENSEMBLES

PAR

D. Mirimanoff (Genève).

Introduction.

Aucune théorie mathématique n'a fourni, comme on le sait, autant de faits paradoxaux et d'antinomies, au moins apparentes, que la fameuse théorie des ensembles de Cantor. Les plus connues et les plus importantes de ces antinomies sont celles de Russell et de Burali-Forti ; mais combien d'autres faits bizarres ont été révélés, depuis la publication des premiers travaux de Cantor sur la théorie des ensembles, par Borel, Peano, Richard et Cantor lui-même.

Les antinomies cantoriennes, qui déconcertent et déroutent presque toujours au premier abord, ont fait le désespoir de quelques géomètres logiciens. C'est là sans doute qu'il faut voir la cause de la défiance exagérée que les idées et les théories cantoriennes les mieux établies inspirent à des esprits particulièrement défiants.

Est-il besoin de dire que rien ne justifie, au fond, ni cette défiance ni ce désespoir ? N'avons-nous pas eu des surprises comparables dans la théorie des fonctions et en géométrie ?

Qu'on se rappelle, par exemple, la découverte par Riemann et Weierstrass de fonctions continues non dérivables et de courbes sans tangentes, dont une étude approfondie n'a

justement pu être faite depuis qu'à l'aide de la théorie des ensembles[1]; on pourrait citer également la propriété si curieuse des séries semi-convergentes, révélée par Lejeune Dirichlet, d'avoir une somme dépendant de l'ordre des termes.

Dans tous ces cas, il y a une contradiction manifeste entre les faits nouveaux et les propriétés que nous croyions toujours vraies et qui nous semblaient évidentes, mais qui reposaient en réalité sur une expérience ou une intuition incomplètes, et n'étaient vraies que sous certaines conditions. C'est ainsi que, dans le cas des séries semi-convergentes, le fait nouveau signalé par Dirichlet semble incompatible avec la propriété fondamentale de l'addition algébrique, qui est d'être une opération commutative. Cette propriété est toujours vraie dans un domaine fini, mais les exemples de Dirichlet prouvent qu'elle peut cesser d'être vraie lorsque les substitutions par lesquelles on passe à l'ordre nouveau portent sur un nombre infini d'addendes. Le sentiment d'évidence repose ici sur une intuition incomplète.

Or les antinomies cantoriennes et, en particulier, celles de Russell et de Burali-Forti sont comparables aux exemples que nous venons de rappeler. On croyait, et il semblait évident, que l'existence des individus devait entraîner nécessairement celle de leur ensemble; mais Burali-Forti et Russell ont montré, par des exemples différents, qu'un ensemble d'individus peut ne pas exister, bien que ces individus existent. Comme nous ne pouvons pas ne pas accepter ce fait nouveau, nous sommes obligés d'en conclure que la proposition qui nous semblait évidente et que nous croyions toujours vraie est inexacte, ou plutôt qu'elle n'est vraie que sous certaines conditions[2]. Et alors le problème suivant se pose, que l'on peut regarder comme le problème fondamental de la théorie des ensembles :

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble d'individus existe ?

Certes, l'étude de ce problème est moins avancée que celle

---

[1] Cf. Mme Grace Chisholm Young : *Sur les courbes sans tangente* (*Ens. math.*, année 1915, p. 348). Cf. J. König : *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre*, chap. II.

des séries semi-convergentes, mais le premier pas est fait, grâce surtout aux recherches de Russell[1], H. Poincaré[2] et J. König[3]. Dans les derniers paragraphes de ce travail, je donne une solution du problème fondamental pour le cas particulier des ensembles que j'appelle ensembles ordinaires. Mes déductions s'appuient sur trois postulats, qu'on applique couramment dans l'étude des problèmes de la théorie des ensembles.

D'autre part, les exemples mêmes de Russell et de Burali-Forti auraient besoin d'être examinés de plus près. Je ferai voir qu'il est facile de donner une forme plus précise à l'exemple de Russell en le débarrassant de difficultés parasites qui n'ont rien à faire avec l'antinomie de Russell proprement dite. Je transformerai de même l'exemple de Burali-Forti, ce qui va me permettre de faire un rapprochement nouveau entre les deux antinomies.

Je ferai abstraction, dans ce travail, des distinctions nouvelles introduites par J. König (*loc. cit.*) dans la théorie des ensembles quelconques, et en particulier dans celle des ensembles bien ordonnés. Deux ensembles contenant les mêmes éléments ne seront jamais regardés comme différents, à moins qu'on ne tienne compte des relations d'ordre ; et à tout ensemble bien ordonné, s'il existe, correspondra, par définition, un type d'ordre déterminé. Je donnerai dans un autre travail les raisons qui m'ont déterminé à ne pas rattacher cette étude à la théorie de J. König.

Je commencerai par l'antinomie de Russell.

Antinomie de Russell.

1. On sait que Russell distingue deux sortes d'ensembles :

Un ensemble E est de première sorte s'il diffère de chacun de ses éléments.

---

[1] Russell : *The Principles of Mathematics.*

[2] H. Poincaré : *Science et Méthode. Dernières pensées.*

[3] J. König : *loc. cit.*, chap. II et IX. On trouvera des indications bibliographiques et des remarques intéressantes dans le livre de G. Hessenberg : *Grundbegriffe der Mengenlehre* ; dans le t. II de l'ouvrage de K. Schoenflies : *Die Entwicklung der Lehre von der Punktmannigfaltigkeiten* ; et dans les mémoires de Zermelo.

Un ensemble E est de seconde sorte s'il contient un élément qui ne diffère pas de E.

Il résulte de cette définition qu'un ensemble de deuxième sorte contient toujours parmi ses éléments un ensemble de deuxième sorte. D'où ce *lemme* :

Un ensemble d'ensembles de *première sorte* est également un ensemble de *première sorte*.

Envisageons maintenant, avec Russell, l'ensemble R de *tous* les ensembles de *première sorte*.

Il est facile de montrer que cet ensemble n'existe pas. En effet, s'il existait, il devrait être, en vertu du lemme précédent, de première sorte, c'est-à-dire différent de chacun de ses éléments ; d'autre part, l'ensemble R doit contenir *tous* les ensembles de première sorte, donc, en particulier, l'ensemble R lui-même, — résultat absurde.

Par conséquent, les conditions exprimées par les mots *première sorte* et *tous* sont incompatibles, et l'ensemble R n'existe pas.

Tel est l'exemple remarquable donné par Russell, et il prouve bien, comme je l'ai rappelé dans l'introduction, qu'un ensemble d'individus peut ne pas exister bien que ces individus existent[1].

2. — Nous allons maintenant donner à l'exemple de Russell une forme légèrement différente.

Faisons remarquer d'abord que la seule propriété des éléments qui intervienne dans cet exemple est leur composition. Un élément est-il un ensemble ou non (par définition) ? et s'il l'est, de quelle manière se compose-t-il ? Ses éléments sont-ils à leur tour décomposables ou non ?... et ainsi de suite. Voilà ce qui est seul important de savoir.

Pour préciser, j'introduirai une notion qui nous sera très utile dans la suite.

Soient deux ensembles E et E'. Je dirai qu'ils sont *isomorphes* si les conditions suivantes sont satisfaites :

a) Les ensembles E et E' sont équivalents ; en d'autres

---

[1] On sait que l'exemple de Burali-Forti, que nous allons examiner plus loin, a été donné avant celui de Russell.

termes, une correspondance parfaite peut être établie entre les éléments de E et ceux de E′.

b) Cette correspondance peut être établie de telle manière qu'à tout élément indécomposable e de E corresponde un élément indécomposable e' de E′, et réciproquement ; et qu'à tout élément-ensemble F de E corresponde un élément-ensemble équivalent F′ de E′, la correspondance parfaite entre les éléments de F et F′ pouvant être à son tour établie de telle manière qu'à tout élément indécomposable de F corresponde un élément indécomposable de F′, et à tout élément-ensemble de F un élément-ensemble équivalent de F′, — et ainsi de suite.

Si donc deux ensembles sont isomorphes, les éléments correspondants le sont aussi, et réciproquement.

Sont isomorphes, par exemple, les deux ensembles $(e_1, e_2, \ldots, e_m, F)$, $(e'_1, e'_2, \ldots, e'_m, F')$[1], où les e et les e' sont des éléments indécomposables, et les F, F′ des ensembles contenant chacun un même nombre d'éléments indécomposables.

Nous dirons qu'un ensemble E est de première sorte s'il n'est isomorphe à aucun de ses éléments ; nous dirons qu'il est de deuxième sorte s'il est isomorphe à l'un au moins de ses éléments. Est, par exemple, de deuxième sorte l'ensemble $E = (e, E')$, où $E' = (e', E'')$, $E'' = (e'', E''')$, et en général $E^{(n)} = (e^{(n)}, E^{(n+1)})$ pour tout n, les e désignant des éléments indécomposables.

La définition que nous venons de donner n'est pas identique à celle du paragraphe précédent, mais les propriétés essentielles des ensembles de première et de deuxième sorte subsistent, et le lemme reste vrai.

Revenons maintenant à l'antinomie de Russell. Envisageons l'ensemble R′ de tous les ensembles de première sorte, au sens nouveau. On démontre comme dans le paragraphe précédent, que cet ensemble n'existe pas. En effet, s'il existait,

---

[1] Dans ce travail, je désigne un ensemble dont les éléments sont $a, b, c, \ldots$ par $(a, b, c, \ldots)$, et cela quels que soient ces éléments ; par exemple, une parenthèse de la forme (E, F), où E, F sont des ensembles, représente l'ensemble dont les éléments sont E et F, et non l'ensemble-somme formé par la réunion des ensembles E et F.

il serait, en vertu de notre lemme, de première sorte, et, d'autre part, il devrait être isomorphe à l'un de ses éléments, résultat absurde.

La forme nouvelle sous laquelle nous venons de mettre l'exemple de Russell ne se prête pas bien, comme nous le verrons dans la suite, à un rapprochement avec l'exemple de Burali-Forti. Pour y arriver, une transformation nouvelle est nécessaire. Je vais la donner dans le paragraphe suivant.

3. — Je commencerai par introduire une notion dont nous nous servirons souvent.

Soient E un ensemble, E′ un de ses éléments, E″ un élément quelconque de E′, et ainsi de suite. J'appelle *descente* la suite des passages de E à E′, de E′ à E″, etc. Cette descente prend fin lorsqu'on tombe sur un élément indécomposable. Dans ce cas elle est finie, mais elle peut ne pas l'être, ce qui arrive par exemple pour tout ensemble de deuxième sorte E, lorsqu'on passe de cet ensemble E à l'élément E′ qui lui est isomorphe, de E′ à son isomorphe E″, et ainsi de suite.

Je dirai qu'un ensemble est *ordinaire* lorsqu'il ne donne lieu qu'à des descentes finies ; je dirai qu'il est *extraordinaire* lorsque parmi ses descentes il y en a qui sont infinies.

Tout ensemble de deuxième sorte est donc un ensemble extraordinaire, mais ces deux notions (d'ensemble de deuxième sorte et d'ensemble extraordinaire) ne sont pas équivalentes, puisqu'une descente infinie peut se présenter aussi dans un ensemble de première sorte.

Soit, par exemple, l'ensemble $E = (e_1, E')$, où E′ est un ensemble de la forme (e_1, e_2, E''), $E'' = (e_1, e_2, e_3, E''')$, et, en général, $E^{(n)} = (e_{n+1}, e_1, e_2, E^{(n+1)})$ pour tout n. L'ensemble E ainsi défini est de première sorte, bien que la descente $E, E', \ldots E^{(n)} \ldots$ soit infinie.

Appelons *longueur* d'une descente (dans un ensemble ordinaire) le nombre des passages qui la constituent. A toute descente correspond ainsi un nombre entier n déterminé, mais cette correspondance n'est pas biunivoque en général, et les nombres n bien que finis, ne sont pas nécessairement bornés dans leur ensemble.

Les propriétés des ensembles de première sorte dont nous

avons fait usage dans le paragraphe précédent subsistent pour les ensembles ordinaires ; notre lemme reste vrai et s'énonce de la manière suivante :

Un ensemble d'ensembles ordinaires est un ensemble ordinaire.

Envisageons maintenant l'ensemble V de *tous* les ensembles *ordinaires* existants. On démontre, comme dans les paragraphes 1 et 2, que l'ensemble V ne saurait exister.

Introduisons à présent une restriction.

Soit E un ensemble ordinaire. Par définition, toutes les descentes de E sont finies et aboutissent à des éléments indécomposables qui, bien entendu, ne sont pas en général des éléments de E. Pour éviter la confusion, je les appellerai *noyaux* de E.

Envisageons les ensembles ordinaires dont les noyaux $e, f, g, \ldots$ font partie d'un ensemble existant donné $N = (e, f, g, \ldots)$. Soit V′ l'ensemble de tous ces ensembles. On démontre immédiatement que cet ensemble, qui est un sous-ensemble de V n'existe pas non plus.

En particulier, l'ensemble de tous les ensembles ordinaires à un seul noyau e n'existe pas. Dans le paragraphe 7 nous serons amené à définir des ensembles à un noyau d'une forme particulière.

En partant des ensembles déjà introduits, on peut définir des ensembles non-existants d'une nature différente.

Soit, par exemple, E un ensemble de première sorte au sens nouveau, et $\mathcal{E}$ l'ensemble de tous les ensembles isomorphes à E. A tout E correspond un $\mathcal{E}$, et si un ensemble E′ est non-isomorphe à E, l'ensemble correspondant $\mathcal{E}'$ est différent de $\mathcal{E}$. Prenons dans chacun des ensembles $\mathcal{E}$ un représentant quelconque E_0. L'ensemble de tous ces E_0, qui est un sous-ensemble de R′, n'existe pas. Des sous-ensembles analogues peuvent être définis en partant des ensembles V et V′.

Dans les paragraphes suivants, j'aurai à m'appuyer sur une propriété des ensembles existants qui est loin d'être évidente, mais que je regarderai comme vraie, du moins pour les ensembles que j'envisage dans ce travail.

Propriété I. — L'existence d'un ensemble entraîne celle de tous ses sous-ensembles[1].

En vertu de cette propriété, il suffit de montrer que V′ n'existe pas pour en conclure immédiatement qu'il doit en être de même des ensembles V, R′ et R.

Antinomie de Burali-Forti.

4. — Burali-Forti arrive, comme on le sait, à l'antinomie qui porte son nom[2] par la considération des types d'ordre d'ensembles bien ordonnés (nombres ordinaux de Cantor). Je rappelle que ces nombres se succèdent suivant une loi déterminée, et forment une sorte de chaîne dont les premiers chaînons sont les suites finies de 1 (suite ou ensemble impropre), 2,... n,... éléments, puis la suite ω, et les types d'ordre $\omega + 1$, $\omega + 2$,... $\omega + n$, etc.

Les propriétés des ensembles bien ordonnés sont très bien connues. Je me bornerai à en rappeler les deux suivantes qui nous seront particulièrement utiles :

a) Tout ensemble bien ordonné infini est semblable à l'ensemble de tous ses segments. Cette propriété est encore vraie pour les ensembles finis et, par conséquent, pour tous les ensembles bien ordonnés, si l'on adjoint à l'ensemble des segments un segment fictif dont le type d'ordre est 0, par définition. Je le désignerai par la lettre e. Il en résulte que tout nombre ordinal π est le type d'ordre de l'ensemble des nombres ordinaux $\alpha < \pi$, y compris 0.

b) Un ensemble bien ordonné n'est semblable à aucun de ses segments.

Ceci rappelé, envisageons avec Burali-Forti l'ensemble W de tous les nombres ordinaux de Cantor.

L'ensemble W ainsi défini n'existe pas. En effet, si W existait, il serait bien ordonné et aurait un type d'ordre π (cf. introduction) ; or, tout nombre π est un élément de W, et l'ensemble des nombres ordinaux $\alpha < \pi$ est un segment

---

[1] Cf. J. König : *loc. cit.*, chap. VI, § 16.

[2] Burali-Forti : *Una questione sui numeri transfiniti*, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, vol. 11 (1897), p. 154.

de W. L'ensemble de Burali-Forti serait donc, en vertu de (*a*), semblable à l'un de ses segments ; conclusion absurde, en vertu de (*b*).

Telle est l'antinomie de Burali-Forti, la plus ancienne et peut-être la plus importante des antinomies cantoriennes connues.

Il semblerait à première vue qu'on s'appuie implicitement, dans l'antinomie de Burali-Forti, sur le postulat suivant : tous les nombres ordinaux de Cantor existent. En réalité, l'antinomie signalée par Burali-Forti est indépendante de ce postulat ; pour s'en assurer, il suffit d'envisager l'ensemble de tous les nombres ordinaux *existants*. En effet, si un nombre ordinal π existe, il en est de même, en vertu de la propriété I, de tous les nombres ordinaux $\alpha < \pi$, et, par conséquent, tout nombre existant π est le type d'ordre de l'ensemble des nombres ordinaux *existants* inférieurs à π. Le raisonnement de Burali-Forti s'applique sans modification, et l'on retombe sur la même antinomie qu'auparavant. Nous désignerons par W l'ensemble de tous les nombres ordinaux existants.

Je ferai remarquer que l'antinomie de Burali-Forti ne dépend que des relations d'ordre de W. Or les relations d'ordre d'un ensemble sont transmises à tout ensemble équivalent. D'où cette propriété.

Propriété II. — Un ensemble n'existe pas, s'il est équivalent à l'ensemble W de Burali-Forti.

Et, d'une manière plus générale (en vertu de la propriété I) : Un ensemble n'existe pas s'il contient un sous-ensemble équivalent à W.

Je vais maintenant donner une forme un peu différente à l'exemple de Burali-Forti que je viens de rappeler.

5. — Soit E un ensemble bien ordonné quelconque, et E′ l'ensemble de tous ses segments, y compris le segment *e* (voir le paragraphe précédent). En vertu de la propriété (*a*), E′ est semblable à E. Remplaçons les segments dont se compose E′ par les ensembles des segments de ces segments, et appliquons une transformation analogue aux segments introduits de cette manière, et ainsi de suite. A chaque

ensemble bien ordonné E correspond ainsi un ensemble d'une forme particulière que j'appellerai ensemble S (lettre initiale du mot segment, pour rappeler le rôle joué par les segments dans cette transformation).

Le segment fictif e subsiste seul après cette transformation. On voit qu'un même ensemble S correspond à tous les ensembles bien ordonnés du même type d'ordre α. Je le désignerai par α_s, et je dirai que le nombre ordinal α est le *rang* de l'ensemble α_s.

Par exemple les ensembles S qui dérivent des ensembles bien ordonnés des types 1, 2 et 3 s'écrivent

$$(e);\ (e,\ (e));\ (e,\ (e),\ (e,\ (e))).$$

L'élément e sera considéré comme indécomposable.

Il résulte de la définition précédente que les éléments d'un ensemble S sont également des *ensembles* S.

Je dis maintenant que tout ensemble S est un ensemble ordinaire à un seul noyau e. En effet, dans les descentes auxquelles donne lieu un ensemble S, on parcourt une suite de segments s'emboîtant les uns dans les autres, et l'on sait que les suites de ce genre sont toujours finies.

Toute descente prend nécessairement fin et aboutit à l'élément e.

Les ensembles S sont donc bien des ensembles ordinaires. Il en résulte entre autres qu'un ensemble S ne saurait être isomorphe à l'un de ses éléments.

Soient maintenant deux ensembles bien ordonnés quelconques, E et F, et soient E_s, F_s les ensembles S correspondants. Deux cas sont possibles : ou bien les ensembles E et E sont semblables, ou bien l'un d'eux (par exemple E) est semblable à un segment de l'autre (ensemble F).

Nous avons vu que dans le premier cas $E_s = F_s$; dans le deuxième cas, E_s est isomorphe et même égal à un élément F_s.

Ceci établi, revenons à l'antinomie de Burali-Forti. Soit W′ l'ensemble de tous les α_s existants. Je dis que l'ensemble W′ n'existe pas.

Première hypothèse : A tout nombre existant α correspond

un ensemble existant α_s. L'ensemble W′ est alors équivalent à W ; il n'existe pas, en vertu de la propriété II.

Deuxième hypothèse : L'existence d'un nombre α n'entraîne pas nécessairement celle de l'ensemble α_s. Soit alors π le plus petit nombre tel que π_s n'existe pas. Aucun α_s n'existe pour $\alpha > \pi$, car l'existence d'un ensemble α_s pour $\alpha > \pi$ entraînerait celle de π_s, qui est un élément de α_s ; par conséquent, W′ est l'ensemble des α_s de rangs inférieurs à π; donc $W' = \pi_s$. W′ n'existe pas, puisque π_s n'existe pas.

Il est facile maintenant de rapprocher l'exemple de Burali-Forti de celui de Russell. En effet, l'ensemble R est relié à W par l'intermédiaire des ensembles R′, V, V′ et W′. Or l'ensemble R′ est un sous-ensemble de R ; l'ensemble V, un sous-ensemble de R′; tout ensemble V′, un sous-ensemble de V; et, enfin, l'ensemble W′, un sous-ensemble d'un V′. Les ensembles R, R′,... W′ forment donc une suite d'ensembles s'emboîtant les uns dans les autres. Il en résulte qu'il suffit de montrer que l'ensemble de Burali-Forti n'existe pas pour en conclure qu'il doit en être de même de chacun des ensembles R, R′,... W′. Cela est vrai, comme nous l'avons vu, de l'ensemble W′, et, en vertu de la propriété I, cela est vrai encore de chacun des ensembles R, R′, V et V′. Il n'est donc pas nécessaire d'appliquer à ces ensembles le raisonnement de Russell ; chacun des résultats partiels que nous avons obtenus d'une manière directe peut être considéré comme une conséquence de l'antinomie de Burali-Forti.

6. — Je ferai remarquer encore qu'on peut définir les ensembles S sans passer par l'intermédiaire des ensembles bien ordonnés. Soit E un ensemble S. Nous avons vu que :

1. L'ensemble E est un ensemble ordinaire à un noyau (le noyau e).
2. Si x et y sont deux éléments quelconques de E, l'un d'eux est un élément de l'autre.

En outre :

3. Si x est un élément de E, tout élément de x est un élément de E.

Ces propriétés sont caractéristiques des ensembles S, et peuvent servir à les définir. On démontre immédiatement

que les ensembles E ainsi définis sont bien les ensembles S du paragraphe précédent. A tout ensemble E correspond un type d'ordre déterminé, et l'ensemble de tous les ensembles E ne diffère pas de l'ensemble W'.

Solution du problème fondamental dans le cas d'ensembles ordinaires.

7. — L'étude des différentes antinomies que nous avons rencontrées jusqu'ici a mis en évidence les faits suivants : dans chacun de nos exemples, il est possible de former des ensembles de plus en plus vastes, mais l'ensemble de *tous* les individus n'existe pas ; quel que soit l'ensemble qu'on envisage (pourvu qu'il existe), des individus nouveaux surgissent, et un ensemble plus vaste apparaît nécessairement ; on est bien en présence d'une extension indéfinie qui ne comporte pas d'arrêt ou borne. En traitant le problème fondamental, je serai amené à préciser cette notion un peu vague de borne et d'absence de borne.

Rappelons à ce propos qu'on trouve dans les ouvrages cités au commencement de ce travail une analyse logique et psychologique approfondie des antinomies cantoriennes et de la notion d'ensemble ; je n'en aurai pas besoin pour le but que j'ai en vue.

Nous supposerons que les ensembles ordinaires E que nous aurons à envisager dans l'étude du problème fondamental vérifient les deux conditions suivantes :

Condition (a). — Les éléments de E sont distincts ; il en est de même des éléments de chacun de ces éléments, et ainsi de suite. Par cette condition je n'écarte pas les ensembles E qui ont des éléments isomorphes ni ceux dont les éléments-ensembles contiennent des éléments isomorphes, etc. L'identité seule est exclue.

Condition (b). — Les noyaux $e, f, g, \ldots$ de tout ensemble E font partie d'un ensemble $N = (e, f, g, \ldots)$ que nous considérerons comme donné ou connu (cf. paragraphe 3).

Nous avons donc à résoudre le problème suivant :

Quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour

qu'un ensemble d'ensembles ordinaires distincts, vérifiant les conditions (a) et (b), existe ?

Je partirai des trois postulats suivants :

Postulat 1. — Si un ensemble d'ensembles ordinaires existe, il en est de même de l'ensemble de tous ses sous-ensembles distincts (Potenzmenge).

Postulat 2. — Si un ensemble (E, F,...), où les éléments E, F,... sont des ensembles ordinaires, existe, il en est de même de la somme des ensembles E, F,... (Vereinigungsmenge)[1].

Postulat 3. — Si un ensemble (a, b, c, ...) existe, il en est de même de tout ensemble équivalent (E, F, G,...), où E, F,... sont des ensembles ordinaires existants.

Commençons l'étude du problème fondamental par le cas particulièrement simple d'ensembles S.

Nous avons appelé *rang* d'un ensemble α_s son type d'ordre α. Je dis qu'en vertu du postulat 3, à tout nombre ordinal existant α correspond un ensemble *existant* α_s ; la deuxième hypothèse du paragraphe 5 doit donc être rejetée. En effet, un α_s est l'ensemble de tous les ensembles S de rangs inférieurs à α. Soit π le plus petit nombre existant tel que π_s n'existe pas ; tous les éléments de π_s existent ; d'autre part, π_s est équivalent à un ensemble bien ordonné existant ; il devrait donc exister, en vertu du postulat 3, contrairement à notre supposition.

Il en résulte que l'ensemble W′ de tous les α_s est équivalent à l'ensemble W de Burali-Forti.

Je dirai que les ensembles S ou leurs rangs ont une borne cantorienne s'il existe un nombre ordinal supérieur au rang de chacun de ses ensembles. Dans le cas contraire, les ensembles S envisagés n'ont pas de borne cantorienne. On a alors le critère suivant : pour qu'un ensemble d'ensembles S non-isomorphes existe, il faut et il suffit que ces ensembles aient une borne cantorienne.

Supposons d'abord que les ensembles S envisagés n'aient pas de borne cantorienne. Je dis que l'ensemble de ces

[1] J. Königs : *loc. cit.* chap. VI, par. 16.

ensembles, que je désignerai par $\mathcal{E}$ ne saurait exister. Supposons le contraire, et soit π_s l'un des ensembles S envisagés. J'appelle A (π) l'ensemble des éléments de $\mathcal{E}$ dont les rangs sont inférieurs à π, et par B (π) l'ensemble des ensembles S dont les rangs sont supérieurs à ceux des éléments de A, mais ne dépassent pas π. L'ensemble B (π) qui ne contient qu'un seul élément de $\mathcal{E}$ (l'ensemble π_s) est un sous-ensemble de $(\pi + 1)_s$; il existe donc, en vertu de la propriété I.

A tout élément π_s de $\mathcal{E}$ correspond un ensemble déterminé B (π).

Si l'ensemble $\mathcal{E}$ existait, il en serait de même, en vertu des postulats 3 et 2, de la somme des ensembles B (π) étendue à tous les éléments π_s de $\mathcal{E}$; mais ce dernier ensemble n'est autre que l'ensemble W', et nous savons que W' n'existe pas ; donc l'ensemble $\mathcal{E}$ n'existe pas non plus.

La première partie de notre critère est établie.

Supposons maintenant que les ensembles S envisagés ont une borne cantorienne. Je dis que l'ensemble $\mathcal{E}$ de tous ces ensembles existe. Soit, en effet, π_s un ensemble S dont le rang soit supérieur aux rangs de nos ensembles ; l'ensemble $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de π_s; il existe donc, en vertu de la propriété I.

Notre critère est établi.

Avant de passer à l'étude du cas général, je ferai quelques remarques pour préciser le problème.

8. — Faisons remarquer d'abord que le critère du paragraphe précédent reste vrai si, au lieu des ensembles S, on envisage les nombres ordinaux de Cantor.

Soit maintenant $\mathcal{E} = (E_\alpha, E_\beta, \ldots)$ un ensemble quelconque équivalent à un ensemble de nombres ordinaux $\alpha, \beta, \ldots$ Si les nombres $\alpha, \beta, \ldots$ n'ont pas de borne cantorienne, l'ensemble $(\alpha_s, \beta_s, \ldots)$ n'existe pas. Par conséquent, $\mathcal{E}$ ne saurait exister, en vertu du postulat 3, car son existence entraînerait celle de $(\alpha_s, \beta_s, \ldots)$; d'où ce lemme :

Lemme. — Un ensemble $(E_\alpha, E_\beta, \ldots)$ n'existe pas, si les nombres $\alpha, \beta, \ldots$ n'ont pas de borne cantorienne. Il en est de même, en vertu de la propriété I, de tout ensemble qui contient un sous-ensemble de cette nature.

Nous pouvons maintenant étendre la notion de rang au cas d'un ensemble ordinaire quelconque (existant).

Définition (r). — Le rang d'un ensemble ordinaire est le plus petit nombre ordinal supérieur aux rangs de ses éléments. Le rang d'un noyau est zéro.

Cette définition fournit un rang déterminé à tout ensemble ordinaire E. Supposons en effet que chacun des éléments de E ait un rang déterminé, en vertu de (r) ; je dis qu'il devra en être de même de l'ensemble E, puisque les rangs des éléments de E ont une borne cantorienne, en vertu du dernier lemme. Si donc E n'avait pas de rang déterminé, il existerait au moins un élément E′ de E ayant la même propriété ; de même E′ contiendrait au moins un élément E″ n'ayant pas de rang déterminé, et ainsi de suite, — résultat absurde, puisque toute descente telle que E, E′, E″.... aboutit à un noyau dont le rang est zéro. Tout ensemble E a donc un rang déterminé, en vertu de (r).

9. — On a alors le critère suivant :

Pour qu'un ensemble d'ensembles ordinaires distincts vérifiant les conditions (a) et (b) existe, il faut et il suffit que les rangs de ces ensembles aient une borne cantorienne.

Je vais d'abord démontrer un lemme.

Lemme. — L'ensemble O_α de tous les ensembles ordinaires distincts de rang α vérifiant les conditions (a) et (b) existe, quel que soit le nombre ordinal α.

Pour démontrer ce lemme, je me servirai d'un raisonnement que j'ai déjà employé dans le paragraphe précédent, et qui n'est qu'un transformé du principe d'induction complète.

Supposons que le lemme soit vrai pour tous les α inférieurs à un nombre π. Je dis qu'il sera vrai pour π.

Soit, en effet, Σ la somme des ensembles O_α, pour tous les $\alpha < \pi$. Cet ensemble existe, en vertu des postulats 3 et 2. Or, l'ensemble O_π, est un ensemble de sous-ensembles de Σ; il existe donc, en vertu du postulat 1.

Le lemme s'en déduit immédiatement. En effet, si un ensemble O_α n'existait pas, il en serait de même d'une suite d'ensembles $O_{\alpha'}$, $O_{\alpha''}$, ..., où $\alpha > \alpha' > \alpha''$..., résultat absurde, cette suite devant aboutir à l'ensemble O_0, c'est-à-dire à

l'ensemble N qui existe par hypothèse. Donc O_α existe, quel que soit α, C. Q. F. D.

Revenons maintenant à notre critère, et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des ensembles ordinaires envisagés E.

Supposons d'abord que les rangs des ensembles E n'aient pas de borne cantorienne. Dans ce cas, l'ensemble $\mathcal{E}$ n'existe pas, en vertu du lemme du paragraphe 8.

Supposons maintenant que les rangs des ensembles E ont une borne cantorienne, et soit π un nombre ordinal supérieur à tous ces rangs. Envisageons l'ensemble Σ, somme des O_α relatifs à tous les $\alpha < \pi$. Cet ensemble existe, en vertu du dernier lemme et des postulats 3 et 2. Mais l'ensemble $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de Σ. Il existe donc en vertu de la propriété I.

Notre critère est démontré.

Tels sont les principaux résultats que je voulais établir dans ce travail.

En résumé, dans les paragraphes consacrés aux antinomies de Russell et de Burali-Forti, je me suis attaché surtout à décrire et à coordonner d'une manière nouvelle des faits en partie connus. J'ai passé ensuite au problème fondamental dont j'ai donné une solution dans le cas d'ensembles ordinaires, en m'appuyant d'une part sur l'antinomie de Burali-Forti et, d'autre part, sur plusieurs postulats. Bien que ces postulats soient fréquemment employés dans l'étude des problèmes de la théorie des ensembles, ils sont loin d'être évidents, et auraient besoin d'être examinés de près et discutés.

J'aurai l'occasion de revenir sur ces questions dans un autre travail que je consacrerai aux antinomies cantoriennes et à la théorie de J. König [1].

Genève, mai-septembre 1916.

---

[1] Il m'a été impossible, à mon grand regret, de prendre connaissance des publications parues depuis le commencement de la guerre.

MODULE D'UNE SOMME

PAR

Michel PETROVITCH (Belgrade, Serbie).

La proposition élémentaire et intuitive, d'après laquelle le module d'une somme Σu_k est au plus égal à la somme de modules des u_k, est fréquemment utilisée dans des démonstrations et dans des calculs approchés. Les propositions aussi intuitives qui suivent, fournissant à la fois des limites inférieures et supérieures du module d'une somme, pourraient également rendre de pareils services.

I. — Soient

$$u_1 = a_1 + ib_1 , \qquad u_2 = a_2 + ib_2 , \qquad u_3 = a_3 + ib_3 \ldots .$$

plusieurs quantités complexes. On a

$$\operatorname{mod} \Sigma u_k = \sqrt{P^2 + Q^2} ,$$

où P et Q désignent les valeurs absolues de Σa_k et Σb_k.

L'inégalité et l'identité

$$1 \geqq \frac{P^2 + Q^2}{(P+Q)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{P-Q}{P+Q}\right)^2$$

font voir que

$$\frac{1}{2} \leqq \frac{P^2 + Q^2}{(P+Q)^2} \leqq 1 .$$

Donc : *le module d'une somme* Σu_k *a pour valeur* $\theta(P+Q)$, *où* P *désigne la valeur absolue de la somme de parties réelles des* u_k, Q *désigne la valeur absolue de la somme de coeffi-*

cients de i *des* u_k *et* θ *désigne un facteur dont la valeur est toujours comprise entre* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *et* 1.

La limite $\frac{1}{\sqrt{2}}$ est effectivement atteinte lorsque $P = Q$ et la limite 1 lorsque les u_k sont tous réels, ou bien tous imaginaires.

On voit, par exemple, aussi que

$$\log \bmod \Sigma u_k = \log (P + Q) - \delta ,$$

où δ est une quantité positive plus petite que $\frac{1}{2} \log 2$. Si le logarithme est vulgaire, δ est compris entre 0 et 0,15051...; s'il est naturel, δ est compris entre 0 et 0,34657...

Rappelons que lorsque P et Q sont des mêmes signes, la somme $P + Q$ coïncide avec la valeur absolue du coefficient de i de l'expression $(1 + i)\Sigma u_k$, et que, si P et Q sont des signes contraires, cette somme coïncide avec la valeur absolue de la partie réelle de la même expression, comme il résulte de la formule

$$(1 + i)\Sigma u_k = (P - Q) + i(P + Q) .$$

II. — Ce qui précède n'assujettit les qualités u_k à aucune restriction. Supposons maintenant que toutes leurs parties réelles a_k aient un même signe, aussi que tous les coefficients b_k de i, les deux signes pouvant d'ailleurs être quelconques.

En désignant par α_k la valeur absolue de a_k et par β_k la valeur absolue de b_k on aura

$$\bmod u_k = \bmod (\alpha_k + i\beta_k)$$

et par suite, en vertu de ce qui précède

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(\alpha_k + \beta_k) \leqq \bmod u_k \leqq \alpha_k + \beta_k .$$

Faisons $k = 1, 2, 3, \ldots$ et ajoutons membre à membre les équations ainsi obtenues. En remarquant que les a_k étant tous de même signe, ainsi que les b_k, on aura

$$\Sigma\alpha_k = \text{val. abs. de } \Sigma a_k = P , \qquad \Sigma\beta_k = \text{val. abs. de } \Sigma b_k = Q ;$$

on obtient ainsi

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(P + Q) \leqq \Sigma \bmod u_k \leqq P + Q ,$$

ou encore

$$\Sigma \bmod u_k = \lambda (P + Q) , \qquad (1)$$

avec

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \lambda \leqq 1 .$$

Le facteur λ atteindra sa valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$ limite lorsqu'on a à la fois

$$a_1 = b_1 \qquad a_2 = b_2 \qquad a_3 = b_3 , \ldots$$

et la limite 1 lorsque dans chaque paire de quantités (a_k, b_k) l'une ou l'autre d'elles est nulle.

En comparant l'équation (1) avec l'équation

$$\bmod \Sigma u_k = \theta (P + Q) , \qquad \frac{1}{\sqrt{2}} \leqq \theta \leqq 1$$

résultant de ce qui précède, on tire

$$\bmod \Sigma u_k = \frac{\theta}{\lambda} \Sigma \bmod u_k .$$

Le rapport $\frac{\theta}{\lambda}$ atteindra sa plus petite valeur possible lorsqu'on a à la fois $\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $\lambda = 1$; pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit qu'on ait $P = Q$ et que, de plus, dans chaque paire de quantités (a_k, b_k) l'une ou l'autre soit nulle. Le rapport $\frac{\theta}{\lambda}$ a alors la valeur $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

La plus grande valeur du même rapport est d'ailleurs manifestement 1, car on a toujours

$$\bmod \Sigma u_k \leqq \Sigma \bmod u_k ;$$

cette limite 1 est effectivement atteinte lorsque ou bien tous les a_k à la fois, ou bien tous les b_k à la fois sont nuls (et l'on a alors à la fois $\theta = 1$, $\lambda = 1$).

On arrive ainsi à la proposition suivante :

Lorsque dans une somme Σu_k *les parties réelles des* u_k *sont d'un même signe et qu'en même temps les coefficients de* i *dans les* u_k *ont tous un même signe, on a*

$$\text{mod}\, \Sigma u_k = \mu \Sigma \,\text{mod}\, u_k$$

où μ *est un facteur dont la valeur est comprise entre* $\frac{1}{\sqrt{2}}$ *et* 1.

La limite $\mu = \frac{1}{\sqrt{2}}$ est effectivement atteinte lorsque chacun des termes u_k est réel ou purement imaginaire, et que, de plus, la somme de termes u_k réels et la somme de coefficients de i des u_k purement imaginaires sont égales en valeurs absolues. La limite $\mu = 1$ est atteinte lorsque les termes u_k sont à la fois *tous* réels ou bien *tous* purement imaginaires.

Remarquons que dans le cas considéré (les a_k et les b_k des mêmes signes respectifs) *la différence entre le logarithme du module d'une somme et le logarithme de la somme de modules est toujours négative et plus petite en valeur absolue que* $\frac{1}{2} \log 2$.

Genève, janvier 1917.

UNE QUESTION DE CAYLEY
RELATIVE AU PROBLÈME DES TRIADES DE STEINER

PAR

Severin Bays (Fribourg).

---

1. — Le problème des *triples* ou *triades* de Steiner est bien connu :

Pour quel nombre d'éléments N *peut-on trouver un système de triples (combinaisons 3 à 3) contenant* UNE FOIS *et* UNE SEULE FOIS *chaque couple de ces éléments ? Pour un* N *donné, combien y a-t-il de systèmes* DIFFÉRENTS, *c'est-à-dire de systèmes ne pouvant provenir l'un de l'autre par une permutation quelconque des* N *éléments ?*

On trouve immédiatement que les formes nécessaires pour N sont $6n+1$ et $6n+3$. Reiss, Moore, Fitting ont établi[1] que ces deux formes sont suffisantes, c'est-à-dire qu'il existe des systèmes de triples pour chaque N de la forme $6n+1$ ou $6n+3$. Netto, Heffter, White, et d'autres ont donné[2] des constructions particulières, et les groupes de substitutions de nombre de ces systèmes ; mais le problème général de la détermination du nombre de systèmes différents pour chaque $N=6n+1$ ou $6n+3$ est encore à l'heure actuelle loin d'être résolu.

A part le cas trivial $N=3$, où le système est formé d'un seul triple 123, les deux cas immédiats sont $N=7$ et $N=9$. Le nombre des triples du système pour contenir une fois exactement chaque couple doit être $\frac{N(N-1)}{6}$; un élément quelconque pour être ac-

---

[1] Reiss. *Journal f. Mathem.*, 56 (1859) p. 326. — Moore. *Mathem. Ann.*, 43 (1893), p. 271. Fitting. *Nieuw Archief. voor wiskunde Mitgegwen door. het Wiskundig Genootschap te Amsterdam* (2), 9 (1911), p. 359.

[2] Netto. *Lehrbuch der Combinatorik*, 1901, p. 202. — Heffter. *Mathem. Ann.*, 49 (1897), p. 101. — White. *Transactions of the American Mathem. Society*, vol. 14 (1), 1913, p. 7; vol. 16 (1), 1915, p. 13. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, vol. 1 (1-8), 1915. — L.-D. Cummings. *Transactions of the American Math. Society*, vol. 15 (3), 1914, p. 311.

couplé à chacun des N — 1 autres éléments, doit entrer dans $\frac{N-1}{2}$ triples, et les trois éléments d'un même triple ne doivent plus se retrouver ensemble. Pour les sept éléments 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, on voit ainsi que les seuls systèmes possibles commençant par le triple 123, sont les six suivants :

123	145	167	246	257	347	356
123	145	167	247	256	346	357
123	146	157	247	256	345	367
123	146	157	245	267	347	356
123	147	156	245	267	346	357
123	147	156	246	257	345	367

De la même manière on construit les seuls six systèmes possibles commençant par le triple 124 ; ils viennent d'ailleurs des précédents en permutant les éléments 3 et 4 :

124	135	167	236	257	437	456
124	135	167	237	256	436	457
124	136	157	237	256	435	467
124	136	157	235	267	437	456
124	137	156	235	267	436	457
124	137	156	236	257	435	467

Les systèmes de triples de sept éléments ne peuvent commencer que par les triples 123, 124, 125, 126, 127 ; ce qui donne uniquement 30 systèmes possibles, provenant d'ailleurs tous les uns des autres par des permutations d'éléments, par conséquent un *seul* système avec un groupe de substitutions qui le transforme en lui-même d'ordre $\frac{7!}{30} = 168$.

2. — Dans ses *Mathematical Papers I* (page 481, 1850), Cayley, à qui Jacob Steiner a dû poser le problème avant d'en donner l'énoncé général deux ans plus tard dans le *Journal of Math.* (1853, p. 181), fait d'abord la remarque qu'il est impossible de répartir les 35 triples de sept éléments en cinq systèmes de Steiner. En effet, dans les douze systèmes plus haut, on en trouve aisément deux différents par tous leurs triples, mais dans chaque cas il est déjà impossible d'en trouver un troisième commençant par 125 et n'ayant aucun triple commun avec ces deux premiers [1]. Puis Cayley revient à la même question à la fin de son article et donne pour 15 éléments une démonstration simple et intéressante,

[1] Netto, *Combinatorik*. p. 228.

surtout par l'idée avec laquelle il conclut; je me permets de rapporter cette démonstration avec ses propres termes:

« Supposons que les 455 triades de 15 lettres puissent être disposées en 13 systèmes de 35 triades chacun, contenant chacun chaque dyade possible; il paraît naturel de se demander si ces 13 systèmes ne peuvent pas s'obtenir de l'un quelconque d'entre eux par une permutation cyclique de 13 de ces lettres. Je pense que cela est impossible. Soient $a, b, c, \ldots, l, m$, les 13 lettres soumises à la permutation cyclique. Considérons à part les triades qui contiennent l'une ou l'autre des deux dernières lettres n et o qui restent inchangées; aucune de ces triades ne contient la lettre, quelle qu'elle soit, qui forme une triade avec la dyade no. En y barrant ces lettres n et o, il reste ainsi dans chaque système deux séries de 6 dyades chacune et composées des mêmes 12 lettres. Et chacune de ces deux séries de dyades doit, par la transformation cyclique en question, reproduire le système complet des 78 dyades de 13 lettres. Si on arrange les dyades de 13 lettres de la manière suivante :

ab	*bc*	*cd*	*de*	*ef*	*fg*	*gh*	*hi*	*ij*	*jk*	*kl*	*lm*	*ma*
ac	*bd*	*ce*	*df*	*eg*	*fh*	*gi*	*hj*	*ik*	*jl*	*km*	*la*	*mb*
ad	*be*	*cf*	*dg*	*eh*	*fi*	*gj*	*hk*	*il*	*jm*	*ka*	*lb*	*mc*
ae	*bf*	*cg*	*dh*	*ei*	*f*	*gk*	*hl*	*im*	*ja*	*kb*	*lc*	*md*
af	*bg*	*ch*	*di*	*ej*	*fk*	*gl*	*hm*	*ia*	*jb*	*kc*	*ld*	*me*
ag	*bh*	*ci*	*dj*	*ek*	*fl*	*gm*	*ha*	*ib*	*jc*	*kd*	*le*	*mf*,

il résulte que les 6 dyades de chaque série doivent être situées une dyade dans chaque ligne. Supposons les deux séries de dyades formées des 12 lettres $a, b, c, \ldots\ldots, l$; on ne trouve point dans l'arrangement écrit d'autre série de 6 dyades de ces 12 lettres, ayant une dyade dans chaque ligne, que la seule suivante : *al, bk, cj, di, eh, fg;* et comme il en est de même pour toute autre combinaison de 12 lettres tirées des 13 lettres $a, b, c, \ldots l, m$, la dérivation des 13 systèmes de 35 triades au moyen d'une permutation cyclique de 13 lettres, est impossible. »

« Et il ne paraît pas y avoir aucune règle pour faire dériver les 13 systèmes de l'un d'eux; il n'y a même pas de raisons pour croire que les 13 systèmes existent réellement, car on a déjà démontré que de tels systèmes n'existent pas pour le cas de 7 éléments. »

3. — Cependant déjà pour 9 éléments, la question de Cayley, impossible pour 7 éléments, a une solution affirmative et même deux solutions différentes. Avant de donner ces solutions, la propriété suivante nous fournit d'une manière simple et nouvelle tout ce qu'il est nécessaire de rappeler sur le système de Steiner de

9 éléments[1] et permet surtout d'obtenir immédiatement des solutions à la question de Cayley[2].

Théorème. — *Si le triple* abc *n'entre pas dans un système de Steiner de 9 éléments, le triple* $\alpha\ \beta\ \gamma$ *des trois éléments associés dans le système aux couples* bc, ac, ab :

$$bc\alpha,\quad ca\beta,\quad ab\gamma$$

n'y entre pas non plus. En effet, dans le cas contraire le système comprend déjà les 4 triples $bc\alpha$, $ca\beta$, $ab\gamma$, $\alpha\beta\gamma$, et n'en garde plus que 8 disponibles. Les 3 éléments restants α', β', γ' doivent entrer chacun dans 4 triples ; ou bien ils forment le triple $\alpha'\beta'\gamma'$, et alors ils ne peuvent plus entrer ensemble et il faudrait encore $3 \times 3 = 9$ triples disponibles en plus du triple $\alpha'\beta'\gamma'$; ou bien ils forment les 3 couples $\beta'\gamma'$, $\gamma'\alpha'$, $\alpha'\beta'$, et alors chacun doit encore entrer 2 fois séparément, et il faudrait encore $3 \times 2 = 6$ triples disponibles, ce qui n'est pas non plus. Le triple $\alpha\beta\gamma$ n'est donc pas un triple du système ; par la même raison le triple $\alpha'\beta'\gamma'$ des 3 éléments associés aux couples $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$, $\alpha\beta$, ne le sera pas non plus. On voit ainsi que le système de Steiner est complètement déterminé par l'arrangement $\alpha\ \beta\ \gamma$ pris dans les 6 éléments restant après a, b, c, et la permutation $\alpha'\beta'\gamma'$ des 3 derniers éléments et qu'il ne peut avoir que la forme suivante :

$$\begin{array}{lll} bc.\alpha & ca.\beta & ab.\gamma \\ \beta\gamma.\alpha' & \gamma\alpha.\beta' & \alpha\beta.\gamma' \\ \beta'\gamma'.a & \gamma'\alpha'.b & \alpha'\beta'.c \\ a\alpha\alpha' & b\beta\beta' & c\gamma\gamma' \end{array} \qquad \mathrm{S}$$

La place des a, b, c dans la troisième ligne est en effet déterminée par l'arrangement $\alpha\ \beta\ \gamma$ et la permutation $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$; α, β, γ ne

---

[1] Netto, *Combinatorik*, p. 219 et 230.

[2] Je n'ai pu trouver aucune allusion à cette question de Cayley dans les travaux parus jusqu'ici sur le problème des triades de Steiner. Netto est le seul, dans sa *Combinatorik*, p. 228, à rappeler cette question ; il ne parle d'ailleurs que du cas de 7 éléments pour montrer que dans ce cas la question est insoluble. Je croyais être le premier à avoir obtenu une solution pour 9 éléments, lorsque j'ai trouvé dans les *Récréations mathématiques* de Lucas, t. II, 1883, p. 193, un problème de M. Walecki qui établit précisément une solution pareille. M. Walecki représente un système de Steiner de 9 éléments par le schéma :

$$\left|\begin{array}{ccc} \mathrm{P} & a & b \\ c & d & \mathrm{Q} \\ e & f & g \end{array}\right|$$

où les triples sont formés par les six lignes et colonnes, et les 6 diagonales complétées en écrivant une seconde fois le schéma à côté du premier ; et en permutant cycliquement (*abcdefg*), il montre qu'il obtient ainsi les 84 triples des 9 éléments répartis en 7 tableaux, tels que l'on rencontre dans chaque tableau chacune des 9 lettres une fois et une seule fois avec les 8 autres. M. Walecki se borne d'ailleurs à établir cette répartition et ne fait aucune allusion à la question de Cayley.

peuvent entrer dans la troisième ligne ; la première et la deuxième ligne montrent que α n'est plus à lier qu'avec a et α', β avec b et β', γ avec c et γ'. Il nous faut donc encore les triples $a\alpha\alpha'$, $b\beta\beta'$, $c\gamma\gamma'$, qui exigent que la troisième ligne laisse disponibles les couples $a\alpha'$, $b\beta'$, $c\gamma'$, et qu'elle soit donc $\beta'\gamma'a$, $\gamma'\alpha'b$, $\alpha'\beta'c$.

Le nombre des systèmes de 9 éléments dans lesquels n'entre pas le triple abc est ainsi, puisque $\alpha\ \beta\ \gamma$ peut être tous les arrangements de 6 éléments 3 à 3 et chaque fois $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$ toutes les permutations de 3 éléments :

$$n = 6 \,.\, 5 \,.\, 4 \,.\, 6 = 720 \text{ systèmes}$$

Les 720 systèmes contiennent les triples abd, abe, ... abi ; le triple abc appartient donc aussi à 120 systèmes pareils et le nombre total des systèmes de 9 éléments est $720 + 120 = 840$ systèmes. D'autre part, par la manière même de les construire, tous ces systèmes proviennent les uns des autres par des permutations d'éléments ; ils ne représentent donc *qu'un seul* système de Steiner de 9 éléments avec un groupe de substitutions qui le transforme en lui-même d'ordre $\frac{9!}{840} = 432$.

Avec cela le système S peut s'écrire relativement au triple abc, d'une manière symbolique mais très courte, et qui le détermine complètement :

$$\alpha\ \beta\ \gamma\ :\ \alpha'\ \beta'\ \gamma'$$

et sous cette forme ce n'est plus qu'un jeu d'écrire maintenant 6 systèmes pareils ne contenant pas le triple abc et différents entre eux par tous les triples. Ainsi par exemple les 6 systèmes :

$\alpha\ \beta\ \gamma$	.	$\alpha'\ \beta'\ \gamma'$		$\alpha\ \beta\ \gamma$	. $\alpha'\ \beta'\ \gamma'$
$\beta\ \gamma\ \alpha$	.	$\gamma'\ \alpha'\ \beta'$		$\beta\ \gamma\ \alpha$	. $\gamma'\ \alpha'\ \beta'$
$\gamma\ \alpha\ \beta$	.	$\beta'\ \gamma'\ \alpha'$		$\gamma\ \alpha\ \beta$	. $\beta'\ \gamma'\ \alpha'$
$\alpha'\ \beta'\ \gamma'$	.	$\beta\ \gamma\ \alpha$	ou cette variante	$\alpha'\ \beta'\ \gamma'$	. $\gamma\ \alpha\ \beta$
$\beta'\ \gamma'\ \alpha'$	.	$\alpha\ \beta\ \gamma$		$\beta'\ \gamma'\ \alpha'$	. $\beta\ \gamma\ \alpha$
$\gamma'\ \alpha'\ \beta'$	.	$\gamma\ \alpha\ \beta$		$\gamma'\ \alpha'\ \beta'$	. $\alpha\ \beta\ \gamma$

Les six systèmes absorbent ainsi 72 triples, contenant chaque couple exactement 6 fois ; les 12 triples restants doivent encore contenir une fois chaque couple, et forment aussi d'eux-mêmes un système de Steiner. On a ainsi autant de solutions à la question de Cayley : Répartir les 84 triples de 9 éléments en 7 systèmes de 12 triples, chaque système contenant une fois chaque couple.

4. — Reprenons les éléments 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Une première solution à la question de Cayley est :

123	147	158	169	248	259	267	349	357	368	456	789
124	136	157	189	239	256	278	347	358	468	459	679
125	137	149	168	238	246	279	345	369	478	567	589
126	139	145	178	235	247	289	348	367	469	568	579 (1)
127	138	146	159	234	258	269	379	356	457	489	678
128	134	156	179	236	249	257	359	378	458	467	689
129	135	148	167	237	245	268	346	389	479	569	578

Par commodité désignons chaque système par son premier triple. Les 3 couples d'un même triple du système 123 sont séparés dans les 6 autres systèmes, et les 3 éléments qui leur sont associés dans chaque système constituent un triple. Ecrivons au-dessous de chaque triple du système 123 les 6 triples qui ainsi lui correspondent, mais en les plaçant chacun dans la ligne du système de Steiner auquel il appartient. On obtient le tableau suivant :

3	*123*	*147*	*178*	*169*	*248*	*259*	*267*	*349*	*357*	*368*	*456*	*789*
4	468	256	239-347			347	459-189	278		157	189-239	136
5	478	369	246			168	589-345	168-125		279	137	125-345
6	469-579	235		348	367	178			469-289	145	289-178	126
7		258	379-269	234	379-159	146	138	678	146-269	457		
8		689	467	378-257	359-156	378	134	257-156	128	249		
9	578-569	389		245-578	167	346			148	129	237	245-346

Une substitution quelconque du groupe symétrique des 9 éléments transforme le système total I en système I′ équivalent, le système 123 en un système 12.x équivalent, et ce tableau, dont la construction naturellement subsiste telle quelle, en le tableau équivalent correspondant au système 12.x dans le système I′. Une substitution qui transforme à la fois le système I en lui-même et

le système 123 en lui-même, doit transformer *le tableau en lui-même*, une ligne horizontale en une ligne horizontale, une colonne verticale en une colonne verticale. Ces dernières substitutions forment évidemment un groupe ; c'est ce groupe que nous voulons obtenir.

Les colonnes 147, 259, 368, qui doivent permuter entre elles, n'ont pas la même constitution :

Dans les colonnes :	*147*	*259*	*368*
les couples entrent :	25 3 fois	34	29 3 fois
	39, 69, 89 } 2 fois	37, 16, 18 } 2 fois	15, 45, 75 } 2 fois
	et 9 autres couples 1 fois chacun.	78, 46	et 9 autres couples 1 fois chacun.
		et 6 autres couples 1 fois chacun.	

Ainsi l'élément 2 peut seulement devenir 2, 5, ou 9. Pour $2 = 2$ on a les cas :

$2 = 2 \quad 5 = 5 \quad 9 = 9$	$2 = 2 \quad 5 = 9 \quad 9 = 5$
1 peut devenir 1, 4, 7	1 peut devenir 3, 6, 8

Dans chaque cas les couples associés dans le système 123

à 2)	13	48	67	perm.	entre	eux	13	48	67	perm.	entre eux.
à 5)	18	37	46	»	»	»	18	37	46	une ligne permu-	
à 9)	16	34	78	»	»	»	16	34	78	te avec l'autre.	

On obtient immédiatement les 6 premières puissances de la substitution :

$$s = (59)(164378)$$

Les cas $2 = 5$ et $2 = 9$ ne donnent rien ; le sous-groupe cherché est donc le groupe $\{s\}$[1] d'ordre 6. En prenant ensuite avec le tableau du système 123 le même tableau correspondant au système 124, on trouve la substitution :

$$\sigma = (1673824)$$

qui transforme le système I en lui-même en changeant le système 123 dans le système 124, et dont les 5 autres puissances

---

Notation de Netto, Gruppen u. Substitutionentheorie, 1904, p. 34.

différentes de l'identité changent le système 123 en les 5 autres systèmes 125,..., 129. Le groupe total qui transforme la solution I en elle-même est donc le groupe $\{s, \sigma\}$ d'ordre 42.

5. — Une seconde solution à la question de Cayley est la suivante :

123	147	158	169	248	259	267	349	357	368	456	789	
124	139	157	168	236	258	279	345	378	467	489	569	
125	136	149	178	237	246	289	348	359	457	568	679	
126	137	148	159	239	245	278	346	358	479	567	689	(II)
127	135	146	189	238	249	256	347	369	458	579	678	
128	134	156	179	235	247	269	367	389	459	468	578	
129	138	145	167	234	257	268	356	379	469	478	589	

En effet le tableau correspondant au système 123 (je donne les systèmes I et II représentant les deux solutions avec le même système 123) dénote à première vue un groupe d'ordre plus élevé :

	123	*147*	*169*	*248*	*259*	*357*	*368*	*456*	*789*
4	489	236	258	157	467	168	279	139	345
5	679	568	348	359	178	149	125	237	246
6	567	239	358	159	346	148	479	278	126
7	458	256	347	369	678	249	127	189	135
8	578	389	247	367	134	269	459	128	156
9	469	589	257	167	138	268	145	379	234

158	267	349	
267 349	349 158	158 267	appart. au système 123.

Mais ici le système 123 est le seul dont le tableau ait cette forme. Le tableau pour les six autres systèmes prend une forme

différente, et il n'y a ainsi aucune substitution qui transforme la solution II en elle-même en changeant le système 123 en un autre. Dans ce tableau du système 123, les colonnes 158, 267, 349, doivent permuter entre elles ; il ne reste qu'à prendre successivement $1 = 1, 5, 8, 2, 6, 7, 3, 4, 9$. Ainsi pour $1 = 1$ on a les deux possibilités :

$$1 = 1 \quad 5 = 5 \quad 8 = 8 \qquad 1 = 1 \quad 5 = 8 \quad 8 = 5$$

Les couples associés à ces éléments dans le système 123 :

23	47	69	permutent	entre	eux.	23	47	69	permutent	entre	eux.
29	37	46	»	»	»	29	37	46	une ligne permute avec		
24	36	79	»	»	»	24	36	79	l'autre.		

et par un essai sur le tableau on contrôle si la substitution obtenue est à prendre ou à rejeter. On trouve 54 substitutions ; c'est-à-dire la moitié des substitutions qui transforment le système 123 en lui-même en permutant les triples 158, 267, 349, entre eux, transforment le tableau en lui-même. 34 de ces substitutions sont les puissances de substitutions de la forme :

$$s = (58)\,(246379)$$

et les 20 autres sont de la forme :

$$\alpha = (158)\,(267)\,349)\,,\quad \beta = (123)\,(456)\,(798),\ \text{etc.}$$

Les substitutions α et β sont permutables et donnent un groupe G d'ordre 9. La substitution s est permutable avec ce groupe G et la plus petite puissance de s égale à une substitution de G est $s^6 = 1$. Le groupe qui transforme le système II en lui-même est donc *le groupe* $\{\alpha, \beta, s\}$ *d'ordre 54.*

On arrive plus vite au résultat avec le tableau du système 124 ; il donne immédiatement un sous-groupe d'ordre 9 de la forme de G, et le groupe cherché est ainsi d'ordre $6 \times 9 = 54$.

Les deux solutions données représentent ainsi $\frac{9\,!}{42} + \frac{9\,!}{54} = 15360$ répartitions possibles des 84 triples de 9 éléments en 7 systèmes de Steiner. Or, le travail n'est pas démesurément long, si on écrit les 840 systèmes de 9 éléments, on trouve que pour l'un des systèmes 123, par exemple pour le système :

123 147 158 169 248 259 267 349 357 368 456 789

il y a 32 systèmes 124 qui en diffèrent par tous les triples, et que chacun de ces systèmes 124 accouplé au système 123 donne, avec les systèmes 125, ..., 129, n'ayant aucun triple commun avec eux,

exactement 4 solutions cherchées; ce qui fait $32 \times 4 \times 120 = 15360$ solutions. Les systèmes I et II donnés sont donc les seules solutions *différentes* à la question de Cayley pour 9 éléments.

6. — Supposons que les $\nu(\nu-1)(\nu-2)/6$ triples de ν éléments $1, 2, \ldots \nu$ soient répartis en $\nu-2$ systèmes de Steiner Δ_ν. Il y a un procédé donné par Reiss et généralisé depuis pour construire un système de triples $\Delta_{2\nu+1}$ au moyen d'un système de triples Δ_ν. On prend comme première partie du système $\Delta_{2\nu+1}$ le système donné Δ_ν; on répartit les $(\nu+1)\nu/2$ couples des $\nu+1$ nouveaux éléments en ν colonnes de $(\nu+1)/2$ couples, mais de telle sorte que chaque colonne contienne les $\nu+1$ éléments, et on écrit respectivement devant les couples de chaque colonne les anciens éléments $1, 2, 3, \ldots \nu$. On se rend compte immédiatement que l'ensemble des :

$$\frac{\nu(\nu-1)}{6} + \frac{(\nu+1)\nu}{2} = \frac{(2\nu+1)2\nu}{6}$$

triples ainsi obtenus contient en effet chaque couple des $2\nu+1$ éléments en question. Reiss fait la répartition des $(\nu+1)\nu/2$ couples des nouveaux éléments de la manière suivante; pour fixer les idées nous prenons le cas des 19 éléments $1, 2, \ldots, 9; 0, 1', 2', \ldots, 9'$; il est facile de comprendre cette disposition des 45 couples des éléments $0, 1', 2', \ldots, 9'$, et de l'appliquer au cas général :

0 1′	0 2′	0 3′	0 4′	0 5′	0 6′	0 7′	0 8′	0 9′	
2′8′	1′9′	1′2′	1′3′	1′4′	1′5′	1′6′	1′7′	1′8′	
3′7′	3′8′	4′8′	2′9′	2′3′	2′4′	2′5′	2′6′	2′7′	(A)
4′6′	4′7′	5′7′	5′8′	6′8′	3′9′	3′4′	3′5′	3′6′	
5′9′	5′6′	6′9′	6′7′	7′9′	7′8′	8′9′	4′9′	4′5′	

Nous écrivons une première fois devant les couples de chaque colonne celui des éléments $1, 2, \ldots, \nu$ correspondant au rang de la colonne; puis nous permutons cycliquement les éléments $1, 2, \ldots \nu$, jusqu'à ce que chacun ait été placé devant chaque colonne; les ν ensembles de $(\nu+1)\nu/2$ triples ainsi obtenus n'auront nulle part 2 triples communs. Si nous complétons $\nu-2$ de ces ensembles par les Δ_ν donnés au début, nous aurons ainsi $\nu-2$ systèmes de Steiner $\Delta_{2\nu+1}$ différents par tous les triples. En formant ensuite le tableau précédent avec les éléments $0, 1, 2, \ldots \nu = 9$, et plaçant devant les colonnes les éléments $1', 2', 3', \ldots, \nu'$, avec les $\nu-2$ systèmes Δ_ν' pareils aux systèmes Δ_ν nous aurons de même $\nu-2$ systèmes $\Delta_{2\nu+1}$ différents par tous les triples. Il est facile de voir maintenant qu'avec les $\nu-2$ premiers systèmes $\Delta_{2\nu+1}$ trouvés, il est possible d'en associer exactement 2 des der-

niers obtenus (à moins que $\nu - 2 = 1$, c'est-à-dire $\nu = 3$ et $2\nu + 1 = 7$, et c'est la seule exception[1]) sans avoir encore un seul triple commun, et réciproquement. Ainsi pour 19 éléments, en écrivant seulement, pour la seconde partie de chaque système, le premier triple de chaque colonne :

1 01′	2 02′	3 03′	4 04′	5 05′	6 06′	7 07′	8 08′	9 09′
2 01′	3 02′	4 03′	5 04′	6 05′	7 06′	8 07′	9 08′	1 09′
3 01′	4 02′	5 03′	6 04′	7 05′	8 06′	9 07′	1 08′	2 09′
4 01′	5 02′	6 03′	7 04′	8 05′	9 06′	1 07′	2 08′	3 09′
5 01′	6 02′	7 03′	8 04′	9 05′	1 06′	2 07′	3 08′	4 09′
6 01′	7 02′	8 03′	9 04′	1 05′	2 06′	3 07′	4 08′	5 09′
7 01′	8 02′	9 03′	1 04′	2 05′	3 06′	4 07′	5 08′	6 09′
2′01	3′02	4′03	5′04	6′05	7′06	8′07	9′08	1′09
3′01	4′02	5′03	6′04	7′05	8′06	9′07	1′08	2′09

Les deux derniers systèmes terminent exactement la permutation cyclique de manière qu'il y a là tous les triples possibles avec l'élément 0, un élément simple et un élément prime ; dans les 7 premiers systèmes les autres triples de chaque colonne contiennent 2 éléments primes, dans les deux derniers les mêmes triples contiennent 2 éléments simples. Nous obtenons ainsi $9 = \nu$ systèmes de Steiner de $2\nu + 1$ éléments *différents par tous les triples* ; il est d'ailleurs impossible par le même procédé, même en modifiant le tableau A, d'en obtenir davantage. Si les $\nu - 2$ systèmes Δ_ν existent pour ν éléments, pour $2\nu + 1$ éléments, il existe donc en tout cas ν systèmes de Steiner n'ayant aucun triple commun, c'est-à-dire un nombre supérieur à la moitié du nombre $(2\nu + 1) - 2 = 2\nu - 1$. Probablement la construction correspondante de Reiss ou une autre donnerait, au moyen toujours des $\nu - 2$ systèmes Δ_ν, un résultat pareil pour $2\nu - 5$ éléments ; pour 13 éléments j'ai obtenu 7 systèmes sur 11, pour 15 éléments 8 systèmes sur 13 et pour 31 éléments 16 systèmes sur 29 différents par tous les triples. Presque certainement il existe donc pour chaque $N = 6n + 1$ ou $6n + 3$, en tout cas un nombre de systèmes différents par tous les triples supérieur à la demie du nombre $N - 2$, *excepté pour 7 éléments*, et cela me paraît une raison de croire que 7 éléments est le seul cas pour lequel la question de Cayley manque de solution.

Fribourg (Suisse), septembre 1916.

---

[1] Pour $\nu = 3$ la répartition en $\nu - 2$ systèmes Δ_3 existe, puisqu'elle se réduit au seul triple 123, mais précisément parce qu'elle se réduit à *un* système Δ_3, avec les dispositions :

123	0 1′	0 2′	0 3′	1′2′3′	01	02	03
	2′3′	1′3′	1′2′		23	13	12

on ne peut former que deux systèmes Δ_7 n'ayant aucun triple commun, et non trois.

DU ROLE QUE PEUT JOUER L'ENSEIGNEMENT DES MATHÉMATIQUES DANS L'ÉDUCATION INTELLECTUELLE DES ÉCOLIERS[1]

PAR

H. Roorda v. E. (Lausanne).

Une commission composée de vingt professeurs de l'Ecole polytechnique fédérale a présenté, il y a quelques mois, au Conseil supérieur de cette Ecole, un rapport que vous avez sans doute lu et dans lequel elle devait indiquer quelques moyens propres à améliorer la *culture générale* et *l'éducation nationale* des étudiants suisses, de ceux, en particulier, qui font des études scientifiques.

Dans une de leurs conclusions, les signataires de ce rapport proposent « d'alléger les programmes des écoles moyennes par réduction de la part réservée aux *sciences exactes spéciales* au profit de la langue maternelle, des langues nationales, de l'histoire et de la géographie. »

La Commission propose aussi de prendre en considération la pétition de la Société suisse des Maîtres de géographie « tendant au renforcement de l'enseignement de la géographie ; et de joindre dans ce but la géographie à l'histoire comme matière d'examen pour l'admission à l'Ecole polytechnique fédérale ».

Il est dit, enfin, que les mathématiques et les sciences naturelles absorbent le temps des élèves de nos écoles secondaires scientifiques au point de leur faire négliger leur culture générale.

C'est ce rapport, Messieurs (que je n'ai pas la prétention de résumer), qui a suggéré à l'un des membres de votre Comité l'idée de vous proposer aujourd'hui, comme sujet de discussion, *le rôle que peut jouer l'enseignement des mathématiques dans la formation de l'esprit de l'écolier.*

Avant d'aborder cette question, je suis obligé de rappeler l'un des caractères essentiels de nos écoles secondaires et, surtout, de

---

[1] Rapport présenté le 8 octobre 1916, à Baden, à la réunion annuelle de la Société suisse des professeurs de mathématiques.

préciser le sens de cette expression si fréquemment employée : *la culture générale.*

Bien que les écoles secondaires s'offrent à un public plus restreint que les écoles primaires, les maîtres qui y enseignent s'adressent à des élèves devant exercer par la suite les professions les plus diverses. Par exemple, dans les gymnases classiques, en dépit des triages antérieurs, les mêmes leçons se donnent à de futurs médecins, à de futurs pasteurs, à de futurs avocats, à de futurs ingénieurs, à de futurs pédagogues, à de futurs chimistes ; et ma liste n'est pas complète. Il faut donc que l'enseignement ait une valeur très générale si l'on veut que tous ceux qui le reçoivent puissent en retirer un réel profit. Il semble qu'on l'a bien compris, puisque c'est une « culture générale » qu'on déclare vouloir donner aux élèves de nos collèges et de nos gymnases.

En quoi consiste cette culture ? Toute la question est là.

J'ai cherché le mot *cultiver* dans mon Larousse, et j'ai trouvé cette définition : *Faire les travaux propres à rendre la terre fertile.*

Par analogie, on peut dire que cultiver un esprit, c'est le soumettre à un régime qui fera fructifier ses richesses naturelles. Et il est possible, en effet, de développer par le moyen d'une gymnastique régulière les aptitudes précieuses que les enfants possèdent tous. Ce qui varie beaucoup de l'un à l'autre c'est la mesure des progrès réalisables.

Les écoliers bénéficieront donc d'une culture générale si, en se livrant aux divers modes d'activité qu'on leur propose, ils augmentent leurs forces physiques, morales et intellectuelles et améliorent ainsi ce que la nature leur a donné de bon.

En réalité, la « culture générale » que l'Ecole s'efforce de donner à tous ses élèves est une culture beaucoup plus superficielle. C'est autre chose. Elle consiste en un ensemble de notions morales, philosophiques, littéraires, historiques et scientifiques qui peuvent être à peu près les mêmes chez des personnes différant très sensiblement les unes des autres par les qualités de l'esprit.

Je sais fort bien, Messieurs, que je me tromperais ridiculement si, entre ces deux manières d'entendre la culture générale, je voulais voir une opposition absolue. Entre ces deux termes extrêmes on peut imaginer des termes intermédiaires. Et puis, il est probable qu'en s'appliquant à orner les esprits on finit par en modifier un peu la qualité. Mais j'ai raison de dire qu'en général, par la force des choses, le maître s'applique davantage à communiquer à ses élèves ses propres connaissances et sa propre habileté qu'à améliorer tout ce qu'il y a de perfectible en eux.

Je ne crois pas m'être écarté de mon sujet en faisant ces remarques préliminaires. Car si nous voulons donner aux écoliers cette culture générale qui résulte à la longue de la gymnastique fortifiante dont j'ai dit deux mots, nous comprendrons que la *manière*

d'enseigner importe plus que la *matière* d'enseignement. Il est certain qu'à propos de ses travaux manuels, par exemple, on peut inculquer à un enfant des idées générales, nettes et justes sur les conditions anciennes ou actuelles de l'activité humaine à la surface du globe. Et, par contre, un maître de latin, d'histoire ou de géographie rendra ses leçons arides, ennuyeuses et inutiles s'il étale indiscrètement son érudition ou s'il ne sait pas choisir les faits significatifs et intéressants.

Jugées du point de vue où je me place, les meilleures leçons sont celles où l'élève est vivement intéressé, celles où son esprit est *actif*. Or, me semble-t-il, nous devons nous placer à ce point de vue-là. En effet, notre responsabilité vis-à-vis de l'enfant est grande ; car l'école le prive de sa liberté durant des années et, cela, certains jours, du matin jusqu'au soir. Nous devons donc lui fournir l'occasion d'accroître par l'exercice ses aptitudes naturelles. En ne le faisant pas, nous nous exposons à lui prendre plus que nous ne lui donnons. Eh bien, puisqu'il s'agit avant tout de former son jugement et de discipliner sa logique, d'accroître sa vigueur intellectuelle et d'affiner son esprit, nous ne pouvons pas faire des branches d'enseignement deux catégories : celles qui donnent à l'élève studieux une *culture générale* et celles qui n'ont pas cette vertu. La distinction que certains maîtres se hâtent de faire à leur profit entre les unes et les autres n'est pas fondée. N'est-il pas évident, par exemple, que l'on pourra dire autant de bien, à tous les points de vue, des sciences naturelles que de la géographie ?

De tout cela il résulte que les mathématiques dont je vais parler tout à l'heure, auront ou n'auront pas une valeur éducative générale, qu'elles seront fortifiantes pour l'intelligence de l'écolier ou qu'elles ne le seront pas, suivant qu'on les enseignera de telle manière ou de telle autre.

Mais voici, d'autre part, une raison qui doit nous empêcher d'accorder à toutes les matières d'enseignement des places également importantes dans les programmes scolaires.

Il y a des enseignements qui, avant tout, ont pour but de développer chez l'écolier une certaine *habileté*. Par exemple, on voudra qu'il devienne habile dans l'emploi de sa langue maternelle, ou dans le maniement d'une langue étrangère. De même, il reçoit des leçons où l'on s'applique à faire de lui un habile calculateur, un habile dessinateur ou un habile gymnaste. Cette habileté ne s'acquiert qu'à la longue, grâce à un entraînement régulier. Il importe donc que ces leçons où, à défaut de virtuosité, l'élève doit acquérir de l'aisance et de l'adresse soient fréquentes. Il vaudrait même mieux qu'elles fussent quotidiennes et de courte durée que longues et espacées.

Il y a, d'autre part, des leçons dont on ne peut pas dire tout à

fait la même chose. Si, par exemple, on enseigne l'histoire aux enfants ce n'est pas pour qu'à seize ans les plus studieux d'entre eux soient d'habiles historiens. A seize ans, on ne sait pas encore ce qu'est la vie d'un homme; on ne sait pas, par expérience, ce qui rend difficile la lutte pour l'existence; et l'on ne peut porter sur la conduite des peuples ou des individus que des jugements naïfs. Si son activité intellectuelle ne s'arrête pas, les idées générales qu'un écolier peut avoir en matière d'histoire se transformeront profondément. Par contre, il peut avoir en grammaire ou en mathématiques élémentaires des notions essentielles, justes et *définitives*.

Les leçons d'histoire qu'on donne à nos élèves ne peuvent pas être exclusivement scientifiques. Dans ces leçons, le maître a fréquemment des préoccupations d'ordre moral. Il veut faire réfléchir ses élèves sur la conduite humaine; et, pour cela, il ne craint pas de les émouvoir et de frapper leur imagination.

De même, les maîtres de géographie ne s'efforcent pas seulement d'accroître l'érudition de l'écolier. Ils nous ont dit que leur enseignement peut avoir un caractère moral et philosophique assez accentué pour éclairer et améliorer le civisme des futurs citoyens. Or ce n'est évidemment pas par le moyen des monographies nombreuses et monotones et par les longues listes de noms géographiques qu'ils essaient d'atteindre leur but. Ce sont les faits typiques et saisissants qui font réfléchir. Une seule histoire émouvante qui se fixe d'une manière inoubliable dans la mémoire de l'enfant a plus d'importance pour son développement intellectuel et moral que des centaines de faits qu'il apprend avec résignation. Bref, puisque dans les leçons d'histoire et de géographie, par exemple, il ne s'agit pas d'une technique indispensable à acquérir, c'est la qualité de ces leçons, beaucoup plus que leur grand nombre, qui en fait la valeur et qui les rend efficaces.

Comptant sur votre indulgence, Messieurs, j'ose ajouter un dernier mot à cette introduction, qui est déjà longue mais qui me permettra de parler plus clairement de l'enseignement des mathématiques.

Pour justifier la distinction que je viens de faire entre deux genres de leçons, je pourrais dire aussi que, dans les unes, les lacunes qu'on laisse dans le savoir de l'écolier sont plus graves que dans les autres ; c'est-à-dire que, pour le maître, il importe beaucoup moins dans celles-ci que dans celles-là d'être complet. Il serait bien facile de montrer par des exemples qu'en matière de littérature, d'histoire, de géographie, de sciences naturelles, et de mathématiques aussi, il y a des lacunes qui ne gênent pas les études ultérieures, des lacunes que l'on peut d'ailleurs combler, n'importe quand, en cinq minutes, et dont on a beaucoup exagéré la gravité. Mais, si un jeune homme s'exprime difficilement, ou s'il a une mauvaise orthographe, ou s'il ne sait pas cal-

culer correctement, ou s'il est incapable d'exécuter un croquis tant soit peu exact, ou si la vigueur de ses bras est tout à fait insuffisante, il n'acquerra ces aptitudes qui lui manquent ni en quelques heures, ni en quelques jours.

Les monographies trop nombreuses, les nomenclatures trop complètes, les listes de noms trop longues : voilà ce qui dans l'enseignement exige un temps considérable, temps perdu pour la culture générale de l'écolier.

Et, maintenant, parlons des mathématiques. Je vais en dire beaucoup de bien. Mais il est entendu que je considérerai seulement le cas où elles sont étudiées dans de bonnes conditions ; car le fait est que certains écoliers suivent pendant deux ou trois ans, avec ennui et dégoût, des cours d'algèbre ou de géométrie dont ils ne retirent aucun profit. De plus, nous avons rencontré des adultes qui, en parlant des mathématiques, avouent sans embarras qu'ils n'y ont jamais compris grand'chose. Et ce sont parfois des personnes très intelligentes. Comment concilier ce fait avec la grande simplicité des mathématiques élémentaires, simplicité dont je parlerai tout à l'heure ?

L'illustre mathématicien Blaise Pascal nous a fait sans le vouloir beaucoup de mal le jour où il a opposé l'*esprit géométrique* à l'*esprit de finesse*. Des gens qui ont entendu parler de cette distinction classique s'imaginent qu'ils ont un esprit fin parce qu'ils ne comprennent rien à la géométrie. Cette manière d'interpréter les textes est très critiquable. Ces logiciens audacieux oublient le cas où l'on ne possède ni l'esprit de la géométrie, ni l'autre, — un cas assez fréquent. A vrai dire, un géomètre de talent a nécessairement de la finesse dans l'esprit ; et d'autre part on ne peut pas être un esprit fin, si l'on est réellement incapable de comprendre la géométrie.

Le raisonnement occupe dans la vie de notre esprit une place beaucoup plus grande qu'on ne le croit. En effet, c'est un raisonnement très rapide, dont nous avons à peine conscience, qui précède le plus souvent le jugement que nous portons sur les êtres ou sur les choses. Eh ! bien, les mathématiques habituent à voir clair dans les raisonnements que l'on fait. Quelle que soit la nature des questions que nous abordons, celles-ci diffèrent davantage pour nous par leur degré de complexité que par les facultés de notre esprit qu'elles vont mettre en œuvre ; et ce qui varie aussi, d'un cas à l'autre, c'est le degré de la conviction avec laquelle nous formulons la réponse. A l'ordinaire, en mathématiques, on résout des problèmes où le nombre des données est suffisant et où l'on sait de quelle manière l'inconnue dépend de chaque donnée. Ce cas favorable ne se présente pas souvent dans les questions de la biologie

et presque jamais lorsqu'il s'agit de prévoir la conduite des individus ou des foules. Un homme intelligent, qu'il soit géomètre ou non, sait donc si ce qu'il affirme est certain, ou bien très probable, ou seulement probable, ou possible, ou improbable ; et il comprendra aussi, dans certains cas, qu'il est devant un problème absolument indéterminé.

Voici, d'ailleurs, ce qui souvent peut faire croire à une différence essentielle entre l'esprit de finesse et l'esprit géométrique.

Pour exposer ou pour résoudre une question quelconque d'une manière intelligente, il faut d'abord avoir l'occasion et la volonté de s'en occuper ; il faut commencer par s'y intéresser. Un mondain, par exemple, qui a passé des milliers d'heures dans les salons, parlera des manifestations de la coquetterie féminine plus finement, sans doute, qu'un mathématicien de génie qui a presque toujours vécu dans le monde des équations. Mais cela ne prouve pas qu'il possède à un plus haut degré que cet austère savant l'esprit de finesse. Pour prévoir la manière d'agir de telle coquette dans telles circonstances précises, l'un de ces deux hommes qui fait depuis longtemps des observations sur les femmes, a des données qui manquent à l'autre. D'autre part, quand il le voudra réellement, notre mathématicien pourra constater, dans l'attitude ou dans le langage de celles qu'il observe, la fréquence plus ou moins grande de certains gestes, de certains sourires, de certaines expressions et de certains mots. Dans ce domaine nouveau, de simples nombres pourront être pour lui des indices psychologiques d'une réelle valeur. Car un grand savant n'est pas nécessairement un imbécile.

Enfin, ce qui peut faire croire parfois à la finesse plus grande de ceux qui ont préféré les études littéraires aux études mathématiques, c'est que quelques-uns d'entre eux possèdent une remarquable virtuosité dans l'emploi du vocabulaire. Mais avant de leur attribuer un esprit très fin, il faut être bien sûr qu'il ne disent pas, avec des mots étincelants, des choses absurdes ou banales.

Ces remarques très incomplètes ne suffisent pas pour prouver que l'esprit de finesse et l'esprit géométrique sont absolument de la même nature. Je me contente de dénoncer l'exagération des autres. Mais ne croyez pas, Messieurs, que j'ai voulu, sournoisement allonger encore mon introduction. Je suis en plein dans mon sujet. Car s'il était vrai que pour étudier avec profit les problèmes de la littérature, de l'histoire, de la politique et de la morale on doit posséder ces mêmes facultés intellectuelles fondamentales qu'on peut développer en soi en étudiant les mathématiques, nous pourrions en conclure que les questions de l'algèbre et de la géométrie ne se distinguent des autres que par une simplicité plus grande et que ces questions sont donc particulièrement propres à exercer l'intelligence de l'enfant. En d'autres

termes, nous pourrions dire que l'esprit géométrique n'est pas autre chose que l'esprit de finesse appliqué aux questions que l'on peut trancher avec certitude.

Un dernier mot à ce sujet. Si l'on parle avec un peu de dédain de l'esprit géométrique, c'est, quelquefois, parce qu'on a rencontré des géomètres qui traitent certaines questions complexes comme si elles étaient simples. On pouvait en conclure que ces géomètres ne sont pas très intelligents. Mais ils le sont autant que ces personnes cultivées qui croient avoir un esprit fin et qui restent embarrassées devant les problèmes élémentaires de l'arithmétique comme si ces problèmes étaient réellement difficiles. Quant à moi, je trouve inquiétante l'audace de ces gens qui, incapables de se faire une idée claire de l'addition de deux fractions ou de l'extraction d'une racine carrée, tranchent avec assurance les questions sociales ou morales les plus compliquées.

J'ai parlé de la grande simplicité des mathématiques. Cette simplicité est-elle réelle ? C'est ce que je vais essayer de prouver. Si tant de personnes sont tentées d'affirmer le contraire, cela tient à des raisons que j'indiquerai à la fin de ce rapport.

En étudiant les mathématiques on ne s'occupe que des grandeurs géométriques et des nombres. Et quels que soient les nombres dont on s'occupe, tout se ramène à la considération des nombre *entiers*. Or une rangée de points marqués sur une feuille de papier constitue une image absolument nette d'un nombre entier. Il suffit de grouper ou de subdiviser quelques-unes de ces rangées de points pour découvrir toutes les propriétés de l'addition, de la soustraction, de la multiplication et de la division. On acquerra par le même moyen facile des idées justes sur la racine carrée. Et chaque règle nouvelle sera l'expression de ce fait qu'en changeant le mode de groupement des points qu'on a sous les yeux on ne fait pas varier leur nombre. Enfin, le tableau de points qui représente, par exemple, le produit *cinq fois huit*, est absolument analogue à celui qui représente le produit de deux autres nombres entiers. Je veux dire que dans le domaine de l'arithmétique un cas particulier ressemble tellement à un autre cas particulier qu'il suffit d'en considérer un attentivement pour pouvoir énoncer avec conviction une règle qui s'applique à tous. Il n'y a pas d'autre domaine où la généralisation des résultats observés se fasse avec autant de sécurité et autant d'aisance.

Quant aux notions fondamentales de la géométrie, nous les possédons déjà instinctivement, d'une manière confuse, avant d'avoir reçu aucune leçon proprement dite. C'est comme une science qui dort dans notre esprit et que quelques mots du maître éveilleront. Les mouvements et la symétrie de son propre corps ont vraisemblablement suggéré à l'homme ces idées simples qui en se coordonnant ont constitué la géométrie élémentaire.

Je pourrais citer des faits nombreux qui confirment cette hypothèse ; mais pour vous, Messieurs, ils seraient superflus.

Enfin, un enfant imaginera lui-même quelques-unes des identités fondamentales de l'algèbre élémentaire en essayant de rendre plus facile le calcul mental qu'on lui a proposé.

Du fait que le mathématicien ne s'occupe que d'*abstractions*, des naïfs en concluent que l'étude des mathématiques est difficile. Or, l'abstraction est une opération automatique et spontanée de l'esprit qui se fait dans les cerveaux les plus grossiers comme dans les autres. Des philosophes ont prétendu que des cercles imparfaits, les seuls que nous puissions observer autour de nous, ne pouvaient pas donner à l'homme l'idée du cercle parfait. Ils se trompent, car nous n'avons pas des yeux assez bons pour apercevoir les petites irrégularités que présente tel cercle que nous regardons, le disque de la pleine lune, par exemple ; et, ainsi, quand nous apercevons ce cercle imparfait, c'est l'idée du cercle parfait qui se présente la première à notre esprit. Je veux dire que c'est l'imperfection de nos sens qui, constamment, nous fait faire abstraction de la plupart des caractères de la réalité. Et il nous faut des années pour corriger et compléter les idées trop simples, trop abstraites de notre enfance.

Je parlerai plus loin, je le répète, de ce qui à l'ordinaire rend difficile l'étude des mathématiques. Le fait est que l'écolier qui étudie les mathématiques élémentaires s'occupe de choses très simples, assez simples pour qu'il puisse, si rien ne vient le troubler ou le distraire, s'en faire une idée *absolument claire*. Et, comme je vais le montrer, cela peut avoir une importance fondamentale au point de vue de son éducation.

Un débutant peut étudier l'algèbre et la géométrie, plusieurs années de suite, de manière à ne rencontrer que des vérités évidentes, ou à peu près évidentes. Je sais bien que nos élèves n'ont pas ce bonheur ; mais, pour le moment, la question n'est pas là. Ce caractère d'évidence des relations que nous découvrons entre les nombres ou entre les figures géométriques donne à notre conviction toute sa force et nous permet d'être affirmatifs avec une assurance parfaite. Nous nous sentons capables de convaincre le contradicteur qui se présentera. Or, soit dit en passant, il est bon que l'enfant, qui a besoin d'optimisme et de confiance, sache qu'il y a des questions sur lesquelles l'accord de toutes les intelligences peut se faire facilement.

Je dis qu'il n'y a pas de domaine où la distinction entre le *vrai* et le *faux* soit aussi facile à faire qu'en mathématiques. Les affirmations du mathématicien sont aisément contrôlables. Aussi doit-il, pour travailler avec succès, avoir une parfaite probité intellectuelle. S'il manque d'attention ou de scrupules, il s'expose constamment à des démentis décisifs.

A ce point de vue le mathématicien est un privilégié. Vous savez fort bien, Messieurs, que tous les géographes ne peuvent pas toujours se mettre d'accord ; ni les historiens ; ni les philosophes ; ni les moralistes. On a vu parfois des penseurs, désireux de montrer leur ingéniosité ou leur génie, apporter à des problèmes très complexes des solutions fantaisistes, dépourvues de toute valeur scientifique. Et il leur arrive de donner leur nom à une loi naturelle dont la fragilité n'apparaîtra qu'après vingt ou trente ans d'observations patientes. En mathématiques, il est moins facile d'être original.

Autre chose. En mathématiques, on sent plus vivement qu'ailleurs la nécessité d'être très attentif à ce qu'on lit et à ce qu'on écrit. Quand on résout des équations, par exemple, un moment d'inattention d'une demi-seconde suffit pour qu'on aboutisse à un résultat absolument faux et pour que le travail, peut-être très long, qu'on a achevé soit sans aucune valeur. Or, on ne peut certainement pas dire la même chose d'une composition littéraire, dans laquelle, d'ailleurs, l'erreur commise étourdiment sera beaucoup plus vite corrigée.

Effectuer des transformations arithmétiques ou algébriques, pendant cinquante ou soixante minutes, avec une attention soutenue, cela exige un sérieux effort. Mais, dans bien des cas, l'accomplissement de cet effort prolongé constituera une condition suffisante pour que le travail exécuté soit tout à fait bon. Les exercices dont je parle ici auront donc une influence moralisante sur l'écolier, puisqu'en les faisant celui-ci comprend que le succès de son entreprise dépend uniquement de sa persévérance, de sa volonté. Il y a beaucoup de domaines où la récompense du travailleur opiniâtre est moins certaine.

Il y a des leçons où l'écolier en est réduit à répéter ce qu'on lui a appris, sans pouvoir contrôler l'exactitude des propositions qu'il énonce. Mais en mathématiques on peut l'habituer à se demander constamment : « Ai-je le droit d'affirmer cela ? » Et ce serait pour lui une bonne habitude à prendre.

J'ai dit qu'en étudiant la science des nombres l'enfant rencontre des questions qui peuvent devenir pour lui absolument claires, ce qui lui permet, quand il les résout, d'être affirmatif avec fermeté. Mais, précisément parce qu'il aura examiné beaucoup de cas où l'on peut affirmer avec certitude, il sera capable de reconnaître les cas où cela n'est plus possible. Ne rencontrant plus dans des problèmes d'un autre ordre la netteté et la clarté auxquelles il a été habitué, il sentira mieux que personne la nécessité de suspendre son jugement. Mieux qu'à un autre on pourra lui faire comprendre que telle question admet des solutions différentes suivant qu'on accorde plus ou moins d'importance à ces données-ci ou à celles-là. La diversité des opinions dans le domaine

de la morale, de la philosophie et de la politique ne l'étonnera pas et il sera enclin à la tolérance. Je sais bien que dans la vie, devant les problèmes indéterminés, on ne peut pas suspendre son jugement indéfiniment ; il faut savoir opter, et prendre parti. Mais on peut le faire sans aveuglement. Il est bon que les questions que nous simplifions volontairement pour des raisons d'ordre pratique ou sentimental conservent pour notre intelligence toute leur complexité.

Il existe évidemment des géomètres peu intelligents qui affirment à tort et à travers, de même qu'il existe des moralistes ineptes et des historiens sans clairvoyance. Mais ce n'est pas l'étude de la géométrie qui développe en nous la tendance à affirmer sans précaution. Au contraire, on a constamment l'occasion, en mathématiques, de mesurer avec soin le degré de généralité de la vérité et, souvent, l'obligation d'introduire une restriction dans l'énoncé d'un théorème.

A ce propos je dois faire remarquer que le maître de mathématiques peut être un auxiliaire précieux pour son collègue qui apprend aux écoliers à se servir de leur langue maternelle. Supposons, en effet, que l'on demande à un élève de définir une figure simple tracée sur le tableau noir, par exemple : deux angles opposés par le sommet, ou bien un polygone d'une espèce particulière. Si sa définition est incorrecte, on pourra tracer sur le tableau la figure qu'il a définie sans le vouloir, et lui faire comprendre ainsi qu'il s'est trompé. L'impropriété des termes qu'il a employés lui apparaît tout de suite. Il va sans dire que dans n'importe quel domaine une vérité qu'on formule avec des mots mal choisis peut devenir une erreur. Mais dans le domaine des mathématiques, mieux que dans tous les autres l'écolier sent immédiatement et clairement la nécessité d'employer un langage précis. Et même, dans bien des cas, il sentira cette nécessité sans que le maître intervienne.

Cela m'amène à parler de l'entière liberté d'esprit avec laquelle l'écolier peut étudier les mathématiques. Je veux dire qu'on peut les lui enseigner sans lui demander la moindre docilité intellectuelle. Si, en géométrie, on lui indiquait les noms des figures élémentaires, et, en algèbre, les signes abréviatifs universellement employés, on pourrait, pendant des années, le faire progresser rapidement en ne lui fournissant que les énoncés de problèmes nombreux, gradués avec beaucoup de soin. Il est clair qu'en grammaire, en histoire, en géographie et en sciences naturelles on ne pourrait pas procéder de la sorte. En particulier, dans les leçons où on lui parle de choses qui sont lointaines dans le temps ou dans l'espace, l'enfant en est réduit à croire ce qu'on lui dit. Mais, dans les leçons de mathématiques, on pourrait constamment lui donner l'occasion de reconnaître qu'il dispose de moyens

naturels pour découvrir la vérité sans l'aide de personne. Dans ces leçons-là, il pourrait être plus actif que dans beaucoup d'autres. Et il serait toujours facile, en lui posant de temps en temps des questions embarrassantes, de maintenir dans de sages limites la salutaire confiance qu'il aurait dans ce pouvoir qui est en lui, d'observer attentivement, de persévérer, de raisonner et de vérifier. Si l'un des buts essentiels de l'éducation est de former des hommes sachant se passer de maîtres, l'étude des mathématiques peut être éducative autant que toute autre.

Voici encore une raison pour laquelle il faut faire faire cette étude aux enfants. Sans que j'insiste sur ce point, vous me croirez, Messieurs, si je dis que les cas où le langage mathématique est préférable à l'autre sont innombrables. Dans bien des domaines il y a des choses qu'on peut caractériser au moyen d'un ou de plusieurs nombres bien mieux qu'avec des mots. Les nombres et les signes de l'algèbre se rencontrent dans des livres de toutes sortes. De simples nombres peuvent nous renseigner sur la situation d'un point, sur la forme d'une figure, sur la pente d'une route, sur la composition d'un mélange ou d'un alliage, sur la hauteur d'un son, sur la puissance d'une machine, sur l'état pathologique d'un malade, sur la situation économique d'un pays, sur les habitudes d'un peuple et sur bien d'autres choses encore. Et, par exemple, ne pourrait-on pas caractériser un peu le style d'un écrivain en indiquant la fréquence plus ou moins grande, dans ses écrits, des mots de telle espèce et de telle autre?

Il est à peine besoin de le dire : les mathématiques constituent un instrument dont se servent les ingénieurs, les physiciens, les astronomes, les hommes d'affaires, les économistes, les statisticiens, les géographes et bien d'autres gens encore. Et que ferait un philosophe qui voudrait étudier le mécanisme du raisonnement s'il n'avait pas à sa disposition les exemples que peuvent fournir l'algèbre et la géométrie? On sait d'ailleurs quelle place a été accordée aux mathématiques par les penseurs qui se sont occupés de la classification des sciences.

Le nombre se retrouve partout. Eh bien, nous avons tous pu le constater, lorsqu'un adulte cultivé juge utile de diminuer son ignorance en mathématiques, il rencontre à l'ordinaire, dans l'étude qu'il entreprend, des difficultés sérieuses et, parfois, décourageantes. En tous cas, il progresse moins vite qu'il ne le voudrait. Il lui manque non seulement le temps dont disposent les écoliers, mais aussi certaines habitudes d'esprit qui sont plus nécessaires quand on se sert du langage algébrique que lorsqu'on parle la langue de tout le monde. Or, j'affirme qu'un mathématicien se guérira plus rapidement, avec moins d'efforts, au moyen de livres attrayants, de son ignorance en littérature, en histoire, en géographie ou en sciences naturelles. J'ose en

conclure que l'étude des mathématiques n'est pas de celles qu'on peut le plus facilement remettre à plus tard. Plus tard l'écolier pourra compléter son érudition ; mais c'est pendant que l'être humain est jeune qu'il faut l'aider à perfectionner l'instrument de travail que sera pour lui son cerveau.

Enfin, Messieurs, je ne vous étonnerai pas en disant qu'on doit aussi essayer de faire aimer les mathématiques pour leur beauté. Dans la géométrie analytique, par exemple, il existe une si parfaite correspondance entre les expressions algébriques et les grandeurs géométriques que les caractères les moins apparents d'une courbe se révèlent dans les particularités de son équation. Et, pour finir, je citerai encore ce fait qu'un raisonnement simple et bref peut donner au mathématicien une certitude à laquelle on n'aboutirait pas par des observations patientes, poursuivies pendant des siècles. Par exemple, ce n'est pas l'expérience qui pourrait nous apprendre que la suite des nombres premiers est illimitée. Je me hâte d'ailleurs d'ajouter, puisque personne ne nous entend, que des théorèmes de ce genre ne permettent pas à l'humanité d'améliorer sensiblement les conditions de son existence à la surface du globe.

J'ai indiqué, Messieurs, quelques-unes des raisons pour lesquelles, selon moi, il faut enseigner les mathématiques, régulièrement, plusieurs années de suite, aux êtres jeunes dont on veut discipliner l'intelligence. Mais, comme je l'ai dit, donné d'une façon maladroite et dans de mauvaises conditions, cet enseignement peut être dépourvu de toute valeur éducative.

Il y a, bien entendu, plusieurs manières de bien enseigner et je n'ai pas la ridicule prétention de donner des conseils à mes collègues. C'est dans mes propres leçons que j'ai constaté la disproportion inquiétante qu'il y a entre les efforts que fait le maître et les résultats qu'il obtient. Mais j'ai des raisons de croire que nous avons tous eu l'occasion, plus ou moins souvent, de souffrir sincèrement de notre insuccès partiel. Si je ne parviens pas à en découvrir les vraies causes, vous voudrez bien m'éclairer sur ce point.

Il ne suffit pas à un maître, pour avoir l'esprit tranquille, de mettre dans ses leçons beaucoup de soin, d'ardeur et de patience. Par malheur, il est pressé. Il a des élèves, parfois nombreux, auxquels il doit inculquer, dans un temps donné, la somme de connaissances prévue par le Programme. Ses élèves diffèrent beaucoup les uns des autres par leur zèle et par la qualité de leur intelligence. Or, il ne doit pas seulement leur faire faire à tous des progrès continus : c'est la même dose de science qu'il doit enseigner à ceux qui progressent vite et à ceux qui progressent lentement. La nature ne se soucie pas

des exigences de l'Ecole; et quand nous sommes parvenus à enseigner les mêmes formules à un élève borné et à un élève intelligent, nous ne devons pas croire que nous avons mis la même clarté dans l'esprit de l'un et dans l'esprit de l'autre. S'ils pouvaient être profondément sincères, ces deux écoliers n'emploieraient pas les mêmes mots pour dire ce qu'ils ont appris et compris. En exigeant trop vite d'un débutant qu'il emploie les expressions correctes et classiques du maître, on n'est plus capable d'apprécier le degré exact de ses connaissances.

Je veux dire qu'on se hâte beaucoup trop d'enseigner aux débutants des procédés expéditifs, des raisonnements d'une forme impeccable et des formules générales. Les questions mathématiques seraient beaucoup plus faciles, beaucoup plus claires pour l'enfant s'il avait le droit, pour commencer, de les résoudre à sa manière en employant les moyens très imparfaits qu'il est capable d'imaginer lui-même. Voyons! est-il naturel qu'un écolier très jeune procède comme quelqu'un qui connaît d'avance les résultats auxquels il doit aboutir ou bien comme quelqu'un qui cherche, qui ne sait pas encore? Qu'on soit intelligent ou non, lorsqu'on aborde une question nouvelle on commence par hésiter et tâtonner, on fait des hypothèses, des vérifications, on reconnaît ses erreurs et l'on recommence. On dit aux écoliers comment ils doivent répondre, mais on ne leur apprend pas à chercher. Tracer des figures, observer, tâtonner, vérifier: voilà ce que nos élèves devraient faire pour commencer. C'est à la longue, et tout naturellement, que leur langage et leur raisonnement s'amélioreront. Pour cela, bien entendu, on les aidera; mais on devrait attendre leurs progrès avec moins d'impatience.

Je viens de parler de figures. Il est bon que les écoliers très jeunes s'en servent souvent. Il suffit dans bien des cas de représenter l'inconnue d'un problème par un segment rectiligne ou par la surface d'un rectangle pour que ce problème devienne facile. Tout ce qu'on peut dire du produit de deux nombres ou de deux binômes devient évident si l'on a sous les yeux le rectangle dont les deux côtés sont mesurés par les deux facteurs de ce produit.

Voici une expérience que j'ai faite souvent, qui a toujours réussi et qui me paraît significative. Je propose à mes élèves nouveaux qui abordent l'étude de l'algèbre et de la géométrie et qui ont déjà étudié la *règle de trois*, un problème dans le genre du suivant:

Si l'on augmentait de 5 centimètres le côté d'un carré, sa surface augmenterait de 865 centimètres carrés. De combien augmenterait la surface si le côté augmentait de 8 centimètres?

La plupart de ces écoliers résolvent rapidement le problème par la règle de trois et, bien entendu, m'apportent une réponse inexacte. Au moyen d'une figure très simple ils auraient reconnu que l'accroissement de la surface n'est pas proportionnel à l'ac-

croissement du côté et que la règle de trois ne doit pas intervenir dans la question. Or ils n'auraient pas été trompés par la forme de l'énoncé si on les avait davantage habitués à observer et si l'on s'était moins hâté de leur enseigner des procédés expéditifs. Les règles n'ont de la valeur que si l'on sait reconnaître les cas où elles sont applicables; et elles n'ont un sens tout à fait clair que pour le chercheur dont elles résument les expériences et les observations nombreuses.

Bien souvent l'écolier s'occupe de mathématiques sans savoir ce qu'il fait. Parce que le maître est pressé, parce qu'il doit hâter l'instruction de ses élèves, il leur fournit des moyens perfectionnés avant qu'ils se soient fait une idée claire du but à atteindre. Or, ce but, ils l'atteindraient beaucoup plus sûrement si on leur indiquait la direction dans laquelle il faut marcher sans leur fournir le moyen de locomotion qui permet d'avancer très vite. Ne pas trouver tout de suite le procédé qui permettrait de résoudre le problème qu'on s'est proposé, cela arrive aux personnes les plus intelligentes. Mais ne pas savoir ce qu'on veut, c'est être incapable de faire un effort utile.

En classe, les maîtres traitent habituellement avec beaucoup de soin les questions de détail; mais beaucoup d'entre eux, semble-t-il, insistent trop peu sur la signification des questions très générales. Or, en mathématiques, ce sont les idées générales qui pour un débutant sont les plus faciles à saisir. Et cela se comprend. Les préoccupations fondamentales de ceux qui ont élaboré l'arithmétique, l'algèbre et la géométrie ont un caractère essentiellement humain et traduisent des besoins profonds de l'esprit que n'importe qui peut éprouver. Si ce caractère en quelque sorte *naturel* des mathématiques n'apparaît pas nettement à l'écolier, c'est qu'il est gêné par les termes techniques spéciaux, les signes nouveaux et les artifices dont on abuse. Il pourra être embarrassé par la mise en évidence d'un facteur commun aux différents termes d'un polynome. Mais on peut lui faire comprendre tout de suite et très clairement le problème général que servent à résoudre toutes les règles du calcul algébrique. Quelle que soit l'identité que nous avons sous les yeux, elle nous apprend toujours que telle série d'opérations et telle autre conduisent à deux résultats égaux lorsqu'on les effectue sur les mêmes nombres. Or, si l'on propose à un enfant un calcul facile, exigeant beaucoup de temps, mais susceptible d'être simplifié, il essaiera lui-même d'imaginer un calcul équivalent et plus rapide. Et deux ou trois exemples du même genre lui feront comprendre ce qu'on entend par *expressions équivalentes*. Eh bien, il est certain que beaucoup d'écoliers appliquent les règles du calcul algébrique sans se faire une idée claire de leur rôle.

Et, de même, beaucoup d'écoliers qui apprennent docilement des démonstrations dans leurs manuel de géométrie, sont incapables de distinguer les démonstrations qui sont rigoureuses et convaincantes de celles qui ne le sont pas. Les démonstrations qu'un élève débite n'exercent une action éducative sur son intelligence que s'il les fait avec une ferme conviction. Débiter des démonstrations de la solidité desquelles on n'est pas sûr, c'est vouloir convaincre les autres avant d'être convaincu soi-même.

Je le répète : si le maître était moins pressé il pourrait faire comprendre clairement à l'enfant le sens de ces mots qui reviennent sans cesse dans les leçons : *théorème, réciproque, démonstration,* etc. Et, en passant, il lui ferait faire de la bonne psychologie en lui montrant comment, en mathématiques, on peut parvenir à faire partager son opinion à un contradicteur. Il lui expliquerait aussi pourquoi, dans certains domaines, c'est beaucoup moins facile.

Si certains maîtres ne veulent traiter dans une leçon qu'un ou deux petits sujets bien limités, c'est qu'ils pourront ainsi proposer à leurs élèves, pour la prochaine fois, une tâche bien définie et reconnaître alors aisément ceux qui méritent une bonne note et ceux qui en méritent une mauvaise. Mais en procédant de la sorte ils tracent des frontières dans des domaines où il ne devrait pas y en avoir. En classant et en subdivisant les choses pour des raisons de commodité, l'école supprime les relations qu'il y a entre les questions et entre les phénomènes et elle enlève à ceux-ci une grande partie de leur intérêt et leur vraie signification.

Sans insister sur ce point j'ajouterai que l'étude des mathématiques pourrait être rendue beaucoup plus attrayante. Elle le serait davantage pour l'écolier si celui-ci était moins souvent obligé d'écouter et plus souvent occupé à chercher. Il y a trop de moments où il est inactif et où il s'ennuie. Or, comme je l'ai dit, dans les leçons dont je parle, le rôle du maître et celui du livre pourraient être beaucoup plus effacés que dans la plupart des autres ; car les moyens naturels dont l'élève dispose le mettent en mesure de travailler seul si les problèmes qu'il a à résoudre ont été convenablement choisis et gradués.

Enfin, à propos de problèmes, je dirai encore qu'il n'y a pas assez de variété dans ceux qu'on propose aux écoliers. Sans doute, ce n'est qu'au moyen d'exercices répétés qu'on devient un bon calculateur. Mais, d'autre part, il importe absolument que l'élève soit fréquemment intéressé par sa besogne. Et ceci n'est pas incompatible avec cela.

Je me contenterai d'un seul exemple. Le chapitre des *arrangements,* des *permutations* et des *combinaisons* n'est enseigné, à l'ordinaire, qu'aux élèves des gymnases, âgés de 16 ou 17 ans. Or, on pourrait déjà le rendre facilement intelligible pour des écoliers

beaucoup plus jeunes, au moyen de problèmes pittoresques que chaque maître imaginera sans peine.

Il ne faut pas que l'ordre mis par l'école dans les matières d'enseignement ralentisse la vie intellectuelle de l'écolier. La nature aussi a mis de l'ordre dans ses créations ; et dans l'esprit des êtres jeunes les idées ne se succèdent pas comme dans les programmes scolaires. En somme nous ne pouvons rien faire de mieux que de fournir à nos élèves des occasions continuelles de réfléchir, de s'enthousiasmer et d'exercer leurs forces.

Encore deux mots, Messieurs, et j'aurai fini.

On ne peut pas parler de l'enseignement des mathématiques sans songer aux conditions générales dans lesquelles les écoliers s'instruisent. Cet enseignement, comme tous les autres, souffre des défauts de notre pédagogie traditionnelle. Je vais indiquer brièvement quelques-uns de ces défauts, ceux qui me paraissent les plus graves.

On traite trop souvent l'écolier comme un prévenu dont on soupçonne l'inattention ou la paresse ; et les interrogatoires fréquents qu'on lui fait subir lui font comprendre qu'il a intérêt à cacher son ignorance. L'effet de ce régime est de diminuer sensiblement la liberté d'esprit de l'enfant, son insouciance, son enthousiasme et sa sincérité.

L'intérêt et la valeur éducative des leçons sont diminués par le fait que le maître, habituellement, doit considérer comme des sujets d'examen et non pas comme des sujets de conversation les choses dont il parle à ses élèves. Je veux dire qu'en séparant et en divisant les questions, il empêche l'écolier de comprendre l'interdépendance des phénomènes.

En particulier, la répartition des matières d'enseignement en *branches* tout à fait distinctes, attribuées à autant de maîtres spéciaux, offre des inconvénients très graves.

D'abord, elle augmente la monotonie des leçons. Nous avons tous pu constater que nos élèves nous écoutent beaucoup plus attentivement lorsqu'il nous arrive de parler de choses qui sont en dehors de notre spécialité.

D'autre part, quand un même écolier a des maîtres trop nombreux, il peut arriver que l'influence des uns soit en partie neutralisée par l'influence des autres. Et puis, cet enfant aura parfois à satisfaire des exigences trop nombreuses.

Cette habitude de faire suivre à nos élèves des cours tout à fait distincts, dans chacun desquels toutes les questions traitées sont du même ordre, a une conséquence baroque. Un cours auquel on ne consacre qu'une heure par semaine se compose d'une quarantaine de leçons environ, car, le plus souvent, la durée d'un cours est d'une année au moins. Or, on se décide de loin en loin, — et

cela peut être pour d'excellentes raisons, — à traiter devant les écoliers des questions d'un genre nouveau. On en conclut absurdement qu'il faut ajouter un cours de plus à ceux que mentionne déjà le Programme ; et, ainsi, le nombre des leçons auxquelles l'enfant doit assister dans le courant de l'année augmente nécessairement de quarante, ou d'un multiple de quarante, — alors qu'une demi-douzaine de leçons, dans certains cas, pourrait suffire, une demi-douzaine de leçons qu'on pourrait incorporer dans un cours déjà existant sans en augmenter la durée.

En enseignant plusieurs sciences à la fois, le maître pourrait mieux faire comprendre à ses élèves la signification de chacune d'elles. Par exemple, une expression algébrique a un sens plus clair lorsqu'on peut voir en elle une manière commode d'exprimer le résultat de quelques expériences de physique ou de mécanique. De même, l'étroite dépendance qu'il y a entre les problèmes de mécanique et de géométrie est évidente. En passant, je me permets d'ajouter qu'un professeur de littérature retirerait un réel avantage du fait qu'il enseignerait aussi l'histoire et la géographie. Car il ne s'agit pas de faire de nos élèves de précoces spécialistes. Enfin, puisque j'ai osé me lancer dans l'utopie, je remarquerai encore que dans les leçons où l'on ne fait pas autre chose que d'enseigner à l'enfant sa langue maternelle, on le fait parler à des moments où il n'a aucun sentiment, aucune idée à exprimer ; bref, à des moments où il n'a rien à dire, et seulement pour lui donner l'occasion d'appliquer une règle nouvellement apprise. L'idéal serait que l'enseignement de la langue maternelle fût donné en même temps que tous les autres, c'est-à-dire dans tous les cas où l'enfant emploie spontanément sa langue maternelle pour formuler sa pensée. On me fera remarquer que dans l'enseignement, comme ailleurs, la division du travail est nécessaire. Je demanderai alors si elle est nécessaire dès le début.

Je n'insisterai pas sur le fait que les écoliers sont trop longtemps enfermés et assis, et que leur santé en souffre. Ce sujet a déjà été traité bien souvent.

Je n'ai plus qu'un reproche à faire à l'Ecole avant de résumer. Ce reproche, le voici.

L'Ecole s'applique à donner aux enfants des connaissances aussi étendues que possible ; mais elle ne se soucie pas d'améliorer tout ce qu'il y a en eux de précieux et de perfectible. Il y a des aptitudes fondamentales de l'être humain dont le pédagogue se désintéresse. L'écolier ne se sert habituellement de ses yeux que pour lire ou pour suivre ce qu'il écrit : il ne s'en sert presque jamais, en classe, pour observer. Ses mains lui servent à tenir une plume, un crayon, un livre ou un cahier : elles ne lui servent presque jamais à façonner ou à construire des objets. Enfin ses pieds lui permettent uniquement, pendant les leçons, de faire du

bruit sous la table ou de caresser le dos du camarade qui est assis devant lui. Et l'éducation physique de l'enfant est en grande partie sacrifiée. Mieux exercés, ses yeux, ses mains et ses pieds pourraient avoir pour lui une valeur beaucoup plus grande. Je me contenterai de remarquer que nos sensations pourraient, dans des occasions bien choisies, nous suggérer des idées justes en mécanique, qui nous permettraient de mieux comprendre ces formules dans lesquelles tant d'écoliers ne voient rien de plus que les lettres **m**, **v**, **t**, **l**, **g** et **f**.

En somme, en dépit de la richesse apparente des programmes, l'enfant, à l'école, fait presque tout le temps la même chose. Dans la plupart de ses leçons c'est la même attitude qu'on exige de lui. Et la conséquence de cette monotonie est que souvent il s'ennuie.

Je m'arrête, car j'ai déjà abusé de votre patience.

En résumé, pour les raisons que j'ai dites, les leçons de mathématiques données dans de bonnes conditions peuvent coopérer d'une manière particulièrement efficace à l'éducation intellectuelle de l'écolier. Et puisque dans ces leçons il s'agit davantage de lui inculquer une ou deux bonnes habitudes d'esprit et de développer en lui une certaine habileté que d'accroître son savoir proprement dit (savoir dont les lacunes pourront être comblées plus tard), il importe qu'elles soient suffisamment nombreuses.

L'étude des mathématiques favorise aussi le développement moral de l'enfant, parce qu'elle le rend attentif et scrupuleux dans ses affirmations, et parce qu'elle lui montre sans cesse des cas où, par la réflexion, la persévérance et la probité intellectuelle on parvient tout seul à distinguer l'erreur de la vérité. Il acquiert ainsi une légitime confiance dans ce que le cerveau humain a de bon.

Et puisqu'on parle beaucoup depuis quatre ou cinq ans d'éducation nationale, j'ajouterai qu'en dépit de son caractère essentiellement international, l'enseignement des mathématiques, mieux que tout autre enseignement, peut développer chez l'écolier une ou deux qualités fondamentales sans lesquelles on est un homme médiocre et un citoyen peu utile. Il importe autant dans la vie publique que dans les laboratoires de savoir raisonner juste et de ne pas se payer de mots.

Mais je dois le rappeler en terminant : toutes les leçons que l'écolier reçoit pourraient être améliorées et toutes pourraient exercer sur son développement une action beaucoup plus favorable. Chaque maître, et cela pourrait facilement s'expliquer, est porté à exagérer l'importance de son propre enseignement. Chacun est dans une certaine mesure un spécialiste dont le travail est en général indépendant de celui de ses collègues. Il en est résulté cette surcharge des programmes dont nos élèves souffrent depuis

longtemps. J'ai de la peine à comprendre la naïveté de certains réformateurs qui s'imaginent qu'on réaliserait un progrès sensible si l'on consacrait deux heures de plus par semaine à tel enseignement et deux heures de moins à tel autre. Ce qu'il faut modifier profondément, c'est le régime scolaire auquel les enfants sont soumis ; c'est l'esprit de l'enseignement et c'est, du même coup, l'état d'esprit de l'écolier.

La question fondamentale qu'il faudra absolument se poser un jour est la suivante :

« Quel but voulons-nous assigner à l'Ecole ? Que voulons-nous par-dessus tout ? »

Quand nous nous ferons une idée nette des aptitudes qu'il importe avant tout de développer chez les enfants, nous comprendrons ce que doivent être nos programmes et nos méthodes d'enseignement.

Thèses de M. Roorda.

1. La distinction que l'on fait entre les branches d'enseignement susceptibles de donner à l'écolier une *culture générale* et celles auxquelles on refuse cette vertu n'est pas fondée.

2. Les leçons où il s'agit d'enseigner à l'élève une certaine technique, de développer en lui une certaine habileté, doivent être plus nombreuses que les autres.

3. L'esprit géométrique n'est pas autre chose que l'esprit de finesse appliqué aux questions qu'on peut trancher avec certitude.

4. L'étude des mathématiques habitue à être affirmatif dans les cas où l'on doit l'être et à suspendre son jugement dans les autres.

5. Il n'y a pas de domaine où la distinction entre le *vrai* et le *faux* soit aussi facile à faire qu'en mathématiques ; pas de domaine, donc, où la nécessité d'être scrupuleux dans ses affirmations se fasse aussi fortement sentir.

6. En mathématiques, l'élève apprend à découvrir la vérité sans le secours du maître.

7. En étudiant les mathématiques, on apprend à faire des raisonnements rigoureux. L'homme qui raisonne mal manque de probité intellectuelle.

8. En mathématiques, l'enfant étudie des questions sur lesquelles l'accord de toutes les intelligences peut se faire.

9. Si les mathématiques n'ont pas pour l'écolier toute la valeur éducative affirmée dans les *thèses* précédentes, cela tient essentiellement à la manière dont on les enseigne et aux caractères généraux de notre régime scolaire.

A. Trop pressé, le maître enseigne souvent des moyens expé-

ditifs à ses élèves avant que ceux-ci se fassent une idée claire du but à atteindre.

B. En classe, l'enfant apprend moins à observer et à chercher qu'à répondre à des questions prévues.

C. Faire débiter à un élève une démonstration dont il ne sent pas la rigueur, c'est lui demander de convaincre les autres avant qu'il soit convaincu lui-même.

D. On se hâte beaucoup trop de mettre l'écolier en mesure de montrer qu'il sait quelque chose.

E. On lui enlève sa liberté d'esprit en le traitant comme un prévenu qui, à chaque instant, peut être pris en flagrant délit d'ignorance.

F. Par les frontières trop nombreuses qu'elle trace tout de suite entre les matières de l'enseignement, l'Ecole supprime les relations qu'il y a entre les phénomènes et compromet l'éducation intellectuelle de ses élèves.

G. La somme des connaissances qu'un écolier doit acquérir dans un temps donné ne dépend ni de ses goûts, ni de ses aptitudes.

CHRONIQUE

Gaston Darboux.

La science mathématique vient de faire une perte cruelle en la personne de l'un des plus éminents géomètres de notre époque, M. Gaston Darboux, secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences pour les sciences mathématiques, doyen honoraire de la Faculté des Sciences de Paris, fondateur et rédacteur du *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques,* décédé à Paris le 23 février 1917.

Né à Nîmes le 13 août 1842, Jean-Gaston Darboux fut reçu premier, en 1861, à la fois à l'Ecole Normale supérieure et à l'Ecole Polytechnique. Il opta pour la première; il y fut admis à l'agrégation en 1864 et docteur ès sciences en 1866 sur la présentation de sa thèse sur les surfaces orthogonales.

D'après la Notice que M. Ern. Lebon consacre à Darboux dans sa belle collection des *Savants du Jour*[1] et à laquelle nous renvoyons nos lecteurs, Darboux débuta dans l'enseignement comme professeur suppléant de mathématiques spéciales, à Paris, au Lycée Saint-Louis (1864-1865), puis au Lycée Louis-le-Grand (professeur de 1868 à 1872). En 1872 il devient maître de confé-

[1] *Gaston Darboux. Biographie, Bibliographie analytique des écrits*, par Ern. Lebon. — Gauthier-Villars, Paris, 1910.

rences à l'Ecole Normale supérieure. Il supplée Joseph Bertrand dans sa chaire de Physique mathématique au Collège de France et Chasles pour son cours de Géométrie supérieure à la Faculté des Sciences, puis, en 1881, il succéda à ce dernier comme professeur titulaire. Depuis cette même année il remplit aussi les fonctions de maître de conférences à l'Ecole Normale d'enseignement secondaire pour les jeunes filles, à Sèvres. Il fut doyen de la Faculté des Sciences de 1889 à 1903. Admis à l'Académie des Sciences en 1884, en remplacement de Puiseux, il devint secrétaire perpétuel en 1900 comme successeur de Joseph Bertrand.

Ce que fut Darboux comme professeur et comme savant, les savants les plus compétents l'ont dit, en 1912, à l'occasion de son jubilé scientifique[1]. M. P. Appell a rappelé « l'influence décisive sur le développement des mathématiques en France » exercée par Darboux et l'a signalé comme « le véritable initiateur de l'enseignement de la Mécanique rationnelle et de la Mécanique analytique, si élevé et si solide, qui se donne aujourd'hui dans toutes les universités françaises ». En parlant de Darboux comme successeur de Chasles, M. Appell s'est exprimé en ces termes : « Vous développez alors l'enseignement dans une voie nouvelle, où Bonnet l'avait déjà engagée, la voie de la géométrie générale, considérée comme application de l'analyse dont les fondateurs furent Euler, Monge et Gauss ; c'est dans cette chaire, où vous professez depuis trente-trois ans, que vous avez fondé cette brillante école de géométrie, dont les disciples sont maintenant répandus dans tous les pays, et que vous avez développé les méthodes et les résultats qui font de vous un créateur et qui préserveront votre nom de l'oubli. »

A côté de ses remarquables travaux en Géométrie supérieure, dont nous nous bornerons à rappeler ici ses magistrales *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal* et ses *Leçons sur les systèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes,* Darboux laisse des recherches fondamentales en Analyse mathématique, en Algèbre, en Mécanique analytique et en Physique mathématique.

Par ses fonctions de membre du Conseil supérieur de l'Instruction publique (depuis 1888), Darboux a exercé une grande influence sur le développement de l'enseignement scientifique en France. C'est en qualité de vice-président de ce Conseil, représentant le ministre de l'Instruction publique, qu'il présida, le 2 avril 1914, la séance générale d'ouverture de la Conférence internationale organisée par la Commission internationale de l'enseignement mathématique[2]. H. F.

---

[1] Les discours et les adresses ont été reproduits en appendice dans le volume publié par le Comité du Jubilé sous le titre *Gaston Darboux, Eloges académiques et discours,* Librairie Hermann & fils, Paris, 1912.

[2] Voir le discours d'ouverture dans l'*Enseign. mathem.* du 15 mai 1914.

Société mathématique suisse.

Schuls, 8 août 1916.

La Société mathématique suisse a tenu sa septième réunion ordinaire à *Schuls* (Basse-Engadine), le 8 août 1916, sous la présidence de M. le prof. Marcel Grossmann (Zurich), à l'occasion de la réunion annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles. Quatorze communications ont été présentées à la Section mathématique ; en voici les résumés :

1. — M. le prof. K. Merz (Coire). — *Note historique sur la surface de Steiner.* — Steiner n'a rien publié sur la surface qui porte son nom ; la méthode qu'il a employée pour l'engendrer m'a été communiquée par M. le prof. Geiser. Schröter simplifie cette méthode en remplaçant la gerbe de quadriques, utilisée par Steiner, par un réseau de coniques. On doit à Kummer la première étude analytique. Voici un tableau[1] résumant l'historique de la surface :

Steiner (Rome 1843) † 1863									
Schröter .	1863			Kummer 1863 — Weierstrass					
Cremona .	1864	Berner . .	1864	Cayley . .	1864				
Reye . . .	1867	Reye . . .	1867	Clebsch .	1867				
Sturm . .	1871			Laguerre.	1872	Bertini . .	1872		
				Gerbaldi .	1881			Beltrami .	1879
		Stahl . . .	1885			Rohn . . .	1890		
		Reye . . .	1896	Lacour. .	1896	Berzolari.	1892		
		Timerding	1898						

Les travaux synthétiques sont mentionnés dans la première colonne ; les travaux analytiques basés sur une représentation plane, dans la troisième ; ceux qui emploient une transformation quadratique ont été intercalés dans la deuxième colonne ; enfin, les quatrième et cinquième colonnes renferment les travaux qui conduisent à la théorie de certaines formes biquadratiques en rapport avec cette surface.

Le développement historique montre comment le problème,

[1] Voir les indications bibliographiques completes dans : K. Merz. Parallelflächen u. Centralfläche eines besonderen Ellipsoïdes u. die Steinersche Fläche. Beispiel einer quadratischen Transformation. — Aux indications données dans ce dernier travail, il faut ajouter les suivantes : Laguerre, Œuvres II, pages 281, et Beltrami, Opere, III, p. 168. — Voir aussi : Verhandlungen der schw. naturforsch. Gesellschaft, 1914, II, p. 102.

aperçu à la suite d'une vision géométrique géniale, se transforme peu à peu en un problème purement algébrique. La connaissance géométrique de la surface apparaît comme l'intuition qui guide à travers le dédale des relations arithmétiques et conduit à des résultats nouveaux et féconds.

2. — M. le prof. L. Crelier (Berne-Bienne). — *Puissance d'une droite par rapport à un cercle.*

I. — Puissance. — Théorème : *Etant donné tous les couples de tangentes à un cercle que l'on peut mener par les divers points d'une droite quelconque du plan de ce cercle, le produit des tangentes des demi-angles de la première tangente et du prolongement de la seconde tangente de chaque couple avec la droite donnée est constant.*

Cette constante s'appellera la puissance de la droite par rapport au cercle et nous aurons :

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi-\alpha'}{2}=\operatorname{tg}\frac{\beta}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi-\beta'}{2}=\ldots=\frac{r+p}{r-p}=\text{const.}$$

α = angle de la première tangente avec la droite
α' = » » deuxième » » »
r = rayon
p = distance du centre à la droite.

II. — Faisceaux. — Nous appellerons faisceaux de cercle F_3 ou F_4 l'ensemble des cercles admettant un même premier centre de similitude extérieur ou intérieur par rapport à tous les cercles. Nous aurons :

a) *Etant donné deux faisceaux* $F_3^{(1)}$ et $F_3^{(2)}$ *de même centre radical principal* S, *les points de coupe des tangentes extérieures communes de deux cercles quelconques des faisceaux, pris l'un dans* $F_3^{(1)}$ *et l'autre dans* $F_3^{(2)}$ *sont tous sur une même droite appelée* l'axe radical principal des faisceaux. *Les points de coupe des tangentes intérieures communes des mêmes cercles sont tous sur une autre droite appelée* l'axe radical secondaire des deux faisceaux.

Soient C_2 un cercle de $F_3^{(1)}$ et C_3' un cercle de $F_3^{(2)}$. Leurs tangentes extérieures communes se coupent en A. La droite SA est de mêmes puissances relatives par rapport à tous les cercles de $F_3^{(1)}$ et par rapport à tous ceux de $F_3^{(2)}$. Elle est encore de mêmes puissances relatives par rapport à C_2 et C_3'. Les puissances relatives par rapport aux cercles de $F_3^{(1)}$ sont ainsi les mêmes que celles par rapport aux cercles de $F_3^{(1)}$, puisqu'elles sont déterminées par C_2 et C_3'.

La droite SA est de mêmes puissances relatives par rapport à deux cercles quelconques pris, l'un dans $F_3^{(1)}$ et l'autre dans $F_3^{(2)}$.

Elle passe par les premiers centres de similitude correspondants, autrement dit les points de coupe des tangentes extérieures communes aux deux cercles sus-indiqués sont tous sur SA.

Le même raisonnement subsiste avec les tangentes intérieures et donne une nouvelle droite SD.

SA ou a_1 devient l'*axe radical principal* des deux faisceaux SD ou a_2 l'*axe radical secondaire*. Si nous désignons par $F_3^{(1)\prime}$ et $F_3^{(2)\prime}$ les faisceaux compris dans les angles opposés des précédents, a_1 est aussi l'axe radical principal pour $F_3^{(1)\prime}$ et $F_3^{(2)\prime}$ et l'axe radical secondaire pour $F_3^{(1)}$ et $F_3^{(2)\prime}$. Il en est de même pour a_2.

b) *Etant donné deux faisceaux* $F_4^{(1)}$ et $F_4^{(2)}$, *les points de coupe des tangentes extérieures communes à deux cercles pris, un dans* $F_4^{(1)}$ *et l'autre dans* $F_4^{(2)}$, *sont tous sur une même droite, l'axe* radical principal *des deux faisceaux. Les points de coupe des tangentes extérieures communes à deux autres cercles pris, l'un dans* $F_4^{(1)}$ *et l'autre dans* $F_4^{(4)\prime}$ *ou l'un dans* $F_4^{(1)\prime}$ *et le second dans* $F_4^{2)}$, *sont également tous sur une même droite*, l'axe radical secondaire *des deux faisceaux.*

III. — Involutions. — Nous considérerons maintenant un point quelconque P du plan d'un faisceau F_3 ou F_4 complété par le faisceau conjugué F_3' ou F_4', et par ce point nous mènerons deux tangentes à chaque cercle du faisceau. Soient t_1 et t_2 les deux tangentes à l'un quelconque des cercles. La puissance absolue de la droite $PS = a$ sera la même par rapport à tous les cercles du faisceau, F_3 et la même par rapport à tous les cercles du faisceau complémentaire F_3'.

Si nous posons : angle $(t_1\, a) = \alpha$ et angle $(t_2\, a) = \alpha'$, nous aurons

$$\text{Puissance de } a = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2'} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi - \alpha'}{2}.$$

Avec les deux tangentes d'un autre quelconque des cercles du faisceau nous aurons également

$$\text{Puissance de } a = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi - \alpha'}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{\pi - \beta'}{2} = \ldots = \text{constante}$$

Les bissectrices des angles compris entre a et t_1 ou a et le prolongement de t_2 donnent lieu à un produit de tangentes trigonométriques constant ; ces bissectrices forment une involution dont l'axe principal en $PS = a$.

Théorème. — *A tout point* P *du plan d'un faisceau* F_3 *ou* F_4 *de centre radical principal* S *correspond une involution de rayons. Les rayons conjugués sont les bissectrices des angles compris entre*

l'axe PS = a *et la première tangente menée de* P *à chaque cercle du faisceau ; puis entre* a *et le prolongement de la deuxième tangente menée de* P *au même cercle. Les rayons doubles sont toujours réels dans le plan d'un faisceau* F_4 *et dans l'angle intérieur du plan d'un faisceau* F_3. *Dans son angle extérieur ils sont imaginaires. Les rayons doubles réels sont les bissectrices des angles compris entre l'axe* a *et les tangentes des deux cercles du faisceau passant par le point considéré.*

3. — M. le prof. O. Spiess (Bâle). — *Problèmes de fermeture dans les courbes convexes.* — Soit C une courbe fermée quelconque; soit k une construction qui fasse correspondre chaque point A de la courbe à un autre point A_1; admettons en outre que

1° A et A_1 se déterminent l'un l'autre de façon réciproque et univoque.

2° Si A décrit la courbe dans un certain sens, A_1 la décrit en sens contraire.

La construction K « ferme » quand $A_1 = A$ *(points fixes)*; elle « ferme » si on l'exécute deux fois, quand $A_2 = A$, c'est-à-dire quand A et A_1 se correspondent mutuellement *(points mutuels)*. Le *problème de fermeture* consiste à déterminer les *points fixes* et les *points mutuels*. On reconnaît ce qui suit :

I. — Il y a toujours exactement deux points fixes ; ils séparent chaque paire de points correspondants A et A_1.

II. — Le nombre des points mutuels *peut* être fini ou infini.

III. — Si A est un point quelconque de C (ni point fixe, ni point mutuel), les points A, A_1, A_2, A_3....., obtenus par la répétition de K, sont tous différents et tendent alternativement vers les points limites

$$\lim_{k=\infty} A_{2k} = \alpha , \qquad \lim_{k=\infty} A_{2k+1} = \alpha_1 .$$

Si $\alpha_1 \neq \alpha$, α et α_1 sont des points mutuels ; si $\alpha_1 = \alpha$, α est un point fixe.

Dans la pratique ces points peuvent donc être déterminés par une répétition finie de k. La série de points A, A_{-1}, A_{-2}, A_{-3}..... obtenue par la construction inverse K^{-1} conduit à la même conclusion.

Lorsque C est *convexe*, on peut indiquer un grand nombre de ces constructions k. Soit les n points P_1, P_2, P_3... P_n dont un nombre *impair* sont à l'extérieur de C; on mène AP_1 jusqu'à son deuxième point de coupe $A_{(1)}$ avec C, — $A_{(1)}P_2$ jusqu'à $A_{(2)}$, etc. ; le point $A^{(n)} = A_1$ possède avec A les relations exigées.

On obtient ainsi par exemple, le *théorème* : « Dans chaque courbe convexe (sans angle) on peut inscrire deux polygones

impairs dont les côtés ont des directions données (en particulier, par exemple, une infinité de paires de triangles réguliers).

Les points P^k peuvent être remplacés par des courbes convexes T^k auxquelles on pourra mener des tangentes. De plus ces constructions sont soumises à la transformation dualistique.

4. — M. le prof. C. Cailler (Genève). — *Sur la Géométrie réglée imaginaire.* — Dans ma communication de Genève, j'ai entretenu la section mathématique de la géométrie des corps solides. De nouvelles recherches dont j'expose les résultats, avec tous les détails nécessaires, dans un mémoire actuellement en cours de publication dans les *Archives* de Genève, m'ont amené récemment à développer, sur l'ensemble du sujet, un point de vue inédit. Je désire en dire un mot aujourd'hui.

D'après cette nouvelle théorie, la géométrie des corps solides se confond avec la stéréométrie ordinaire, quand on prolonge celle-ci dans le domaine complexe. La première géométrie est simplement l'aspect réel de la géométrie ponctuelle imaginaire.

Le *corps solide* est le pendant réel du *point* imaginaire.

Le pendant *réel* du plan imaginaire est la figure qu'on obtient en faisant chavirer un corps solide fixe autour de toutes les droites de l'espace ; j'appelle *vrilloïde* l'ensemble ainsi engendré.

Enfin si on fait tourner et glisser un corps solide le long d'un axe fixe, on définit une *vrille* ; c'est l'apparence réelle de la *droite* imaginaire.

Les propriétés manifestées par le *corps solide*, le *vrilloïde*, et la *vrille* sont identiques à celles du *point*, du *plan* et de la *droite* de l'espace ordinaire, sauf en ceci que, dans les relations métriques, des quantités complexes se substituent aux quantités réelles. La place me manque pour justifier ici cette assertion. Je veux seulement entrer dans quelques détails touchant la *Géométrie des vrilles*, laquelle représente pour la nouvelle théorie, ce qu'est la géométrie réglée par rapport à l'espace ordinaire.

L'espace réglé est de la quatrième dimension, l'espace vrillé de la huitième. Pour transformer les unes dans les autres toutes les vrilles de l'espace il faut disposer des ∞^{12} mouvements complexes de l'espace imaginaire ; les mouvements réels ne transforment une vrille donnée qu'en ∞^6 vrilles nouvelles seulement.

Toute droite possède six coordonnées plückériennes l, m, n, p, q, r, liées entre elles par la relation

$$lp + mq + mr = 0 .$$

Toute vrille possède de même 12 coordonnées plückériennes

l', l'', m', m'', n', n'', p', p'', q', q'', r', r'', qui satisfont trois relations homogènes

$$l'l'' + m'm'' + r'r'' = 0$$
$$l'p' - l''p'' + m'q' - m''q'' + n'r' - n''r'' = 0$$
$$l'p'' + l''p' + m'q'' + m''q' + n'r'' + n''r' = 0$$

lesquelles restent invariantes dans les ∞^{12} mouvements complexes.

La forme fondamentale, en Géométrie réglée, est le complexe linéaire de Plücker et Chasles, dont l'équation dépend linéairement des coordonnées l, m, n, p, q, r.

De même dans l'espace vrillé, la forme fondamentale, qui fait symétrie au complexe, est une heptasérie, d'équation

$$a''l' + a'l'' + b''m' + b'm'' + c''n' + c'n'' + d''p'$$
$$+ d'p'' + e''q' + e'q'' + f''r' + f'r'' = 0 .$$

L'interprétation géométrique de cette condition est analogue à celle du complexe en Géométrie réglée. Elle est seulement plus compliquée. Au lieu de la *distance* et de *l'angle* qui définissent ensemble l'*intervalle* de deux droites quelconques, une nouvelle notion s'y rencontre : celle des *deux distances conjuguées* qui expriment de même l'intervalle entre deux vrilles.

J'ajoute que si on cherche à déterminer dans l'heptasérie les vrilles qui renferment un corps donné à volonté, les axes de ces vrilles décrivent un complexe linéaire Γ, lequel est ainsi associé d'une part à l'heptasérie, de l'autre au corps donné.

Il existe seulement ∞^4 complexes Γ de cette espèce, la constitution de cette famille de complexes, de second ordre, permet de définir géométriquement toutes les vrilles qui forment l'heptasérie linéaire fondamentale.

5. — M. le prof. F. Rudio (Zurich), donne un aperçu général de l'état actuel de la *publication des œuvres complètes d'Euler*.

6. — M. le prof.-Dr M. Grossmann (Zurich). — *Remarque concernant la théorie générale de la relativité.* — M. Albert Einstein, qui a établi avec MM. Lorentz et Minkowski la théorie de la relativité, vient de mener à bien, d'une manière absolument satisfaisante, la généralisation complète de cette théorie.

Il en résulte maintenant la covariance générale des équations décrivant la marche des phénomènes physiques ainsi que celle des équations différentielles qui déterminent le domaine de la gravitation. Les coordonnées de l'espace et du temps perdent ainsi le dernier reste de leur signification intuitive ; elles se réduisent entièrement à des paramètres servant à la détermination

du point dans l'espace à quatre dimensions dont la géométrie différentielle représente les phénomènes physiques. Le résultat devient encore plus éclatant lorsqu'on le compare aux idées que Riemann développait en 1854 dans son discours inaugural. (Voir l'exposé détaillé de la théorie dans : A. Einstein, *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie* ; chez Joh. Amb. Barth.)

7. — M. le prof.-Dr H. Weyl (Zurich). — *Le problème de l'Analysis situs.* — L'Analysis situs étudie les propriétés dont jouissent les variétés continues indépendamment de toute considération de mesure. On y distingue actuellement deux manières de voir, l'une se rattache à la *Théorie des ensembles* (voir les travaux de Brouwer), l'autre à l'*Analyse combinatoire* (voir l'article Dehn et Heegard dans l'Encyclopédie). Pour illustrer le sens de ces deux méthodes et leurs relations mutuelles, l'orateur reprend le problème spécial de l'Analysis situs qui joue un rôle décisif dans la théorie de Riemann des fonctions algébriques : la détermination du nombre de connexion de variétés fermées à deux dimensions.

Par la décomposition d'une telle variété en un nombre fini de *surfaces élémentaires* surgit un polyèdre (Möbius) ; on décompose encore, pour plus de simplicité, chaque polygone en triangles ; après en avoir désigné chaque sommet par des symboles quelconques, par exemple par des lettres, on peut disposer tous les triangles dont se compose la surface en un tableau où chaque triangle est caractérisé par la donnée de ses trois sommets. On obtient ainsi le « schéma » combinatoire de la surface. Deux schémas proviennent de la même surface par des triangulations différentes s'ils sont « homéomorphes », c'est-à-dire si on peut les ramener tous deux à un même troisième schéma en décomposant encore les deux surfaces. L'homéomorphie est une relation purement combinatoire entre les deux surfaces. Le principal invariant de ces schémas au sens de l'homéomorphie est le nombre de connexion $= k - e - d + 3$ ($k =$ nombre d'arètes, $e =$ nombre de sommets, $d =$ nombre de triangles) ; pour des surfaces sans anse, ce nombre est 1 (Théorème d'Euler sur les polyèdres).

Mais pour établir rigoureusement que le nombre de connexion ainsi obtenu est un invariant (au sens de l'Analysis situs) de la variété à deux dimensions primitivement obtenue, il faut recourir à des considérations d'un genre tout différent, basées sur les principes de la Théorie des ensembles. Il faut d'abord fixer exactement la notion de variété à deux dimensions ; ensuite, pour obtenir une définition du nombre de connexion indépendante de chaque triangulation, on peut suivre un chemin qui est, dans l'Analysis situs, l'analogue de ce qu'est dans la théorie des fonctions la démonstration utilisée par Weierstrass dans la théorie des intégrales abéliennes : déduire la nature et les relations des

chemins d'intégration de la manière dont les intégrales se comportent.

C'est ce qui fut effectué en détail dans cette communication.

8. — M. le prof. L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel). — *Sur l'arithmétique généralisée.* — Soit une infinité de *complexes à* n *coordonnées* tels que $(a_0, a_1, \ldots, a_n)$, où $a_0, a_1, \ldots, a_n$ représentent des nombres réels. On érige une arithmétique et une algèbre généralisées portant sur ces éléments en définissant, sur ces complexes, l'*égalité* et deux opérations qu'on appellera *addition* et *multiplication*, par analogie avec l'arithmétique ordinaire. Ces trois définitions initiales sont arbitraires, ce qui n'empêche pas les opérations qui en résultent d'être soumises à certaines *lois fondamentales*. L'orateur cite les dix lois fondamentales qui caractérisent l'arithmétique et l'algèbre classiques et rappelle le théorème établissant qu'une nouvelle extension du domaine des nombres, au delà des nombres complexes ordinaires, n'est possible qu'au prix de l'abandon d'une ou de plusieurs de ces lois fondamentales. Le développement pris jusqu'ici par l'analyse mathématique montre que les lois d'associativité et de distributivité sont les plus importantes. En maintenant ces lois et laissant tomber seulement la commutativité de la multiplication et l'exclusion des diviseurs de zéro, on arrive aux systèmes des *polytettarions*. Posant entre les coordonnées des tettarions certaines relations appropriées, on obtient d'autres systèmes de nombres hypercomplexes, par exemple les quaternions, comme cas particuliers de certaines classes de polytettarions. *Les tettarions comprennent, comme sous-systèmes, tous les systèmes possibles de nombres hypercomplexes à multiplication associative et distributive.*

Parmi les connexions remarquables entre certaines lois fondamentales régissant les opérations de l'algèbre généralisée, et les propriétés arithmétiques des domaines où ces lois sont valables, citons cette curieuse relation : soit un domaine de nombres hypercomplexes *entiers*, comprenant des complexes *irréductibles*, ou *premiers*, et α un complexe entier non irréductible de ce domaine. On pourra mettre α sous forme d'un produit de facteurs irréductibles, en imposant à ces derniers de se suivre dans un ordre tel que leurs normes suivent un ordre fixé arbitrairement pour les facteurs premiers de la norme $N(\alpha)$ du complexe entier donné α. Cette décomposition de α en facteurs premiers et *plurivoque* ou *unique*, suivant que la multiplication, dans le système envisagé, est commutative ou ne l'est pas.

9. — M. G. Pólya (Zurich). — *Un pendant du théorème d'approximation de Liouville dans la théorie des équations différentielles.* — Soit α un nombre irrationnel et soit r_n celui des nombres

rationnels de dénominateur ne dépassant pas n qui est le plus voisin de α ; d'après le théorème de Liouville la suite convergente pour toute valeur de α

$$r_1 \cdot r_2 \cdot r_3, \ldots\ldots r_n, \ldots\ldots \qquad [1]$$

ne peut pas converger avec une rapidité arbitraire si α satisfait à une équation algébrique à coefficients rationnels.

De même qu'au nombre α correspond la suite [1], on peut faire correspondre à toute fonction entière $f(x)$ la série de Taylor qui converge vers elle. Si $f(x)$ satisfait à une équation différentielle algébrique à coefficients rationnels, la série de Taylor de $f(x)$ ne peut pas converger avec une rapidité arbitraire. Comme la série de Taylor, pour des fonctions entières, converge d'autant plus vite que la valeur absolue de la fonction augmente plus lentement, on peut énoncer aussi le théorème comme suit : Si une fonction entière satisfait à une équation différentielle algébrique, sa valeur absolue ne peut pas croître aussi lentement qu'on voudra.

Le conférencier présume ce théorème, il en pose la démonstration comme problème, toutefois la démonstration est déjà établie sur plusieurs points importants.

En s'appuyant sur des travaux de MM. Hurwitz et Perron, le conférencier a obtenu certains résultats, par exemple :

La fonction entière de x

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} x^n$$

(la moitié d'une série Theta) ne satisfait à aucune équation différentielle algébrique si q est rationnel.

L'équation différentielle

$$x_{m-1}\frac{d^m y}{dx^m} + a_1 x^{m-2}\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + \ldots + a_{m-1}\frac{dy}{dx} - y = 0$$

est irréductible, en ce sens qu'aucune intégrale de cette équation ne satisfait à une équation différentielle linéaire à coefficient rationnel dont le degré soit inférieur à m.

10. — M. le Dr H Berliner (Berne). — *Deux Géométries projectives naturelles.* — Les deux géométries projectives résultant des systèmes d'abcisses et d'ordonnées angulaires (cfr. Berliner, Actes de la Société helvétique des Sc. nat. 1915, II p. 109, ou *L'Ens. math.*, 1915, p. 354) conduisent à deux géométries naturelles. Si nous définissons en effet la longueur d'un arc d'une courbe comme la limite vers laquelle tend la longueur (au sens de ces géomé-

tries métriques) d'un polygone inscrit dans l'arc de courbe, lorsque ses côtés tendent vers 0, l'*abscisse*, de même que l'*ordonnée angulaire d'un point de la courbe*, sera une fonction de la longueur de l'arc. La connaissance de cette fonction suffit pour déterminer la forme (au sens de ces géométries) de la courbe, mais pas sa position dans le plan. En effet, si l'on pose

$$A(BCQP) = (QP)_2 : (QP)_3,\ B(CAQP)$$
$$= (QP)_3 : (QP)_1,\ C(ABQP) = (QP)_1 : (QP)_2,$$

on aura

$$(QP)_i = (QP_1)_i\, P_1P_2)_i \ldots\ldots (P_{n-1}\, P_n)_i\, (P_n\, P)_i \text{ pour } i = 1, 2, 3;$$

en outre $(QP)_i = \dfrac{y - z_i}{x - z_i}$ où x et y désignent les abscisses de Q, P, dans le système que l'on fait correspondre à QP. Ainsi soit $\tau = \varphi(s)$ une fonction continue donnée; menons par un point P_0 la droite P_0P_1 l'abscisse soit $\varphi(s_0)$ dans le système de P_0; ensuite par P_1 la droite $P_1\, P_2$ dont l'abscisse soit $\varphi(s_1)$ dans le système de P_1, si la distance $P_0\, P_1 = s_1 - s_0$ (donc si $\varphi(s_0) + s_1 - s_0$ est l'ordonnée de P_1 dans le système de P_0P_1); etc...., enfin par P_{n-1} la droite $P_{n-1}\, P_n$ dont l'abscisse soit $\varphi(s_{n-1})$ dans le système de P_{n-1}, on aura

$$(P_0P_n)_i = (P_0P_1)_i : \ldots\ldots (P_{n-1}P_n)_i$$
$$= \frac{\varphi(s_0) + s_1 - s_0 - z_i}{\varphi(s_0) - z_i} \cdots\cdots \frac{\varphi(s_{n-1}) + s_n - s_{n-1} - z_i}{\varphi(s_{n-1}) - z_i}$$
$$= \prod_{\lambda=0}^{\lambda=n-1} \left(1 + \frac{\Delta s_\lambda}{\varphi(s_\lambda) - z_i}\right),$$

Faisons tendre tous les Δs_λ vers 0 en même temps que leur nombre tend vers ∞, de sorte que $\Sigma \Delta s_\lambda = s - s_0$; on aura

$$(P_0P_s)_i = \lim_{\Delta=0} \prod_{s_0}^{s} \left(1 + \frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i}\right) = \lim_{\Delta s=0} e^{\sum_{s_0}^{s} \frac{\Delta s}{\varphi(s) - z_i}} = e^{\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\varphi(s) - z_i}} \quad (1)$$

or $e^x \geqq 1 + x \geqq e^{x-x^2}$ pour $x < \sqrt{2} - 1$ (notamment $e^{x-x^2} = 1 + x - \frac{x^2}{2}[2 - (1 - x)^2 e^{\theta x(1-x)}]$, où $0 < \theta < 1$), donc

$$e^{\sum_{s_0}^{s} \frac{\Delta s}{\zeta(s) - z_i}} \geqq \prod_{s_0}^{s} \left(1 + \frac{\Delta s}{\zeta(s) - z_i}\right)$$

$$\geqq e^{\sum_{s_0}^{s} \frac{\Delta s}{\zeta(s) - z_i} - \sum_{s_0}^{s} \left(\frac{\Delta s}{\zeta(s) - z_i}\right)^2} \text{ et } \lim_{\Delta s = 0} \sum_{s_0}^{s} \left(\frac{\Delta s}{\zeta(s) - z_i}\right)^2 = 0.$$

Les sommets d'un polygone ainsi construit, dont les côtés dendent vers 0 remplissent une courbe passant par P_0, l'abscisse de chacun de ses points P_s est donnée par $\tau = \varphi(s)$; (ainsi $s - s_0$ donne la longueur du polygone et par là, comme on peut voir facilement la longueur de l'arc de P_0 à P_s), et tout arc quelconque peut être construit grâce à 1). Si $\tau = \varphi(s)$ ne donne pas l'abscisse mais l'ordonnée angulaire du point de la courbe, on trouve d'une manière analogue 2)

$$(P_0 P_s)_i = e^{\int_{s_0}^{s} \frac{ds}{\cos^2 \zeta(s)[\operatorname{tg} \zeta(s) - \operatorname{tg} z_i]}} \qquad i = 1, 2, 3).$$

Aussi bien dans la géométrie des abscisses que dans la géométrie des ordonnées angulaires $\tau = \varphi(s)$ est une *équation naturelle* de la courbe.

11. — Mme Grace-Chisholm Young (Lausanne). — L'année passée, à l'occasion de la conférence de Mme Young sur les courbes sans tangentes, M. Raoul Pictet a raconté que M. Cellérier lui avait parlé vers 1860 d'une courbe sans tangente que celui-ci avait construite. Un mémoire de Cellérier existe à ce sujet, et a paru après la mort de l'auteur dans le Bulletin de M. Darboux (1890). Il reste incertain si la courbe de Cellérier est antérieure à celle de Weierstrass ou *vice versa*. En tout cas les deux semblent être indépendantes. Après avoir parcouru le mémoire de Cellérier, Mme Young constate avec le plus grand intérêt que la courbe de Cellérier est une courbe sans tangentes dans le sens le plus large. Elle n'a pas de tangentes, ni ordinaires ni singulières.

La méthode de démonstration de Cellérier est tout à fait originale et d'une exactitude irréprochable. Comme Weierstrass il n'envisage pas la question du point de vue géométrique, et la question de tangentes singulières n'entre pas dans les recherches

ni de l'un ni de l'autre. Mais la méthode de Weierstrass est moins profonde que celle de Cellérier ; cette dernière suffit sans recherches ultérieures à trancher la question proposée.

12. — M. W. H. Young et Mme Young (Lausanne). — *La structure des fonctions à plusieurs variables.* — Le sujet de cette conférence est une généralisation pour plusieurs variables du remarquable théorème donné par M. Young à la séance de la British Association, à Leicester en 1907, d'après lequel les limites supérieures et inférieures d'indétermination $\varphi(x)$ et $\psi(x)$ de $f(x+h)$, où h est positif et s'approche de zéro, sont les mêmes que celles de $f(x-h)$, sauf dans un ensemble dénombrable de points. On exprime brièvement ce résultat en disant, qu'*il y a symétrie à droite et à gauche, sauf dans un ensemble dénombrable de points.*

Dans le plan, et dans n dimensions, nous trouvons aussi en général qu'une fonction quelconque possède une structure, pour ainsi dire cristalline, en vertu du théorème suivant :

Si $f(x, y)$ *est une fonction quelconque de* (x, y), *il y a symétrie complète autour du point* (x, y) *par rapport aux limites supérieures* $(\varphi_{++}, \varphi_{+-}, \varphi_{-+}, \varphi_{--})$ *et inférieures* $(\psi_{++}, \psi_{+-}, \psi_{-+}, \psi_{--})$ *d'indétermination de* $f(x \pm h, y \pm k)$ *sauf pour des points tout à fait exceptionnels. Ces points gisent sur un ensemble dénombrable de courbes monotones, et forment en conséquence un ensemble simple de mesure nulle.*

Pour une fonction de n *variables l'ensemble exceptionnel est toujours de mesure nulle, et gît sur un ensemble dénombrable de variétés de* $(n-1)$ *dimensions.*

Ce théorème gagne en intérêt lorsqu'on le précise davantage. Si les φ's par exemple, ne sont pas tous égaux, on peut distinguer les cas suivants :

I) *Un des* φ's *est plus grand que chacun des autres (ensemble dénombrable) ;*

II) *Deux des* φ's *sont égaux et plus grands que chacun des autres (dénombrable)* ;

III) *Deux des* φ's *sont égaux et les deux autres sont égaux ;*

a) *il y a symétrie latérale*

$$(\varphi_{++} = \varphi_{-+},\ \varphi_{+-} = \varphi_{-+}) \text{ ou } (\varphi_{++} = \varphi_{+-},\ \varphi_{-+} = \varphi_{--}) :$$

b) *il y a manque complet de symétrie latérale*

$$(\varphi_{++} = \varphi_{--},\ \varphi_{+-} = \varphi_{-+}) ;$$

IV) *Trois des* φ's *sont égaux et plus petits que le dernier.*

Les cas III*b* et IV correspondent au cas général de notre théo-

rème. Le cas III*a* est particulièrement intéressant et caractéristique pour notre système de coordonnées :

Les points où il y a symétrie à droite et à gauche gisent sur un ensemble dénombrable de lignes horizontales, et ceux où il y a symétrie au-dessus et au-dessous sur un ensemble dénombrable de lignes verticales.

On voit clairement à présent les divers cas dans l'espace à n dimensions. La méthode de démonstration dépend du fait que chaque fois qu'on a deux φ's différant par une quantité plus grande que c, où c est fixe, le point x n'est pas un point limite de points du même genre dans le quadrant correspondant au plus petit des deux φ's. Attaché au point x on aura donc un petit « drapeau » dans l'intérieur duquel, au sens étroit, il n'y aura pas de points de l'ensemble. Il s'agit de démontrer que les ensembles de points avec un, deux ou trois « drapeaux » par point, ont certaines propriétés. En particulier *les ensembles à trois « drapeaux » sont dénombrables.*

13. — M. le prof. Dr W.-H. Young, F. R. S. (Lausanne). — *Les intégrales multiples et les séries de Fourier.* — Le conférencier présente d'abord quelques remarques préliminaires sur sa méthode de développer la théorie de l'intégration simple [1].

1. *La méthode s'applique également quand l'intégration est ordinaire, ou par rapport à une fonction à variation bornée, soit continue soit discontinue.*

2. *Elle s'applique également quand l'intégration est multiple ;* ici on remarquera que l'intégration peut être par rapport à une fonction $g(x, y, \ldots)$ à variation bornée, continue ou discontinue, et que l'intégration ordinaire en est un cas spécial, la fonction par rapport à laquelle l'intégration se fait étant par exemple xy, quand il s'agit d'intégration double ordinaire.

3. *Dans cet exposé de la théorie il n'est pas nécessaire de recourir à une perspective illimitée de suites monotones*, refoulant de cette manière — comme on pourrait prétendre — les vraies difficultés, sans les surmonter. Il s'agit seulement de définir exactement les intégrales des fonctions semi-continues de M. Baire, qui sont précisément les intégrales par excès et par défaut de M. Darboux — et d'appliquer ensuite le théorème suivant :

L'intégrale d'une fonction f (x) *est en même temps la borne supérieure des intégrales des fonctions semi-continues supérieurement plus petites que* f (x), *et la borne inférieure des intégrales des fonctions semi-continues inférieurement plus grandes que* f (x) [2].

4. *La méthode n'exige pas une connaissance préalable de la théorie des ensembles et en particulier de la théorie de la mesure ;*

Le conférencier définit la mesure en second lieu, comme un genre spécial d'intégrale. L'avantage du point de vue logique, même quand l'intégration est ordinaire, est que le traitement est uniforme. En effet, pour traiter les ensembles de points en général, sans rester seulement parmi les ensembles

[1] Voir dans l'*Ens. math.* les comptes rendus des séances tenues à Genève (1915) et à Frauenfeld (1916).

[2] Paris, *Comptes rendus*, t. 162, p. 909, séance du 13 juin 1916.

élémentaires, dénombrables, ou fermés, il faut précisément procéder par la méthode des suites monotones. La définition de la mesure en général n'est pas justifiée sans l'emploi d'un raisonnement identique à celui que le conférencier adopte dans sa théorie de l'intégration. Dans le traitement de cette dernière théorie fondé sur la mesure, au contraire, on suppose toutes les difficultés concernant la mesure surmontées, et on recommence par une définition toute différente de l'intégrale. Par ce fait le manque de logique est en quelque sorte voilé.

Mais quand l'intégration n'est pas ordinaire, l'avantage de la nouvelle méthode saute aux yeux. Une définition préalable de la mesure d'un ensemble de points par rapport à une fonction à variation bornée serait artificielle et privée de toute signification géométrique.

D'un autre point de vue, on se demande pourquoi définir d'abord, et d'une manière géométrique, les intégrales des fonctions à deux valeurs — c'est-à-dire la mesure — pour en déduire les intégrales des fonctions générales ? Les fonctions à deux valeurs ne sont pas plus élémentaires que les autres. La complexité d'une fonction ne dépend pas des nombres de valeurs qu'elle prend. Les fonctions les plus employées prennent en effet toutes les valeurs entre leurs bornes supérieures et inférieures. C'est le nombre des limites nécessaires pour définir et exprimer une fonction qui en détermine la place dans l'armée des fonctions, et ceci ne dépend guère du nombre des valeurs qu'elle prend.

Après ces remarques préliminaires le conférencier passe à la considération de l'intégrale multiple

$$\int f(x, y, z, \ldots)\, dg(x, y, z, \ldots) .$$

Il rappelle la définition de Stieltjes, étendue, comme elle peut évidemment être, à plusieurs variables. Dans le plan, par exemple, nous divisons le rectangle $(0, 0 ; a, b)$ en plusieurs petits rectangles $(x, y ; x + h, y + k)$. Par rapport à chacun de ceux-ci, nous formons le terme $f(\xi, \eta)\, g(x, y)$, où

$$\Delta g(x, y) = \Big[g \Big]_{x, y}^{x + h, y + k}$$

$$= g(x + h, y + k) - g(x, y + k) - g(x + h, y) + g(x, y) .$$

Nous faisons la somme de ces termes ; c'est la somme approximative de l'intégrale ; puis nous passons à la limite de la manière habituelle dans la définition de l'intégrale,

$$\int f(x, y)\, dg(x, y) = \lim \Sigma f(\xi, \eta)\, \Delta g(x, y) .$$

Ici $f(x, y)$ est continue. Si elle est semi-continue supérieurement, elle est la limite d'une suite monotone non-croissante de fonctions continues, dont les intégrales, ainsi définies, ont pour

limite l'intégrale de f, par définition. Si nous préférons, nous pouvons donner une autre définition, qui cependant revient au même. On remplace $f(\xi, \eta)$ dans la somme approximative par la borne supérieure de f dans le petit rectangle. La limite obtenue sera donc l'intégrale par excès de M. Darboux, et sera, selon le conférencier, l'intégrale de la fonction semi-continue supérieurement $f(x, y)$.

Dans la formule il faut supposer les périmètres des rectangles construits de manière à ne pas passer par aucun point de discontinuité de la fonction g. Ceci est possible en vertu du théorème que *ces points de discontinuité gisent sur un ensemble dénombrable de parallèles aux axes*. Si l'on préfère ne pas éviter ces points, on peut modifier légèrement la formule approximative comme dans le cas d'une variable.

On définit d'une manière analogue l'intégrale d'une fonction semi-continue inférieurement. Enfin l'intégrale d'une fonction f générale est la borne supérieure des intégrales des fonctions semi-continues supérieurement plus petites que f, et en même temps la borne inférieure des intégrales des fonctions semi-continues inférieurement plus grandes que f. Ces bornes coïncident en effet pour chaque fonction f bornée, définie par n'importe quel procédé mathématique, et pour chaque fonction non-bornée ayant par rapport à g une intégrale qui est absolument convergente.

Par moyen de la table suivante le conférencier donne des formules qui permettent d'exprimer les intégrales doubles d'une manière plus familière, en employant des intégrales répétées. Dans le domaine de l'intégration ordinaire les deux notions d'*intégrale multiple* et d'*intégrale répétée* sont identiques. Elles le sont toutes les fois que la fonction g est le produit d'une fonction de x par une fonction de y. Mais quand g n'est pas de cette nature, les théorèmes donnés ont une importance capitale.

Si

$$g = \int \varphi(x, y)\, d(xy), \quad \left\{ \int_{0,0}^{a,b} f(x, y)\, dg(x, y) = \int_{0,0}^{a,b} f(x, y)\, \varphi(x, y)\, d(xy). \right.$$

$$g = \int \varphi(x, y)\, ds(x, y), \quad \left\{ \int_{0,0}^{a,b} f(x, y)\, dg(x, y) = \int_{0,0}^{a,b} f(x, y)\, \varphi(x, y)\, ds(x, y). \right.$$

$$g = \int \frac{dg(x, y)}{dx}\, dx \quad \left\{ \int_{0,0}^{a,b} f(x, y)\, dg(x, y) = \int_0^a dx \int_0^b f d \left\{ \frac{dg}{dx} \right\}. \right.$$

est une fonction monotone non-décroissante.

où $\frac{dg}{dx}$, un des nombres dérivés de $g(x, y)$, est une fonction monotone.

$F = \int f(x, y)\, dx$

$$\int_{0,0}^{a,b} F(x, y)\, dg(x, y) = \int_{y=0}^{b} \Big[F\, dg \Big]_{x=0}^{a} - \int_{0}^{a} dx \int_{0}^{b} \frac{dF}{dx}\, dg(x, y).$$

$F = \int f(x, y)\, dx$

$G = \int g(x, y)\, dy$

$$\int_{0,0}^{a,b} F(x, y)\, d\,G(x, y) = \int_{y=0}^{b} \left[F \frac{d\,G}{dy} \right]_{x=0}^{a} dy.$$

$\Phi = \int_{0,0}^{x,y} f(x, y)\, d(x, y)$

$$\int_{0,0}^{a,b} \Phi(x, y)\, dg(x, y) = \Big[fg \Big]_{0,0}^{a,b} - \int_{x=0}^{a} \left[\frac{d\,\Phi}{dx}\, g(x, y) \right]_{y=0}^{b} dx$$

$$\frac{d}{dx} \int_{0,0}^{x,y} f(x, y)\, dg(x, y) = \int_{0}^{y} f(x, y)\, d \left\{ \frac{dg}{dx} \right\}.$$

Théorème de l'intégration par parties : —

$$\int_{0,0}^{a,b} g(x, y)\, df(x, y) = \Big[fg \Big]_{0,0}^{a,b} - \int_{0}^{a} \Big[fdg \Big]_{y=0}^{b} - \int_{0}^{b} \Big[fdg \Big]_{x=0}^{a} + \int_{0,0}^{a,b} fdg.$$

Théorème de la moyenne, type Ossian Bonnet.

Si $g(x, y.....)$ et tous ses increments sont $\geqq 0$,

$$\int_{0,0,\ldots 0}^{a,b,\ldots} fgd(xy.....) = g(a, b,.....) \int_{X,Y.....}^{a,b,\ldots} fd(xy.....)$$

où $(X, Y...)$ est un certain point du « rectangle » $(0, 0.....;\ a, b,.....)$.

Quant aux applications à la théorie des séries de Fourier, le conférencier se borne à citer ses nouveaux résultats dans le cas d'une variable et fait remarquer qu'il n'en a trouvé aucun qui ne puisse être étendu à n variables. On peut citer les cas suivants :

I. *La série de Fourier de* f(x) *converge au point* x, *si*

$$\frac{1}{u} \int \left| d(u(f(x+u) + f(x-u))) \right|$$

est bornée.

II. *La série alliée de la série de Fourier de* f(x) *converge au point* x, *si*

$$\frac{1}{u} \int \left| d(u(f(x+u) - f(x-u))) \right|$$

est bornée, et

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{\pi} (f(x+u) - f(x-u)) \cot \tfrac{1}{2} u \, du$$

existe.

III. *Si* $f(+0)$ *et* $f(-0)$ *existent,*

$$\lim_{n=\infty} n a_n = 0 \quad , \qquad \lim_{n=\infty} n b_n = \frac{1}{\pi}(f(+0) - f(-0))$$

quand la limite est prise à la manière de Cesàro, index $(1+k)$, $0 < k$.

14. — O. Bloch (Berne). — *Sur la géométrie dans le plan d'une variable complexe.* — Des problèmes électrotechniques ont conduit l'auteur à la considération de fonctions rationnelles de la forme

$$V = \frac{A + Bv + Cv^2 + \ldots + Mv^m}{D + Ev + Fv^2 + \ldots + Nv^n}$$

dans lesquelles v désigne un paramètre *réel*, A, B, C, etc., des constantes quelconques, complexes ou réelles. V est ainsi une complexe variable dont la représentation géométrique dans le plan de Gauss est une courbe unicursale.

L'auteur développe quelques-uns des résultats de ses recherches, entre autres les suivants : l'expression $V = \frac{A + Bv + Cv^2}{D + Ev + Fv^2}$ représente quand les six coefficients sont complexes, une quartique bi-circulaire dans une position quelconque ; quand les trois coefficients du numérateur sont seuls réels, on obtient une de ces quartiques avec un point double à l'origine. Si, dans l'un des deux cas précédents, $F = 0$, la quartique se change en une cubique circulaire. Quand A, B, C sont complexes, D, E, F réels, l'équaquation précédente représente une conique générale ; si $C = 0$, la conique passe par l'origine. On obtient facilement les équations des limaçons de Pascal et les équations focales des coniques. La discussion des équations conduit à des modes nouveaux de génération de courbes connues et aussi à des courbes nouvelles.

Les différentes courbes unicursales représentées sont différenciées par le nombre plus ou moins grand des termes au numérateur et au dénominateur de V et par la nature (complexe ou réelle) des coefficients. Les expressions V avec quatre termes au numérateur et au dénominateur donnent déjà 255 combinaisons différentes. Chacune d'elles représente un groupe de courbes renfer-

mant un plus ou moins grand nombre de cas particuliers. Ainsi l'expression $V = \frac{A + i(A + C)v + Cv^2}{1 + iv}$, où A et C sont complexes, est l'équation de la strophoïde droite en position quelconque ; celle-ci se présente comme un cas particulier d'une cubique circulaire. Il peut aussi arriver que des expressions différentes donnent la même courbe.

L'auteur renvoie pour plus de détails et, en particulier, pour le traitement des problèmes fondamentaux de la géométrie analytique (problèmes d'intersection, de tangentes, etc.), concernant ces courbes, à un travail paru dans la *Schweiz. Bauzeitung* (LXVIII, nos 21 et 22) et à une publication qui paraîtra prochainement sous le titre *Ortskurven der graphischen Wechselstromtechnik*, chez Rascher & Cie, à Zurich.

Nouvelles diverses. — Nominations.

Etats-Unis. — Les mathématiciens américains se sont réunis à New-York du 27 au 30 décembre 1916. Les deux premières journées ont été réservées à la 23e réunion annuelle de la Société mathématique américaine (*American mathematical Society*), présidée par M. E. W. Brown. Plus de 130 membres, sur 732 que compte la Société, ont pris part aux séances. M. L. E. Dickson a été appelé à la présidence pour 1917.

Les deux journées suivantes ont été consacrées à la 2e réunion annuelle de la *Mathematical Association of America*, qui s'occupe plus particulièrement des questions de l'enseignement des mathématiques. M. Fl. Cajori a été élu président pour 1917.

France. — *Académie des Sciences.* M. Emile Picard a été élu secrétaire perpétuel, pour les sciences mathématiques et physiques, en remplacement de Gaston Darboux. Né à Paris le 24 juillet 1856, M. Picard fait partie de l'Académie des Sciences depuis le 11 novembre 1889 où il a succédé à Halphen.

Suisse. — M. A. Speiser a été nommé professeur de mathématiques à l'Université de Zurich.

Nécrologie.

Nous avons le regret d'apprendre la mort du général Bassot, membre de l'Académie des Sciences de Paris et du Bureau des longitudes, décédé à l'âge de soixante-treize ans.

H. Dufumier. — La *Revue de Métaphysique et de Morale* (no de janvier 1917) annonce la mort de son jeune collaborateur, le capitaine Henri Dufumier, tombé au champ d'honneur. « C'est une

perte irréparable pour la philosophie française. Depuis la mort déplorable de notre cher Couturat, nous avions reporté sur lui nos plus légitimes espérances. Henri Dufumier était déjà un maître de cette science difficile de la logistique qui suppose elle-même la connaissance approfondie des mathématiques, puisque, selon sa propre théorie, elle doit en sortir inductivement. » Il avait pris une part active au 1er Congrès de philosophie mathématique, tenu à Paris du 6 au 8 avril 1914.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

Compte rendu des travaux des Sous-commissions nationales.

(25e article)

SUISSE

Mathématiques et Enseignement secondaire suisse

d'après le rapport de M. K. Brandenberger [1].

Peu de questions sont aussi importantes dans les pays civilisés que celles de l'enseignement secondaire. Sa tâche n'est pas facile à définir, mais étant destiné dans chaque nation à former pour la plus grande part la génération cultivée du lendemain, il ne peut que manquer son but s'il n'arrive à développer, à côté d'un amour ardent du vrai, un enthousiasme sincère pour le beau et le bien.

La pleine possession de soi-même, qu'on voudrait rencontrer chez tout adolescent, ne s'acquiert que lentement. Pour que l'école puisse y conduire, il faut qu'elle inculque à l'enfant, en même temps qu'une vive affection pour le milieu auquel il appartient, le sentiment non moins net, de ce qu'il est, et doit être en tant que membre de l'humanité entière. Le jeune homme doit donc être amené, par l'instruction qu'il reçoit, à gagner en individualité, comme aussi à devenir chaque jour plus conscient de son universalité.

L'école cherche à atteindre le premier de ces buts par l'étude de la langue, de la littérature, de l'histoire et de la géographie du pays auquel elle appartient. Il s'agit ici de ce que l'on peut appeler l'éducation nationale. Elle poursuit le second en mettant le plus possible la jeunesse en relation avec ce qui n'est plus l'apanage exclusif de personne, avec les langues mortes, par exemple, les sciences en général ou les mathématiques.

C'est en se plongeant dans ces grandes manifestations que l'esprit se met

---

[1] Dr K. Brandenberger, *Der mathematische Unterricht an den schweizerischen Gymnasien u. Realschulen*, 1 vol. in-8°, 167 p., fr. 3.50 ; Georg & Cie, Bâle et Genève (fascicule 4 des Rapports de la sous-commission suisse, publiés sous la direction de H. Fehr)

le mieux en contact avec l'infini. Il semble cependant que rien n'établit, autant que les mathématiques et d'une manière aussi péremptoire, l'universalité de notre entendement.

La Société suisse des Professeurs de mathématiques, réunie à Baden en octobre 1916, avait à se prononcer sur l'importance réciproque de l'éducation nationale et de l'éducation qui a sa base dans l'étude un peu approfondie des sciences mathématiques [1]. Le débat qui n'est pas clos, figure encore à l'ordre du jour de la prochaine assemblée. Il serait donc prématuré de vouloir déjà prendre parti. Ce que nous voudrions souligner, c'est l'importance qu'il y a pour quiconque s'intéresse à la cause, à reprendre en mains l'admirable rapport de M. Brandenberger sur les mathématiques dans l'enseignement secondaire suisse. Il semble vraiment difficile, sans l'étude préalable de ce beau travail, de se prononcer avec quelque compétence sur la question soulevée.

Nous allons, pour cette raison, en donner une analyse succincte, d'autant plus volontiers, d'ailleurs, que ce document remarquable n'a pas encore été présenté aux lecteurs de ce journal.

Dans cette étude, qui remonte à 1911 déjà, mais dont l'actualité est encore entière, M. Brandenberger a réuni, en un seul tout, l'ensemble des résultats d'une enquête organisée par la sous-commission suisse d'enseignement mathématique. Les indications recueillies proviennent de la Suisse entière et sont aussi complètes que possible, car l'auteur, pendant l'élaboration de son œuvre, n'a jamais craint de demander de tous côtés les renseignements qu'il jugeait encore nécessaires. L'ouvrage débute par des considérations sur l'influence exercée par la Confédération sur les établissements secondaires de son territoire. Cette influence a sa source dans les conditions qu'elle impose, 1° aux futurs étudiants en médecine, 2° aux jeunes gens qui, se préparant à la carrière d'ingénieur, se proposent de passer par l'Ecole polytechnique. Tous les établissements suisses, ou du moins la plus grande partie d'entre eux, se trouvent dans la nécessité d'organiser leur programme en tenant compte de ces deux facteurs. Leur diversité n'en est pas moins grande. On le constate immédiatement si l'on prend la peine d'examiner les tableaux constitués par M. Brandenberger. Chacun d'eux indique exactement, mais d'une manière schématique, en même temps que l'âge de l'écolier, le nombre correspondant de leçons de mathématiques qu'il reçoit par semaine dans chaque discipline. Ces tableaux très condensés permettent de faciles comparaisons. Ils sont au nombre de soixante, répartis sur douze pages. M. Brandenberger les discute avec soin, de sorte qu'on se trouve bien vite au courant de leurs moindres particularités.

Le second chapitre est consacré à la valeur éducative de l'enseignement mathématique, tel qu'on le comprend en Suisse, ainsi qu'à sa portée pratique. Pour le caractériser M. Brandenberger donne une liste de problèmes composés dans les différentes écoles à l'occasion des examens de maturité. A chaque école correspond un groupe spécial ; il n'y a donc qu'à considérer chacun d'eux pour avoir une idée de la matière enseignée dans l'établissement.

M. Brandenberger parle au troisième chapitre des programmes d'enseignement. Ceux-ci sont aussi variés que possible, autant au point de vue de

---

[1] Voir l'*Ens. Math.*, t. XVIII, année 1916, p. 441. — (Voir aussi dans le présent fascicule, la conférence de M. Roorda. Réd.)

la forme qu'à celui du fond. Leur variété n'a d'égale que celle de l'organisation des écoles. Pour faciliter les comparaisons, deux tableaux sont présentés ; l'un pour les gymnases proprement dits, l'autre pour les écoles scientifiques. Ils indiquent d'une manière simple ce qui se fait respectivement en plus et en moins des exigences fédérales. Au premier coup d'œil on s'aperçoit que les écoles ont plutôt la tendance à dépasser de beaucoup ces dernières et que leur enseignement, pour certains chapitres spéciaux, est souvent beaucoup trop complet. D'une manière générale, elles s'efforcent aussi d'initier les élèves à des applications pratiques. D'un autre côté, la notion de fonction paraît jouer de plus en plus un rôle essentiel. Il serait toutefois désirable que toute modification heureuse dans un plan d'études comportât en même temps la disparition des chapitres devenus inutiles. Ce fait est trop rare, malheureusement.

Il est enfin impossible d'expliquer d'une manière plausible la grande diversité des programmes, si ce n'est en remarquant que les écoles secondaires sont cantonales et quelquefois même municipales ou communales. Ceci a son bon et son mauvais côté. Cependant on peut se demander si cette grande indépendance à l'égard de la Confédération n'est pas plutôt avantageuse. Elle facilite, et de beaucoup, l'introduction des réformes reconnues nécessaires par le personnel enseignant.

Une des parties les plus intéressantes du volume est le quatrième chapitre, où M. Brandenberger traite des méthodes d'enseignement. Ce chapitre, le plus développé de tous, comprend trois divisions. Dans les deux premières, qui se rapportent l'une à l'arithmétique, l'algèbre et l'analyse, l'autre à la géométrie, les vues de chacun de ses correspondants occasionnels sont exposées avec clarté et netteté. On y verra, pour prendre un exemple au hasard, parmi les très nombreuses questions examinées, la façon dont on envisage, dans les différentes écoles secondaires suisses, l'analyse combinatoire et les sujets qui s'y rattachent jusqu'à la théorie des assurances, en passant par la formule du binône, les déterminants et le calcul des probabilités.

Après avoir ainsi donné l'opinion de chacun, M. Brandenberger émet aussi la sienne. C'est ainsi qu'il traite tous les chapitres spéciaux, qu'il s'agisse, pour ne citer que les extrêmes, d'arithmétique élémentaire ou de calcul différentiel et intégral, de planimétrie ou de dessin de machines.

La troisième division du même chapitre se rapporte à l'enseignement mathématique considéré à un point de vue tout à fait général. Au § 30, l'auteur montre ce qu'un élève normal doit être susceptible d'en retirer. Au § 31, il insiste sur la méthode à suivre dans l'exposition et l'utilité d'une bonne préparation pédagogique du futur maître. Il reconnaît volontiers que quelques-uns d'entre eux possèdent un don inné d'enseignement, mais pour ceux-là aussi, il pense qu'une initiation à la pédagogie, loin d'être superflue, ne peut présenter au contraire que de très sérieux avantages.

Le § 32 se rapporte à la manière dont l'enseignement des disciplines mathématiques doit être coordonné. M. Brandenberger signale à ce propos bon nombre d'objets de leçons sur lesquels les maîtres feraient beaucoup mieux de ne pas appuyer[1].

---

[1] Bien des propositions de M. Brandenberger ont fait du chemin depuis la publication de son rapport. C'est ainsi que dans sa séance d'octobre 1915, à Baden, la Société des Professeurs secondaires de mathématiques a examiné avec M. Otti, comme rapporteur, quels chapitres on pourrait actuellement supprimer des programmes d'enseignement. Voir l'*Ens. Math.*, t. XVIII, année 1916, p. 136.

Relativement à l'analyse combinatoire, mentionnée plus haut, il remarque expressément qu'il est parfaitement inutile de s'en occuper en détail. Il voudrait d'autre part que l'on tendît toujours plus à concentrer l'enseignement mathématique autour d'une seule et unique notion, celle de fonction ou, comme on peut dire aussi, celle de dépendance fonctionnelle. En arithmétique, en algèbre, comme en géométrie, le maître peut très bien parvenir à ce que, peu à peu, cette notion finisse par prendre une place prépondérante dans toutes les considérations. « L'instruction et l'éducation, dit M. Brandenberger, ont comme but ultime la formation de la volonté. Mais la volonté n'existe que quand il n'y a dans le savoir ni contradiction, ni manque d'unité. Pour qu'il puisse en être ainsi, il est donc indispensable que la communication de nouvelles connaissances se fasse en observant aussi strictement que possible un seul et unique principe, celui de la concentration. »

Ce principe de concentration ne doit pas être appliqué aux mathématiques seules. Il est nécessaire qu'on s'en souvienne aussi pour la coordination de l'ensemble des cours d'un même établissement. M. Brandenberger le dit en passant, mais sans s'arrêter sur cette question si importante qui l'aurait entraîné loin du cadre qu'il s'était imposé.

Dans sa belle conférence [1], sur *l'adaptation de l'enseignement secondaire aux progrès de la science*, faite en avril 1914, à Paris, à l'occasion de la réunion internationale de l'Enseignement mathématique, M. Borel a parlé de ce sujet si digne d'attention. Nous y renvoyons le lecteur.

La question des examens est traitée dans le cinquième chapitre de l'ouvrage que nous analysons, tandis que celle de la formation effective des professeurs au point de vue pédagogique [2] est examinée dans le sixième et dernier.

Ce qui frappe dans l'enseignement suisse à tous les degrés et quelles que soient les disciplines scientifiques ou littéraires que l'on considère, c'est son immense diversité. D'un endroit à un autre, l'organisation des écoles, les matières professées appartenant à un même domaine, les exigences relatives aux membres du corps enseignant varient pour ainsi dire du tout au tout. Il n'y a pas là de grands inconvénients pour la formation générale des esprits, puisque partout l'enseignement est compris de la façon la plus digne, et que c'est en toute conscience que les maîtres suisses se dévouent à leurs délicates fonctions. On peut même prétendre qu'il n'en résulte rien de fâcheux non plus pour la formation de l'intelligence mathématique proprement dite. La science mathématique, en effet, pas plus qu'une autre, n'a besoin, pour être acquise, de chemins tracés à l'avance et fondés sur des principes immuables, fruits eux-mêmes d'expérience plusieurs fois séculaires. Le sentiment du contraire est comme un reste de scolastique qui ira toujours en s'affaiblissant.

Comme le faisait remarquer M. Roorda à Baden [3], en octobre 1916, il n'y a pas entre l'esprit géométrique et l'esprit de finesse, une opposition aussi

---

[1] Voir l'*Ens. Math.*, t. XVI, année 1914, p. 198.

[2] A ce point de vue, les idées émises par M. Brandenberger n'ont cessé de porter des fruits. Voir, par exemple, dans l'*Ens. Math.*, t. XVI, année 1914, p. 138, les vœux exprimés en 1913 par la Société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire. On sait aussi que l'Ecole polytechnique a institué depuis plusieurs années des cours de méthodologie et de didactique mathématique, cours dont M. Brandenberger a la direction.

[3] Voir sa conférence dans le présent fascicule.

radicale que se l'imaginait peut-être Pascal. Les faits semblent réfuter chaque jour davantage les affirmations à ce propos du si célèbre mathématicien. « La représentation que l'on se fait souvent de la science mathématique, comme une série linéaire ou un petit nombre de séries linéaires, dans chacune desquelles l'ordre rigoureux des antécédents et des conséquents ne peut pas être modifié [1] », est erronée. « Les véritables éléments des mathématiques, dont on ne peut pas se passer pour aller plus loin, se réduisent à très peu de chose ; aux notions d'arithmétique et de géométrie nécessaires pour comprendre et appliquer le système métrique, il suffit de joindre les principes de la notation algébrique pour avoir une base solide à partir de laquelle on peut étudier les mathématiques dans des directions variées, sans qu'un ordre de matières particulier soit imposé autrement que par la tradition et les usages [2]. »

Si donc quelle que soit l'organisation de chaque école, et plus spécialement celle de son enseignement mathématique, on s'en tient autant qu'on le peut à une concentration de l'enseignement, la formation des intelligences ne souffrira pas.

Mais il y aura d'autres inconvénients. Si les écoles de tous les degrés se tiennent trop isolées les unes des autres, et ne cherchent pas à resserrer plus fortement les liens qui les unissent, bien des progrès désirables en matière de solidarité nationale, ne pourront se faire.

Les programmes de tous nos établissements d'enseignement doivent être coordonnés afin de permettre aux élèves suisses de fréquenter indifféremment ces établissements, car cette fréquentation ne pourra que nous rapprocher plus encore, malgré nos différences ethniques. Ceci permettra également de mieux utiliser nos nombreuses richesses intellectuelles. On ne peut donc que s'associer au vœu formulé par M. Brandenberger à la page 64 de son bel exposé, vœu qui, par les travaux de la Société des Professeurs de mathématiques, se trouve déjà en voie de réalisation, et demander avec lui l'élaboration en commun des programmes concernant notre enseignement secondaire. Il est à désirer aussi qu'on fasse de même pour l'enseignement universitaire. La Société mathématique suisse y contribuera sans doute. De toutes façons, il semble possible de parvenir un jour à l'unité sans tomber, pour cela, dans l'uniformité.

Mars 1917. Gustave Dumas (Lausanne).

---

[1] Borel, *loc. cit.*, p. 206.
[2] Borel, *loc. cit.*, p. 207.

BIBLIOGRAPHIE

Annuaire pour l'an 1917, publié par le Bureau des Longitudes. — 1 vol. in-16 de près de 700 p., avec 11 fig., 5 cartes en couleurs et 2 portraits ; 2 fr. ; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

L'Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1917, si précieux par le nombre des documents qu'il contient, vient de paraître. Cet excellent Recueil renferme cette année, après les documents astronomiques, des Tableaux relatifs à la Métrologie et à la Météorologie.

Cet Ouvrage ne se trouvera pas seulement sur la table du technicien, du physicien, du mathématicien ; chacun voudra le consulter pour avoir sous les yeux la liste des constantes usuelles, et aussi pour lire les intéressantes Notices de cette année : *Le calendrier babylonien*, par G. Bigourdan ; *L'avance de l'heure légale pendant l'été de l'année 1916*, par J. Renaud ; *La détermination du Mètre en longueurs d'ondes lumineuses*, par M. Hamy.

Dr B. Gonggrijp. — **Logarithmische en Goniometrische Tafels en Bijtafels.** — 1 vol. in-8° de 230 pages ; 1 fl. 70 ; P. Noordhoff, Groningen, 1916.

Ces nouvelles tables sont divisées en plusieurs parties. La première donne, avec cinq décimales, les logarithmes des nombres ordinaires jusqu'à 10,800. Pour les 800 derniers nombres les logarithmes ont même six décimales. Les nombres sont présentés par groupes de 10 dont on a les logarithmes sur une même ligne horizontale. Par exemple on lit

		0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
491	**69**	108	117	126	135	144	152	161	170	179	188

ce qui indique que le logarithme de 4910 a 69108 pour mantisse. Pour 4911, 4912,... les mantisses sont respectivement 69117, 69126,...

Cette disposition est appuyée d'une très grande clarté matérielle, d'une très grande correction typographique. Il n'y a ainsi que 1080 lignes a manier. Les différences se lisent très clairement dans le sens horizontal comme on peut d'ailleurs s'en convaincre sur la ligne ici transcrite.

La seconde partie est consacrée à la trigonométrie. Elle donne les logarithmes des sinus, tangentes, cotangentes, cosinus de tous les arcs pris de minute en minute.

Les procédés d'interpolation sont variés. Pour les deux premiers degrés nous retrouvons celui employé dans les tables françaises de J. Houël. On réduit le petit arc en secondes ; on cherche, dans la première partie, le logarithme de ce nombre de secondes et on y ajoute le logarithme du rap-

port du sinus ou de la tangente à l'arc ainsi évalué. Ce logarithme de rapport est donné en bas de page.

Pour les trois degrés suivants, les interpolations peuvent se faire sans procédé spécial mais comme elles sont assez laborieuses, des tableaux d'interpolation forment des pages spéciales respectivement situées à gauche des six pages consacrées aux six demi-degrés considérés.

Les « Bijtafels » sont des tables auxiliaires extrêmement pratiques. La première, A, est une table très condensée d'antilogarithmes. B donne les carrés, cubes, racines et inverses pour les nombres de 1 à 100. C est d'une disposition très ingénieuse pour donner les longueurs d'arcs de cercle composés de degrés, minutes, secondes. D donne les logarithmes de $1 + r$ pour les calculs financiers. E se rapporte aux constantes usuelles. F et G convertissent les logarithmes ordinaires en logarithmes népériens et réciproquement. H donne les valeurs de

$$2 \sin \frac{a}{2} \ , \ 2 \operatorname{tang} \frac{a}{2} \ ,$$

les arcs a étant situés dans les deux premiers quadrants et exprimés en degrés.

Enfin des tables donnent les valeurs naturelles des sinus, tangentes, cotangentes, cosinus pour tous les arcs du premier quadrant pris de minute en minute. Pour les arcs inférieurs à 6 degrés, un appendice assure toujours cinq chiffres *significatifs*.

L'ensemble de tout ceci constitue un beau recueil d'une perfection matérielle au-dessus de tout éloge. A. Buhl (Toulouse).

P. Wijdenes. — **Logarithmen en Rentetafels.** — 1 vol. in-8° de 64 pages, 0 fl. 50 ; Groningen, P. Noordhoff, Groningen 1916.

Ces tables constituent un complément de celles du Dr B. Gonggrijp, complément adapté aux problèmes financiers. On retrouve d'abord la table de logarithmes pour les entiers de 1 à 10.800.

Viennent ensuite les puissances de $(1 + r)^n$ où r varie par demi-centièmes de 0,02 à 0,06 alors que n varie, par valeurs entières, de 1 à 35. Puis viennent des résultats analogues pour n négatif. Les tables suivantes sont consacrées à

$$\Sigma (1 + r)^n = (1 + r) + (1 + r)^2 + \ldots + (1 + r)^n$$

puis à des sommes analogues, où n est négatif, et aux inverses de ces sommes, pour les valeurs de r et de n déjà indiquées. Signalons encore un petit tableau pour les racines douzièmes des puissances de $1 + r$ et nous aurons évidemment tout ce qui est nécessaire pour le calcul rapide des intérêts composés, annuités et quantités connexes. L'œuvre est de même facture que celle de M. B. Gonggrijp. A. Buhl (Toulouse).

Aug. Föppl. — **Vorlesungen über technische Mechanik.** In sechs Bänden. Erster Band : Einführung in die Mechanik. 5. Auflage. — 1 vol. in-8° ; 431 p., 104 fig. ; relié, 10 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Il nous suffira évidemment de signaler brièvement cette nouvelle édition du tome I du traité de mécanique technique de M. Föppl. Sauf de légères modifications de détails elle est conforme à la 4me édition.

Ce premier volume a pour objet l'introduction à la mécanique technique. Il contient tout ce qui dans une première étude est indispensable aux élèves-ingénieurs :

I. Mécanique du point matériel. — II. Mécanique du corps solide. — III. Théorie du centre de gravité. — IV. Transformation de l'énergie. — V. Le frottement. — VI. Elasticité et résistance. — VII. Le choc. — VIII. Mécanique des corps fluides.

L'Ouvrage correspond aux leçons que professe l'auteur à l'Ecole technique supérieure de Munich. C'est sans doute le traité de mécanique technique le plus répandu à l'heure actuelle dans les pays de langue allemande.

J. Hadamard. — **Fours Lectures on Mathematics**. A course of lectures delivered at Columbia University in 1911. [Publications of the Ernest Kempton Adams Fund for physical research. Nr. 5] — 1 fasc. in-4° 53 p, $ 0,75 ; New-York, Columbia University Press, 1915.

Ce livre contient la série des quatre leçons en langue anglaise que M. Hadamard a données en 1911 à l'Université Columbia (New-York). En voici les titres :

I. La définition des solutions d'une équation aux dérivées partielles par des conditions à la frontière.

II. Recherches contemporaines sur les équations différentielles, les équations intégrales et intégro-différentielles.

III. L'analysis situs en relation avec les correspondances et les équations différentielles.

IV. Solutions élémentaires des équations aux dérivées partielles et fonctions de Green.

La lecture de ces leçons sera des plus suggestives pour le lecteur quelque peu familiarisé avec ces théories. Il y trouvera non point un exposé systématique, mais une série de remarques de caractère général appuyées sur des exemples particuliers heureusement choisis.

M. Plancherel (Fribourg).

J. Grialou. — **Cours d'Hydraulique**, professé à l'Ecole centrale de Lyon. — 1 vol. in-8° de VI-550 pages et 240 figures ; 20 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1916.

Ce cours d'Hydraulique se présente sous un aspect véritablement original. Il est aussi scientifique que possible et, même dans le cas où il a fallu descendre des équations analytiques vers les résultats empiriques, la transition conserve le caractère d'une application qui pourra guider les progrès futurs de la théorie. Nombreuses sont les questions traitées. Contentons-nous d'indiquer les plus saillantes, surtout au point de vue mathématique.

L'Hydrostatique est devenue une science élémentaire à laquelle on peut donner une allure purement géométrique. Les centres de pression, le principe de Pascal donnent d'élégants et faciles calculs. Du liquide en rotation parabolique autour d'un axe vertical, nous passons à la rotation circulaire autour d'un axe horizontal ; c'est un cas traité moins souvent. Ce sont le principe d'Archimède et les corps flottants qui donnent la note géométrique. La formule barométrique donne celle des calculs pratiques.

Les équations générales de l'hydrodynamique sont établies avec soin. L'une de leurs conclusions immédiates est le théorème de Bernoulli

$$z + \frac{p}{\pi} + \frac{V^2}{2g} = H = \text{const.}$$

Pour le cas de fluides élastiques, à température variable ou non, il admet des variantes qui lui sont immédiatement rattachées. Il est aussi d'une signification géométrique vérifiable par des expériences piézométriques très simples. On peut déjà en tirer une théorie de l'écoulement des liquides par les orifices. L'auteur s'élève ici contre des idées fausses, attribuant aux veines issues d'orifices en mince paroi des formes non tangentielles à la paroi ; il est curieux qu'il faille redresser de telles erreurs car on ne voit pas, au simple point de vue de la continuité, comment une molécule, voisine de la paroi et se disposant à sortir, pourrait présenter tout à coup un point anguleux dans sa trajectoire. Les sections variables d'une même veine, à des distances diverses de l'orifice, forment aussi un sujet d'étude des plus surprenants. Le théorème de Bernoulli, combiné avec certains résultats expérimentaux de Borda, donne différentes formes de celui de Bélanger pour l'écoulement s'effectuant d'une conduite à une autre conduite de section différente. La variation de charge peut cependant donner lieu à une véritable analyse poussée assez loin moyennant des équations linéaires dont l'une est intégrable, non sans élégance, par les fonctions de Bessel.

Les ajutages et déversoirs ont des théories plutôt empiriques, mais, pour le déversoir en mince paroi, nous voyons cependant les conséquences très nettes d'une hypothèse concernant le maximum du débit.

Les tuyaux de conduite sont naturellement traités dans un très important chapitre ; le frottement est ici impossible à négliger et malheureusement on est encore réduit à des hypothèses expérimentales. Les rôles de l'élasticité des parois, des poches d'air, donnent cependant lieu à des calculs et à des schêmes d'une fort intéressante variété et, contrairement à ce que l'on pourrait croire, il reste encore beaucoup d'intérêt pour le cas où le fluide en circulation est un gaz. La fin du chapitre nous révèle une analyse fort élémentaire pour l'obtention d'une formule, due à M. Haton de la Goupillière, et concernant le temps de remplissage d'un réservoir communiquant avec un autre de capacité indéfinie.

L'écoulement dans les canaux et rivières, si l'on y considère, comme fonction à étudier, la vitesse en un certain point d'une section transversale, conduit à des équations aux dérivées partielles analogues à celles qui se rencontrent dans des régions assez diverses de la Physique mathématique. On peut y satisfaire par des solutions trigonométriques et exponentielles. La théorie du remous provoqué par un barrage dépend d'une équation différentielle qui, au moins dans le cas du canal rectangulaire, donne lieu à de simples intégrations de fractions rationnelles.

La résistance des fluides au mouvement des solides n'est point riche en formules mathématiques, du moins dans des cas tant soit peu généraux, mais les hélices aquatiques et aériennes, les parties planantes des avions ont exigé des résultats dont l'intérêt pratique existe forcément.

Les mouvements ondulatoires des liquides (houle, clapotis,...) se prêtent à une analyse élégante due à Cauchy. Les ondes simples, correspondant aux solutions trigonométriques des équations aux dérivées partielles, y jouent

un rôle capital. Se rattachent à cette question les oscillations pendulaires dans les tubes en U, complètement ramenées, pour les petites oscillations, aux équations différentielles habituelles possédant ou non un terme amortissant suivant qu'on veut ou non tenir compte du frottement.

Les récepteurs hydrauliques sont des roues ou des turbines ; un profane pourrait voir dans les roues des appareils primitifs et grossiers, ce en quoi il se tromperait fort. Pour prendre l'eau sans choc et la rendre sans vitesse, tout en la conservant entre les aubes entre les deux instants, des dispositifs fort ingénieux ont été réalisés. Pour les turbines l'esprit géométrique semble les avoir conçues bien avant d'y être poussé par les nécessités industrielles. Les turbines dites parallèles, parce que les filets fluides qui les traversent restent à une distance constante de l'axe, sont dues, en principe, à Euler ! Elles sont encore plus variées que les roues ; elles peuvent être réversibles c'est-à-dire employées à refouler l'eau (pompes centrifuges).

Pour les roues et turbines la question capitale est celle du rendement et c'est surtout le théorème des forces vives qui revient sous des aspects variés. Beaucoup d'élégance, beaucoup de figures claires et suggestives.

Les machines à élévation sont d'abord les pompes plus ou moins antiques ; leur théorie est très élémentaire. Mais il faut leur adjoindre les béliers hydrauliques à caractère presque paradoxal ; ils utilisent le bref instant d'un *coup de bélier* pour élever une colonne d'eau dont le poids ferme ensuite une soupape l'empêchant de redescendre. La première idée des appareils de ce genre est due à Montgolfier.

L'ouvrage va maintenant se terminer par quelques chapitres d'un caractère plus analytique mais d'une irréprochable symétrie. La symétrie matérielle des roues, turbines, etc., doit naturellement appeler souvent un emploi de coordonnées polaires, c'est-à-dire, dans l'espace, de coordonnées semi-polaires ou cylindriques. Les équations fondamentales admettent alors des transformations remarquables propres à mettre en évidence des résultats qui n'apparaîtraient que plus difficilement en coordonnées ordinaires. Pour les cloisons directrices des turbines j'aperçois ainsi tantôt des spirales logarithmiques, tantôt des courbes paraboliques très simples.

Dans une étude sur le mouvement des liquides parfaits nous revenons sur les équations générales parmi lesquelles, dans le cas d'un potentiel des vitesses, se trouve l'équation de Laplace. On peut satisfaire à ces équations au moyen de solutions à la Cauchy ; ce résultat bien connu a été réappliqué ici, de manière systématique, à divers problèmes d'écoulement. Je signale surtout l'écoulement en vase circulaire à niveau constant par orifice circulaire situé à la base ; l'emploi des coordonnées cylindriques est particulièrement approprié car il suffit de savoir ce qui se passe dans une tranche méridienne.

Enfin, pour les liquides visqueux, l'auteur écrit les équations générales, les réduit pour le cas de la seule pesanteur, examine le mouvement permanent et aboutit aux équations d'Helmholtz. Il essaie des solutions élémentaires dans la théorie du remous, dans celle du déversoir en mince paroi, où il arrive notamment, pour les lignes de courant, à une équation différentielle ordinaire facilement intégrable. Il exprime ensuite le débit par deux intégrales différentes dont il établit l'équivalence.

Il termine par le mouvement noyé d'une plaque mince rectangulaire ; là encore je remarque une équation différentielle facilement intégrable pour l'obtention des lignes de courant.

Bien d'autres choses seraient à citer dans cet excellent ouvrage de facture hautement scientifique. L'Hydraulique n'y apparaît pas comme un recueil de formules empiriques. Euler et Montgolfier ont été séduits par ses attraits et M. J. Grialou nous montre que ceux-ci n'ont pu qu'augmenter à la clarté des méthodes de la science moderne. A. Buhl (Toulouse).

G. A. Miller, H. F. Blichfeldt et L. E. Dickson. — **Theory and Applications of finite Groups.** — 1 vol. in-8°, relié, 390 p. ; 4 doll. ; John Wiley & Sons, New-York.

Cet Ouvrage est dédié à l'auteur du *Traité des substitutions et des équations algébriques* (Paris, 1870), M. Camille Jordan, dont les recherches fondamentales sur la théorie et les applications des groupes finis ont jeté les bases d'une nouvelle branche des mathématiques. Il a pour but de donner un exposé d'ensemble de la *théorie des groupes finis* et de leurs principales applications. Il comprend trois parties rédigées par MM. Miller, Blichfeldt et Dickson, bien connus par leurs nombreuses contributions à la théorie des groupes.

Dans la *Première Partie,* M. G. A. Miller (University of Illinois) expose les notions fondamentales de la théorie des substitutions et des groupes abstraits. Dès les premières définitions l'auteur fait appel à des exemples empruntés à la Géométrie, la rotation, autour de leur centre, d'un triangle équilatéral ou d'un carré, permettant d'illustrer d'une façon très claire les notions de groupe et de sous-groupe.

Les fondements de la théorie sont caractérisés, comme on sait, par les théorèmes de Sylow, de Lagrange et de Cayley, par les groupes abéliens et par la théorie de l'isomorphisme. Ils sont présentés avec le soin et la précision indispensables dans une première initiation.

La *Seconde Partie,* rédigée par M. H. F. Blichfeldt (Stanford University, Cal.), contient l'étude des groupes finis de transformations linéaires et homogènes, dont les transformations de coordonnées fournissent les exemples les plus simples. L'auteur étudie les principaux cas suivant les conditions auxquelles on soumet les éléments du tableau formé par les coefficients.

Dans la *Troisième Partie,* M. L. E. Dickson (University of Chicago) a réuni les principales applications des groupes finis, en Algèbre, en Géométrie et en Analyse. Les plus importantes sont relatives à la résolution des équations algébriques : domaine de la rationalité, résolvantes de Galois, conditions suffisantes pour qu'une équation algébrique soit résoluble par radicaux ; conditions suffisantes pour que cela soit possible, application aux constructions à l'aide de la règle et du compas. Passant au domaine de la Géométrie, M. Dickson examine les applications fournies par la recherche des points d'inflexion d'une cubique plane et par les 27 droites d'une surface du 3e ordre et les 28 tangentes doubles d'une quadrique. En Analyse, ce sont les applications des groupes de monodromie à la théorie des équations différentielles linéaires.

Bien que cet Ouvrage soit dû à la collaboration de trois auteurs, l'unité de l'exposé n'en souffre pas. Le traité de MM. Miller, Blichfeldt et Dickson constitue une excellente introduction à la théorie des groupes finis. En raison de l'importance que la notion de groupe joue dans les fondements de plusieurs branches mathématiques, il est appelé à rendre de grands services dans l'enseignement universitaire. H. F.

SALMON-FIEDLER. — **Analytische Geometrie der Kegelschnitte** von George SALMON. Nach der freien Bearbeitung von Wilh. FIEDLER. Neu herausgegeben von Fried. DINGELDEY. Achte Auflage. Erster Teil. — 1 vol. in-8°, XXX-452 p.; relié, 12 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

La première édition allemande du *Treatise on conic sections* (Dublin, 1848) de Salmon remonte à 1860. W. Fiedler, professeur à l'Ecole polytechnique de Zurich, publia les sept premières éditions, en apportant chaque fois des remaniements et des compléments. A la suite du décès du savant géomètre, c'est M. Dingeldey qui s'est chargé de la publication de ce traité qui, depuis la cinquième édition, paraît en deux volumes. A son tour il introduit quelques modifications afin de tenir compte des besoins et de l'état actuel de l'enseignement scientifique.

Il est inutile de rappeler ici le contenu de ce traité classique consacré à la géométrie analytique à deux dimensions. Cette première partie comprend l'étude des coordonnées, de la droite, des formes projectives, du cercle, de l'ellipse, de l'hyperbole et de la parabole.

F. GOMES TEIXEIRA. — **Sur les problèmes célèbres de la Géométrie élémentaire** non résolubles avec la règle et le compas. — 1 vol. grand in-8°, 132 p.; Imprimerie de l'Université, Coïmbre, 1915.

Dans ce volume, le savant géomètre portugais, M. F. G. Teixeira, a groupé les principales solutions qui ont été proposées pour la résolution des problèmes célèbres de la Géométrie élémentaire non résolubles à l'aide de la règle et du compas. Ces problèmes sont, comme on sait, la duplication du cube, la trisection de l'angle et la quadrature du cercle. Ces trois problèmes font l'objet des troix premiers chapitres dans lesquels l'auteur expose, dans leur ordre chronologique, les solutions les plus remarquables en ayant soin de rappeler les sources historiques.

I. Le problème de la *duplication du cube*, désigné souvent sous le nom de problème de Délos, a pour but de déterminer un cube dont le volume soit le double de celui d'un cube donné. Hippocrate de Chio a réduit ce problème à celui de la *détermination de deux moyennes proportionnelles entre deux segments* a *et* b, c'est-à-dire à celui de la détermination de deux segments x et y vérifiant les équations

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{y} = \frac{y}{b}, \qquad \text{ou} \qquad xy = ab, \qquad x^3 = a^2 b.$$

Le problème de la duplication du cube correspond au cas $b = 2a$.

M. Teixeira expose les solutions dues aux géomètres grecs Platon, Architas, Eudoxe, Menechme, Héron, Phylo-Bizantinus, Apollonius, Eratosthène, Nicomède, Dioclès, puis celles qui ont été données après la Renaissance par Viète, Villapandus, Gruenbergerius, Descartes, Fermat, Sluse, Newton, Viviani, Hughens, Clairaut et Montucci.

II. La plus ancienne des méthodes connues pour résoudre le problème de la *division de l'angle en trois parties égales* est due à Hippias, qui fait usage d'une courbe qu'il a inventée et qui a été nommée plus tard *quadratrice* de Dinostrate. Viennent ensuite les méthodes d'Archimède, de Nicomède, de Pappus, puis, après la Renaissance, celle d'Etienne Pascal, de Descartes, de Fermat, de Kinner, de T. Ceva, de Maclaurin, de Delanges, de Chasles, de Lucas, de Catalan, de Longchamps, de Kempe.

III. Le chapitre consacré à la quadrature du cercle débute par une Notice sur les premiers documents concernant ce célèbre problème. Le document le plus ancien rencontré jusqu'à présent est le *Papirus Rhind*. Parmi les géomètres de l'ancienne Grèce qui se sont occupés de cette question on trouve les noms d'Anaxagore, d'Hippocrate de Chio, d'Antiphon, de Bryson et d'Archimède. Les méthodes graphiques proposées reposent sur l'emploi de courbes qu'ils ont nommées *quadratrices*. L'auteur signale ensuite les méthodes qui ont été données plus tard pour le calcul ou pour la construction de π, par Viète, Adriane Romanus, L. van Ceulen, Snellius, Huygens, James Gregory, Descartes, Euler, Legendre, Wallis, etc.

IV. Dans un dernier chapitre M. Teixeira examine l'impossibilité de la résolution, à l'aide de la règle et du compas, des trois problèmes qu'on vient de rappeler. Abordée par Descartes, l'impossibilité d'une telle solution n'a été définitivement établie qu'au XIXe siècle, grâce aux travaux de Gauss, d'Abel, de Petersen, d'Hermite, de Lindemann, de Gordan et d'autres. Pour ce qui concerne plus particulièrement l'impossibilité de la quadrature du cercle, l'auteur adopte la démonstration de Gordan, exposée d'une manière très claire et élémentaire par M. Klein dans ses « Vorträge über ausgewählte Fragen der Elementargeometrie » ; il y apporte quelques simplifications et remplace l'analyse symbolique qu'on y emploie, par une analyse ordinaire. H. F.

Ch. de la Vallée-Poussin. — **Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire.** — Leçons professées au Collège de France. — 1 vol. in-8° de VIII-154 pages ; 7 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1916.

Les effroyables malheurs de la Belgique ont amené M. de la Vallée-Poussin à l'Université de Harward et au Collège de France. Ce n'est pas une compensation et il aurait pu y venir sans cela ; c'est cependant une répercussion fort heureuse en soi et qui nous vaut un élégant volume relatif à des questions présentées parfois sous une apparence sévère.

La théorie des ensembles, qui n'est guère qu'une sorte de classification quand il s'agit des ensembles dénombrables, présente immédiatement une richesse surprenante dès qu'on aborde le continu et les ensembles de même puissance. L'antique et instinctive notion de *mesure* du continu s'étend alors d'une manière prodigieuse. Dans les ensembles *mesurables*, si bien étudiés par M. Borel, la notion d'intégrale est immédiatement généralisable et devient celle de M. Lebesgue.

Un autre point de vue se superpose à ceux-ci.

Considérons la fonction caractéristique d'un ensemble, définie comme étant égale à 1 sur tous les points de l'ensemble et à zéro partout ailleurs ; en général, ce sera une fonction discontinue. Or il se trouve que toutes les fonctions discontinues que l'on peut avoir à considérer ainsi ont été irréprochablement classées et définies par M. Baire.

En fait les travaux de MM. Borel, Lebesgue et Baire se trouvent s'équivaloir, à condition peut-être de faire quelques arrangements de détail nécessaires pour bien comparer les résultats obtenus isolément ; c'est justement là un point dont s'occupe M. de la Vallée-Poussin et, pour les travaux en question, ce n'est pas une mince preuve de valeur que de pouvoir se superposer après avoir été conçus sous trois aspects divers. Et maintenant l'élégante perfection des théories mathématiques définitives est un fait absolument acquis dans ces domaines.

Ces généralités emplissent une première partie de l'ouvrage.

La seconde partie est consacrée aux fonctions F(E) d'un ensemble E. On trouve ici, d'une manière fort curieuse, des généralisations du calcul différentiel élémentaire. Si l'on prend dans E un domaine rectangulaire ω, dont la mesure peut tendre vers zéro, le rapport de $F(\omega)$ à cette mesure peut avoir différentes limites appelées *dérivées*. La symétrie attribuée d'abord au domaine ω n'est pas chose essentielle mais, pour approfondir commodément la question, l'auteur étudie les ensembles au moyen de *réseaux* et *grillages*. Ce sont, si l'on veut, des perfectionnements de l'appareil rudimentaire avec lequel on divisait un segment en un nombre indéfiniment croissant de parties égales. Pour en revenir à la dérivation générale, il faut observer qu'elle nécessite beaucoup plus de précautions que l'intégration générale ; c'est une chose remarquée depuis longtemps mais qui réapparaît ici avec une facile et heureuse rigueur.

La troisième partie, consacrée aux classes de Baire, revient surtout sur l'existence réelle des fonctions dans les dites classes. Je rappelle que M. R. Baire range les fonctions continues dans la classe zéro, les fonctions limites de fonctions continues (quand ces fonctions limites ne sont pas de classe zéro) dans la classe 1, les fonctions limites de fonctions de classe 1 (quand ces fonctions limites ne sont pas de classe zéro ou 1) dans la classe 2, etc. On était habitué aux fonctions de classe zéro et 1 ; au delà commençaient de redoutables difficultés aplanies aujourd'hui par la considération des caractéristiques d'ensembles qui, par certains « théorèmes de structure », sont classés, eux aussi, de proche en proche.

Il m'est difficile de faire un croquis plus précis de ces excellentes leçons car il me faudrait, pour cela, reproduire nombre de définitions ingénieusement maniées par M. de la Vallée-Poussin, mais je crois en avoir assez dit pour marquer tout l'intérêt qui s'attache à l'œuvre. Il faut surtout considérer que celle-ci n'est pas issue directement de la célèbre trinité Baire-Borel-Lebesgue.

Elle est l'œuvre d'un mathématicien très au courant de ces théories fonctionnelles, très apte à les juger et qui, le cas échéant, aurait pu faire des critiques d'un grand poids.

Or il ne critique absolument rien et, fondant tout dans une exposition simple et harmonieuse, donne ainsi une remarquable confirmation de la simplicité et de l'harmonie des théories générales en question.

A. Buhl (Toulouse).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Acta Mathematica, dirigé par G. Mittag-Leffler, Stockholm. — Tome 40, nos 3 et 4. — M. Riesz : Sur l'hypothèse de Riemann. — N.-E. Nörlund : Sur les équations linéaires aux différences finies à coefficients rationnels. — P. Koebe : Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. II. Die Fundamentalabbildung beliebiger mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche nebst einer Anwendung auf die Bestimmung algebraischer Funktionen zu gegebener Riemannscher Fläche. — Mittag-Leffler : Remerciement. — Id. : Testament 16/3 1916. — P. Appell : Essai sur les fonctions Θ du quatrième degré. — G. Pólya : Ueber den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Gliede der zugehörigen Taylorschen Reihe. — P. Bohl : Ueber die hinsichtlich der unabhängigen und abhängigen Variabeln periodische Differentialgleichung erster Ordnung. — M. Riesz : Ueber einen Satz der Herrn Serge Bernstein. — Id. : Ein Konvergenzsatz für Dirichletsche Reihen.

Annals of Mathematics published under the auspices of the Princeton University. N. J. 2me série, Vol. 18, nos 1 et 2. — T. Hayashi : On the Surface of Lowest Degree passing through a given curve in space. — H. T. Burgess : A practical Method of determining elementary Divisors. — L. P. Eisenhart : Conjugate Systems with Equal Point Invariants. — J. F. Ritt : On the Derivatives of a Function at a Point. — A. A. Bennett : An Existence Theorem for the Solution of a Type of Real Mixed Difference Equation. — J. R. Kline : Double Elliptic Geometry in Terms of Point and Order Alone. A. Emch : An Application of a Group of Order 16 to a Configuration of an Elliptic Cubic. — T. A. Pierce : The Numerical Factors of the Arithmetic Forms $\Pi\left(1 \pm \alpha_i^m\right), (i = 1, \ldots n)$. — T. H. Gronwall : A Problem in Geometry connected with the Analytic Continuation of a Power Series. — T. H. Gronwall : On the Power Series for Log $(1 + z)$. — T. H. Gronwall : On the Convergence of Binet's Factorial Series for Log $\Gamma(s)$ and $\psi(s)$. — J. L. Walsh : Note on Cauchy's Integral Formula. — Olive C. Hazlett : On the Rational, Integral Invariante of Nulpotent Algebras. — W. Le Roy Hart : On Trigonometric Series.

Bulletin de la Société mathématique de France. Tome XLIV, fasc. 1-3. — E. R. Hedrick et W. D. A. Westfall : Sur l'existence des fonctions implicites. — E. Goursat ; Sur quelques remarques relatives au problème de Pfaff. — Barré : Sur quelques surfaces réglées à directrice rectiligne. —

G. Valiron : Sur la croissance du module maximum des séries entières. — E. Cartan : La déformation des hypersurfaces dans l'espace euclidien réel à *n* dimensions. — I. Priwaloff : Sur les fonctions conjuguées. — G. Valiron : Sur l'interpolation des fonctions entières. — M. Fouché : Sur la transformation doublement quadratique, les polygones de Poncelet et l'involution multiple.

Bulletin of the American Mathematical Society. Volume XXII, nos 8, 9, 10.— C. H. Sisam : On a Configuration on Certain Surfaces.— W. A. Wilson : On Separated Sets. — W. V. Lovitt : Singular Points of Transformations and Two-Parameter Families of Curves. — Dunham Jackson : An Elementary Boundary Value Problem. — W. F. Osgood : Note on Functions of Several Complex Variables. — A. L. Nelson : Quasi-Periodicity of Asymptotic Plane Nets. — K. P. Williams : Concerning Hill's Derivation of the Lagrange Equations of Motion. — B. A. Bernstein : A Simplification of the Whitehead-Huntington Set of Postulates for Boolean Algebras. — G. C. Evans : Application of an Equation in Variable Differences to Integral Equations. — V. C. Poor : Operators in Vector Analysis.

Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik, herausgegeben von E. Lampe. — Band 44. Jahrgang 1913, Heft 1. Reimer, Berlin, 1917.

Mathematische Annalen, Band 77, Heft 3. — H. Weyl . Ueber die Gleichverteilung von Zahlen mod. Eins. — M. Bauer : Zur Theorie der algebr. Zahlkörper. — Bauer : Ueber zusammengesetzte Zahlkörper. — Bernh. von Ludwig : Ueber eindeutige Umkehrbarkeit Abelscher Integrale. — O. Blumenthal : Einige Minimums-Sätze über trigonometrische u. rationale Polynome. — O. Muehlendyck : Ueber die regulären eindimensionalen analytischen Somenmannigfaltigkeiten. — J. v. S. Nagy : Ueber die reellen Züge ebener u. Raum-Kurven. — F. Hausdorff : Die Mächtigkeit der Borelschen Mengen. — K. Knopp : Bemerkungen zur Struktur einer linearen perfekten nirgends dichten Punktmenge.

Heft. 4. — D. König : Ueber Graphen u. ihre Anwendung auf Determinantentheorie u. Mengenlehre. — M. Dehn : Ueber die Starrheit konvexer Polyeder. — W. Küstermann : Funktionen von beschränkter Schwankung in zwei reellen Veränderlichen. — O. Szasz : Ueber die Approximation stetiger Funktionen durch lineare Agregate von Potenzen. — G. Pólya : Ueber Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten. — E. Hilb : Zur Theorie der linearen Integrodifferentialgleichungen. — Emmy Noether : Die Funktionalgleichung der isomorphen Abbildung. — A. Speiser : Gruppendeterminante u. Körperdiskriminante. — G. Voghera : Ein direkter Beweis für die Normalform der komplexen Zahlensysteme,

Nouvelles Annales de Mathématiques, dirigées par C.-A. Laisant et R. Bricard. 4e série. Gauthier-Villars, Paris. Tome XVI, janvier-juin 1916. — R. Goormaghtigh : Sur les familles de cercles. — A. Pellet : Sur les systèmes orthogonaux. — Lucien Godeaux : Etude élémentaire sur l'homographie plane de période trois te sur une surface cubique. — A. Gérardin : Distances, en nombres entiers, de trois points et de leur centre isogone à 120°. — F. Balitrand : Construction du centre de courbure de l'hyperbolisme et de l'affine d'une courbe donnée. — G. Fontené : Points d'intersec-

tion d'une surface du quatrième ordre avec les arêtes d'un tétraèdre. — L. Pomey : Démonstration algébrique du théorème de d'Alembert. — R. Goormaghtigh et V. Thebault : Sur une question de Mannheim et ses applications à la géométrie du triangle. — R. Bouvaist : Sur la détermination des axes de l'indicatrice et des rayons de courbure en un point d'une surface du second ordre. — F. Gomes Teixeira : Sur une propriété générale des cubiques circulaires unicursales. — T. Hayashi : Sur quelques équations cubiques trinomes indéterminées. — J. Joffroy : Solution du problème de Pappus généralisé. — R. Bricard : Au sujet d'une Note de M. Fontené. — G. Fontené : Somme des cubes de n nombres en progression arithmétique. — L.-J. Schwatt : Note sur la sommation d'une série. — V. Thébault : Sur le cercle de Taylor relatif au triangle. — M.-F. Egan : Note sur les quartiques gauches unicursales. — F. Balitrand : Construction du centre de courbure de la spirale hyperbolique. — E.-N. Barisien : Egalité entre deux arcs d'une ellipse et d'un limaçon de Pascal. — R. Bouvaist : Détermination du rayon de courbure en un point de certaines courbes planes. — R. Goormaghtigh : Sur un rapprochement remarquable entre l'hypocycloïde à trois rebroussements, le folium de Descartes et la cardioïde. — R. Bricard : Mouvement d'une figure plane liée à deux courbes roulant sur des rouleaux. — M. Weill : Propriété de certaines formes quadratiques. — R. Bouvaist : Sur la détermination de la tangente en un point de certaines courbes planes.

Juillet-décembre 1916. — V. Thébault : Sur une curieuse figure relative au triangle. — Auric : Sur le barycentre des triangles pseudopodaires. — M. Weill : Sur le produit des nombres dont chacun est une somme de deux carrés. — Ed. Maillet : Sur un théorème de M. Axel Thue. — R. Bouvaist : Sur la détermination du centre de courbure en un point d'une conique. — M. Weill : Sur quelques équations quadratiques. — M. Weill : Sur des identités remarquables. — J. B. Pomey : Nouvelle démonstration d'un théorème d'Abel sur les séries. — J.-B. Pomey : Généralisation du théorème de Rolle et application à la Physique. — F. Gonseth : Une extension d'un théorème de Poncelet. — R. Geormaghtigh : Sur certains systèmes d'équations indéterminées du second degré. — F. Gomes Teixeira : Sur une manière de construire les cubiques circulaires. — E.-N Babisien : Sur la parabole tangente à quatre droites. — F. Balitrand : Construction du rayon de courbure de la polaire réciproque d'une courbe par rapport à un cercle. — H. Lebesgue : Sur deux théorèmes de Miquel et de Clifford. — V. Thébault : Sur deux théorèmes de M. Fontené relatifs à l'orthopôle. — J. B. Pomey : Généralisation des quantités imaginaires. — B. Globa-Mikhaïlenko : Sur une nouvelle figure d'équilibre d'une masse fluide en rotation.

La Revue de l'Enseignement des Sciences. — Librairie Alcan, Paris. Janvier-Avril 1916. — Ch. Bioche : Sur un problème de minimum. — L. Genillon : Les petits problèmes du photographe. — Ch. Michel : Problèmes d'algèbre pour la classe de mathématiques spéciales. — H. Lebesgue : Sur les angles polyèdres. — J. Juhel-Rénoy : Sur deux problèmes de géométrie descriptive. — Ch. Bioche : Constructions et formules approchées. — A. Vieillefond : Sur le problème d'Olinde Rodrigues. — G. Fontené : Sur les signes des cordes dans un cercle. — F. Brachet : Sur certaines équations du deuxième degré. — R. Bérard : Sur l'équation différentielle d'Euler. — Ch. Michel : Sur l'équation différentielle linéaire du second ordre. — G. Fontené : L'objet et sa mesure. — J. Pionchon : Dé-

monstration élémentaire d'un théorème relatif à l'induction mutuelle de deux circuits. — H. de Lapierre : Sur les angles polyèdres. — J. Juhel-Rénoy : Mener par deux points un cercle tangent à un cercle.

Revue générale des Sciences pures et appliquées. — Librairie Doin, Paris. Année 1916. N° 12, Paul Janet : Du rôle des Universités dans l'enseignement technique supérieur. — N° 13, L. Zoretti : Les nécessités de l'Enseignement technique supérieur. — N° 14, P. Puiseux : Revue annuelle d'astronomie. — N°s 17-18, G. Milhaud : Les premiers essais scientifiques de Descartes. — N° 19, M. d'Ocagne : L'œuvre mécanique de Leonardo Torres y Quevedo.

Revue de Métaphysique et de Morale. — Année 1916, n°s 3 à 6. — A.-N. Whitehead : La théorie relationniste de l'espace. — R. Hubert : La théorie cartésienne de l'énumération. — H. Dufumier : La logique des classes et la théorie des ensembles. — B. Varisco : Quelques réflexions sur l'application des mathématiques à la physique. — A. Reymond : L'infini géométrique et l'intuition. — L. Rougier : La démonstration géométrique et le raisonnement déductif. — L. Couturat : De l'abus de l'intuition dans l'enseignement mathématique.

Zeitschrift für mathematischen u. naturw. Unterricht. Band 47, n°s 1 à 8. — W. Brunner : Die Versuche mit der Atwoodschen Fallmaschine zum Nachweis der Erddrehung. — B. Kerst : Über Polyeder, deren Netze durch konvexe Polygone gebildet werden. — E. Haentzchel : Eine artilleristische Aufgabe. — Pyrkosch : Die mathematischen Reformbestrebungen. — W. B. Hoffmann : Venus 1916. — Max Brües : Mittelpunktswinkel, Umfangswinkel, Sehne und Kreisviereck in allgemeinster Behandlung. — Leman : Über halbreguläre Körper. — H. Weinreich : Artilleristische Probleme im Schulunterricht. — F. Bremer : Über physikalische Schülerübungen und deren Verwertung im Unterricht. — Karl Rosenberg : Gedanken und Erfahrungen zur praktischen Ausbildung der Lehramtskandidaten für Physik. — K. Rieder : Zur Einführung des Logarithmus im Kleinschen Sinne. — W. Brunner : Ein Beitrag zur Erklärung der Mondphasen. — Oskar Lesser : Zur Behandlung der Kegelschnitte. — Oskar Herrmann : Einige Gruppen von geometrischen Aufgaben, die auf unbestimmte Ausdrücke führen. — P. Kiesling : Über die Kurve der Schattenenden des Gnomons. — Georg Wolff : Linearzeichenunterricht und Kunsterziehung. — Emil Zeissig : Bildung und Bedeutung geometrischer Ausdrücke. — J. Ruska : Zur Geschichte der Schachbrettaufgabe. — P. Bräuer : Über quantitative Schülerübungen. — W. Hillers : Schulversuche über Mineralverwitterungen durch CO_2. — Wilhelm Lorey : Die Herrschaft über die Zahl. — H. Wolff : Wie weit sollen die Lehramtskandidaten der Mathematik bei ihrem Studium die Geodäsie berücksichtigen ? — E. Böttcher : Dreiflachkörper — Dreieckskörper. — Id. : Aufsteigende Polyederliste. — E. Petzold : Der Physikunterricht an technischen Mittelschulen. — Wilhelm Hillers : Einige Schauversuche im Unterricht über die Stabilität eines schwimmenden Würfels. — K. Quensen : Konstruktion der komplexen Wurzeln von Gleichungen zweiten und dritten Grades. — N. Gennimatas : Methodische Bemerkungen zur ebenen Trigonometrie. — v. Sanden : Vektorenrechnung und analytische Geometrie. — L. Bloch : Graphische Darstellung der Wirkungsweise von Linsen

und optischen Instrumenten. — Kleine Mitteilungen. — Aufgaben. — Repertorium. — Berichte. — Bücherbesprechungen.

Proceedings of the London Mathematical Society. Series 2. Vol. 15. Part., 1-6. — G. H. Hardy : On Dirichlet's Divisor Problem. — W. Burnside : On Periodic Irrational Waves at the Surface of Deep Water. — J. C. Fields : Proof of the Complementary Theorem. — W. H. Young : On Integrals and Derivates with respect to a Function. — G. R. Goldsbrough : The Effect on the Tides of Variation in the Depth of the Sea. — G. H. Hardy : The Second Theorem of Consistency for Summable Series. — F. B. Pidduck : The Kinetic Theory of the Motion of Ions in Gases. — M. Kuniyeda : A Theorem on Series of Orthogonal Functions. — H. Jeffreys : On the Vibrations of a Special Type of Dissipative System. — T. L. Wren : Some Applications of the Two-three Birational Space Transformation. — J. Hodgkinson : The Conformal Representation of the Various Triangles bounded by the Arcs of three Intersecting Circles. — J. Larmor : The Transition from Vapour to Liquid when the Range of the Molecular Attraction is Sensible. — G. H. Hardy : The Average Order of the Arithmetical Functions $P(x)$ and $\Delta(x)$. — T. W. Chaundy and A. E. Jolliffe : The Uniform Convergenee of a certain Class of Trigonometrical Series. — E. B. Stouffer : On Seminvariants of Linear Homogeneous Differential Equations. — G. N. Watson : A Problem of Analysis Situs. — C. R. Dines : Functions of Positive Type and Related Topics in General Analysis. — H. F. Baker : Note on Mr. Wren's Paper on « Some Applications of the Two-Three Birational Space Transformation ». — H. W. Turnbull : Some Singularities of Surfaces and Their Differential Geometry. — W. P. Milne : The Construction of Co-Apolar Triads on a Cubic Curve. — Major P. A. Macmahon : Two Applications of General Theorem in Combinatory Analysis. — S. Chapman : On the Uniformity of Gaseous Density, according to the Kinetic Theory. — S. Pollard : On the deduction of criteria for the convergence of Fourier's series from Fejer's Theorem concerning their Summability. — E. K. Wakeford : Miquel's Theorem and the Double Six. — J. Hodgkinson : The Nodal Points of a Plane Sextic. — W. H. Young : Note on Functions of Upper and Lower Type. — Grace Chisholm Young : On the Derivatives of a Function. — Hilda P. Hudson : The Cremona Transformations of a certain Plane Sextic. — Bromwich : Normal Coordinates in dynamical Systems. — Tables du Tome 15.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tome XLI. — A. Vergerio : Sulle equazioni integrali del tipo Fredholm. — G. H. Hardy and (J. E.) Littlewood : Theorems concerning the Summability of Series by Borel's exponential Method. — V. Strazzeri : Sulla linea dei punti parabolici di una superficie. — O. Chisini : Sui fasci di cubiche a modulo costante, — L. Pf. Eisenhart : Surfaces generated by the Motion of an invariabbe Curve whose Points describe straight Lines. — L. Galvini : Sulle funzioni convesse di una o due variabili definite in un aggregato qualunque. — G. Fubini : Applicabilità projettiva di due superficie. — E. Daniele : Sulla deformazione di una trave appogiata orizzontalmente, soggeta ad un carico mobile concentrato. — G. Marletta : Delle superficie algebriche, d'ordine 6, o 7, con un fascio di cubiche ellitiche. — W. Sierpinski . Sur une série potentielle qui, étant convergente en tout point de son cercle de convergence, représente sur ce cercle une fonction discontinue. — E. P. Cantelli :

La tendenza ad un limite nel senso del calcolo delle probabilità. — I. Priwaloff : Sur la dérivation des séries de Fourier. — A. Signorini : Sull'inizio dell'efflusso dei liquidi. — A. L. Nelson : Plane Nets with equal Invariants. — G. Scorza : Intorno alla teoria generale delle matrici di Riemann e ad alcune sue applicazioni.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. — Band 124. — C. Burstin . Die Spaltung des Kontinuums in z, überall dichte Mengen. — E. Dolezal : Das Rückwärtseinschneiden auf der Sphäre, gelöst auf photogrammetrischen Wege II. — Id. : Das Pantograph-Planimeter. — W. Gross : Zur Poisson'schen Summierung. — G. Kowalewski : Neuer Existenzbeweis für implizite Funktionen. — Id. : Bunteste Reihen und Ringe von Elementgruppen. Ein neues Problem der Kombinatorik. — E, Landau : Ueber eine Aufgabe aus der Theorie der quadratischen Formen. — Id. : Neue Untersuchen über die Pfeiffer'sche Methode zur Abschätzung von Gitterpunktanzahlen. — A. Lechner : Ueber die Richtkraft eines rotierenden, geführten Kreisels. — Id. : Zur Mechanik der Zykeln. — R. Weitzenböck : Ueber Bewegungsinvarianten. VIII.

Zeitschrift für das Realschulwesen, Wien. — XLI Jahrgang. — W. Peyerle : Einfache Beispiele von Regelflächen 3. Ordnung und von einigen ebenen Schnitten derselben. — A. Lanner : Veranschaulichung der unendlich ausgedehnten Ebene im Bereich eines gegeben Kreises. — A. Pleskot : Ueber eine Art der Erzeugung der Kegelschnitte durch Kreisbüschel. — O. Bachrach : Neuer geometrischer Beweis zweier Sätze über die ebenen Schnitte der bifokalen Rotationsflächen II. Gr. — K. Wolletz : Einiges über die Bewegung der Körper im lufterfüllten Raume. — F. Schicht : Definition und Berechnung der mechanischen Arbeit. — G. Bozicevic : Eine neue Konstruktion der Kegelschnitte. — Manque le n° 2, non parvenu à la rédaction).

Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris, 2me semestre 1916 (suite). — *13 novembre.* — C. Guichard : Sur les systèmes triple-orthogonaux, tels qu'un système de courbes de Lamé soit formé de lignes sphériques, le lieu des centres des sphères qui les contienne étant une sphère ou un paraboloïde de révolution. — L. Hartmann : Variation systématique de la valeur de la force vive dans le choc élastique des corps. — E. Belot : Précisions nouvelles sur la loi exponentielle des distances des planètes et satellites. — *20 nov.* — E. Borel : Sur l'approximation des nombres incommensurables par les nombres rationnels. — E. Kogbetliantz : Sur les séries de fonctions ultrasphériques. — G. Koenigs : Sur les propriétés du second ordre des mouvements plans à deux paramètres. — H. Vergne : Sur une méthode de calcul des perturbations d'un mouvement connu. — G. Julia : Sur quelques propriétés du groupe fuchsien formé des substitutions modulaires qui n'altèrent pas une forme d'Hermite indéfinie. — L. Roy : Le problème du mur en électrodynamique. — *27 nov.* — C. Guichard : Sur les réseaux K d'une quadrique de révolution. — E. Picard : Sur les intégrales de différentielles totales relatives aux surfaces algébriques régulières. — G. Koenigs : Sur la forme géométrique générale des propriétés du second ordre des mouvements plans à deux paramètres. — M. Mesnager : Formule de la plaque mince encastrée sur un contour rectangulaire plan. — *4 décem.*

bre. — W. Sierpinski : Sur le rôle de l'axiome de Zermelo dans l'analyse moderne. — Gaston Julia : Sur les formes de Dirichlet et sur les substitutions loxodromiques du groupe de Picard. — M. Brillouin : Solution fondamentale (sources) dans un liquide pesant à surface libre. — Baticle : Sur le calcul des voûtes épaisses soumises à une pression uniforme. — P. Gl. Mikhailenko : Sur une nouvelle figure d'équilibre d'une masse fluide en rotation. — *11 déc.* — E. Aries : Sur la détermination de l'énergie libre par l'équation d'état de Clausius. — *26 déc.* — S. Mangeot : Sur une construction de la sphère osculatrice et du rayon de torsion en un point de la courbe d'intersection de deux surfaces données. — W. H. Young : Sur les conditions de convergence des séries de Fourier. — Baticle : Sur l'application de la théorie des équations intégrales à certains calculs relatifs à la stabilité des constructions (problème à une dimension). — De Sparre : Au sujet des coups de béliers dans une conduite forcée, formée de deux sections de diamètres différents. — E. Aries : Sur une forme de la fonction de la température dans l'équation d'état de Clausius.

Ier semestre 1917. — 6 janvier. — M. Petrovitch : Limite d'extensibilité d'une courbe d'allure variable. — Maur. Hamy : Sur la valeur approchée d'une intégrale définie. — W. H. Young : Sur une nouvelle suite de conditions pour la convergence des séries de Fourier. — S. Souslin : Sur une définition des ensembles mesurables B sans nombre transfinis. — M. Lusin : Sur la classification de M. Baire. — L. Hartmann : Variation systématique de la valeur de la force vive dans le choc élastique. — P Appell : Sur une extension des équations de la théorie des tourbillons et des équations de Weber. — de Sparre : Calcul du coup de bélier dans une conduite forcée formée de deux sections de diamètres différents. — E. Esclangon : Sur la réflexion et la réfraction d'ondes isolées à la surface de séparation de deux fluides en repos ou en mouvement. — *15 janv.*. — A. Khintchine : Sur la dérivation asymptotique. — *22 janv.* — Bertrand Gambier : Sur l'identité de Bézout. — Michel Petrovitch : Valeur de l'action le long de diverses trajectoires. — Mesnager : Formule en série simple de la plaque uniformément chargée, encastrée sur un contour rectangulaire plan. — E. Esclangon : Sur la réflexion totale d'ondes isolées à la surface de séparation de deux fluides en mouvement ou en repos. — Maur. Sauger : Sur l'énergie possédée par la terre du fait de sa rotation sur elle-même. — *5 février.* — R. Garnier : Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires. — W. H. Young : Sur la théorie de la convergence des séries de Fourier. — E. Delassus : Sur la notion générale de mouvement pour les systèmes holonomes et non holonomes. — E. Jouguet : Sur la stabilité séculaire. — H. Villat : Sur un calcul de résistance dans un courant fluide limité. — *26 fév.* — Gaston Julia : Sur les formes binaires à coefficients et indéterminées complexes, de degré quelconque. — *5 mars.* — G. Giraud : Sur les fonctions hyperfuchsiennes et sur les systèmes d'équations aux différentielles totales. — E. Cotton : Nombre caractéristique et rayon de convergence. — *12 mars.* — R. de Montessus de Ballore : Sur les courbes gauches algébriques. — *19 mars.* — E. Lebon : Sur une nouvelle table de diviseurs des nombres. — G. Julia : Sur la réduction des formes binaires d'un degré quelconque à coefficients et à indéterminées réels ou complexes. — M. Hamy : Valeurs approchées de quelques intégrales indéfinies. — G. Giraud : Sur les fonctions hyperfuchsiennes. — A. Buhl : Sur les sommes abéliennes de volumes coniques. Cas des cyclides. — L. Hartmann : Variation systéma-

tique de la valeur force vive dans le choc élastique des corps. — *26 mars.* — E. Bompiani : Les hypersurfaces déformables dans un espace euclidien réel à n (> 3) dimensions. — E. Kogbelliantz : Sur la sommation des séries ultrasphériques.

2. Livres nouveaux :

M. Bôcher. — **Leçons sur les méthodes de Sturm** dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes, professées à la Sorbonne en 1913-14, recueillies et rédigées par G. Julia (Collection Borel). — 1 vol. gr. in-8°, 118 p., 5 fr. : Gauthier-Villars & Cie, Paris.

E. Désortiaux. — **La réforme rationnelle de l'heure.** — Son importance au point de vue économique et social. — 1 broch. p. in-8°, 14 p. ; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Aug. Föppl. — **Vorlesungen über technische Mechanik,** in sechs Bänden, Erster Band : Einführung in die Mechanik, 5te Auflage. — 1 vol. in-8°, xvi-431 p., relié, 10 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Rud. Fueter. — **Synthetische Zahlentheorie.** — 1 vol. in-8°, viii-271 p., relié ; G. J. Göschen, Leipzig.

M. Grossmann. — **Elemente der darstellenden Geometrie** (Teubners Leitfaden für den mathem. u. techn. Hochschulunterricht). — 1 vol. p. in-8°, 84 p., 2 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Rud. Mehmke. — **Leitfaden zum graphischen Rechnen** (Sammlung mathem.-physik. Lehrbücher, herausg. von E. Jahnke). — 1 vol. relié, 152 p., 5 M. 40 ; B. G. Teubner, Leipzig.

R. de Montessus de Ballore. — **Leçons sur les fonctions elliptiques** en vue de leurs applications. Cours libre professé à la Faculté des Sciences de Paris. — 1 vol. gr. in-8°, x-268 p., 12 fr. ; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

A. Pringsheim. — **Vorlesungen über Zahlen- u. Funktionenlehre.** Erster Band, zweite Abteilung : Unendliche Reihen mit reellen Gliedern. — 1 vol. gr. in-8°, 222 p., 10 M. 80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

J. Rey Pastor. — **Introducción a la Matemática superior.** Estado actual, Métodos y Problemas (Manuales Corona). — 1 vol. in-16, cart., 202 p., 3 P. 50 ; Biblioteca Corona, Madrid.

J. Rey Pastor. — **Fundamentos de la Geometría Proyectiva superior.** — 1 vol. gr. in-8°, xxii-444 p. ; Madrid.

L. Selme. — **Principe de Carnot contre Formule empirique de Clausius.** Essai sur la Thermodynamique. — 1 vol. p. in-8°, 150 p., 4 fr. 50 ; Dunod & Pinad, Paris.

Annuaire pour l'An 1917 publié par le Bureau des Longitudes, avec Notices scientifiques. — 1 vol. in-16 de près de 700 p. avec 11 fig., 5 cartes et 2 portraits ; 2 fr. ; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Berichte u. Mitteilungen, veranlasst durch die internationale mathematische Unterrichtskommission, herausg. von W. Lietzmann. Erste Folge, XII : A. Gutzmer, Die Tätigkeit des deutschen Unterausschusses. — 1 fasc. gr. in-8°, 31 p., 1 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Poradnik dla Samouków, Wskazówki Metodyczne dla Studjujacych Poszczególne Nauki. (Guide pour les autodidactes, vol. I, Mathématiques, rédigé par Sierpinski, Zaremba et de nombreux collaborateurs.) — 1 vol. gr. in-8°, xl-620 p., 2 R. 40 ; Michalski & Hefflich, Varsovie.

SUR
QUELQUES REPRÉSENTATIONS ARITHMÉTIQUES DES FONCTIONS ANALYTIQUES

PAR

A. Kienast (Küsnacht-Zurich).

D'après Weierstrass la fonction analytique est définie par la série

$$P(x \mid a) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu} \tag{1}$$

et par son prolongement analytique. La fonction est parfaitement déterminée par la suite infinie de quantités

$$F(a), \quad F^{(1)}(a), \quad F^{(2)}(a), \ldots, \quad F^{(\mu)}(a), \ldots \tag{2}$$

si elle est choisie telle que la limite supérieure des valeurs limites des modules

$$\left| \sqrt[\mu]{\frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)} \right|$$

soit un nombre fini, par exemple $\frac{1}{\gamma}$. On désigne en général par $F(x)$ la fonction qui, dans sa totalité, est définie par les éléments (2).

Si K est un continu formé d'une seule pièce qui ne se recouvre nulle part elle-même, renfermant le point a, et tel que la branche de la fonction $F(x)$, formée par $P(x \mid a)$ et son prolongement analytique à l'intérieur de K, reste uniforme et régulière, M. Mittag-Leffler désigne cette branche par

FK(x). En désignant le cercle de convergence de la série (1) par C, l'expression

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{1}{\mu!} F^{(\mu)}(a)(x-a)^{\mu}$$

donne la représentation analytique de FC(x). Cette expression est composée des éléments (2) et des nombres rationnels $\frac{1}{\mu!}$ indépendants du choix des dits éléments.

Le problème dont je vais m'occuper consiste à construire des expressions arithmétiques formées au moyen des constantes (2) valables dans une étoile de convergence K de centre a et circonscrite au cercle C. MM. Mittag-Leffler et Borel en ont publié des solutions des plus importantes, M. Mittag-Leffler demandant une représentation valable et gardant sa forme dans tout le domaine de la branche uniforme d'une fonction monogène.

Laissant de côté de telles conditions supplémentaires, les considérations suivantes contiennent la démonstration dans le cas le plus spécial[1] d'une méthode qui permet d'obtenir une infinité de formules à l'aide desquelles on peut transformer une expression limite[2] dans une autre. Le reste de la note sera consacré aux applications.

I

L'intégrale générale de l'équation différentielle linéaire

$$x\frac{dy}{dx} - xp(x)y = x^{\alpha}\varphi(x) , \tag{3}$$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n ,$$

$$x^{\alpha}\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m x^{m+\alpha} ,$$

[1] La démonstration pour tous les cas aujourd'hui accessibles est développée dans un mémoire : « Ueber eine Integralformel und die Eigenschaften der darin vorkommenden Funktionen », *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, 61. Jahrgang 1916, drittes und viertes Heft.

[2] G. Mittag-Leffler, *Sur la représentation*, etc., *Acta Math.*, t. 24, p. 184, la note.

où $p(x)$ et $\varphi(x)$ sont supposés des séries de Taylor à rayon de convergence non nul, se compose d'une intégrale particulière $V(x)$ de (3) et de l'intégrale générale

$$y_1(x) = e^{\int_0^x p(\xi)\,d\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} E(k)\,x^k \tag{4}$$

de l'équation sans second membre

$$xy_1'(x) - xp(x)y_1(x) = 0\ , \tag{5}$$

c'est-à-dire

$$y(x) = y_1(x) + V(x)\ .$$

On peut arriver à la représentation d'une intégrale particulière de deux manières.

La différentiation de (3) donne

$$y'' - p(x)y' - p'(x)y = x^{\alpha-2}[x\,.\,\varphi'(x) + (\alpha - 1)\varphi(x)] = x^{\alpha-2}\,.\,\varphi_1(x)\ ,$$

d'où

$$x^2.\,\varphi(x)y'' - [xp(x)\varphi(x) + \varphi_1(x)]xy' - x[xp'(x)\varphi(x) - p(x)\varphi_1(x)]y = 0\ . \tag{6}$$

L'équation déterminante de cette équation différentielle

$$\varphi(0)\gamma(\gamma - 1) - \varphi_1(0)\gamma = \gamma\,.\,\varphi(0)[\gamma - 1 - (\alpha - 1)] = 0$$

possède comme racine 0 et α. Par conséquent (6) admet un système fondamental d'intégrales $z_1 z_2$ dont on connaît la forme analytique dans le voisinage de $x = 0$.

Chaque intégrale de (3) doit être intégrale de (6); mais la réciproque n'est pas vraie. Donc il est toujours possible de déterminer les constantes D telles qu'on ait

$$y_1(x) = D_1 z_1(x) + D_2 z_2(x)\ , \tag{7}$$

$$V(x) = D_1' z_1(x) + D_2' z_2(x)\ . \tag{8}$$

Il faut distinguer *trois cas :*

Premier cas : Supposons que α ne soit pas un entier. Le système fondamental de (6) est de la forme

$$z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n\ , \qquad z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha}\ .$$

De l'équation (7) résulte à cause des expressions pour y_1, z_1, z_2 valables dans le voisinage de $x = 0$

$$D_2 = 0 \qquad \text{et} \qquad y_1(x) = D_1 z_1(x) .$$

Par suite l'équation (8) s'écrit

$$V(x) = \frac{D_1'}{D_1} y_1(x) + D_2 z_2(x) ,$$

mais si V est intégrale particulière de (3)

$$V - \frac{D_1'}{D_1} y_1(x)$$

en est une autre. Donc on est conduit au

Théorème : L'équation différentielle (3) admet une intégrale complètement déterminée par la propriété d'être, dans le voisinage de $x = 0$, développable en la série convergente

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha} , \qquad A_0 \neq 0 .$$

Inversement :

Théorème : Si la fonction y est donnée par la série convergente

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha} ; \qquad A_0 \neq 0 ,$$

l'expression (3)

$$P(y) = x \frac{dy}{dx} - xp(x) y$$

est égale à la série convergente

$$\sum_{m=0}^{\infty} D_m x^{m+\alpha} ; \qquad D_0 \neq 0 .$$

Second cas : Soit α un entier positif. Un système fondamental pour (6) est

$$z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha} , \qquad z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [e_n + d_n \log x] x^n ,$$

et, certaines conditions étant remplies, la seconde intégrale z_2 ne contient pas de logarithme.

Si dans le développement de z_2 le terme logarithmique ne manquait pas, on conclurait de l'équation (7) $D_2 = 0$, et puisque l'égalité entre les deux membres restant est impossible, le développement de z_2 ne renferme pas de logarithme

$$z_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n .$$

Par suite l'équation (8)

$$V(x) = D_1' . \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha} + D_2' . \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n$$

conduit au

Théorème : L'équation différentielle (3) admet une intégrale complètement déterminée par la propriété d'être, dans le voisinage de $x = 0$, développable en la série convergente

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} B_k x^k ; \qquad B_0 \neq 0 ,$$

et inversement.

Maintenant l'équation (7) pour la valeur $x = 0$ montre que le coefficient de z_2 ne peut pas disparaître. Introduisant

$$z_2 = \frac{1}{D_2} y_1(x) - \frac{D_1}{D_2} z_1(x)$$

dans (8) on aura

$$V(x) = \frac{D_2'}{D_2} y_1(x) + \frac{D_1' D_2 - D_1 D_2'}{D_2} z_1(x) ,$$

et l'on est amené au même théorème trouvé dans le premier cas. Cette substitution est seulement impossible si (8) ne renferme pas z_2 ; mais dans ce cas (8) prouve le théorème.

Troisième cas : Supposons α nul ou entier négatif. Le système fondamental de (6) est

$$z_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n , \qquad z_2 = \sum_{n=0}^{\infty} [B_n + C_n \log x] x^n ,$$

et de (8) on tire le

Théorème : L'équation différentielle (3) admet une inté-

grale représentée par la série convergente

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} [a_n + b_n \log x] x^n .$$

Les considérations faites se rapportent au cas le plus spécial du problème suivant : Déterminer le développement en série d'une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$P(y) = \sum_{i=0}^{n} p_i(x) x^i y^{(i)} = \sum_{k=0}^{m} x^{\alpha_k} [\varphi_{0k}(x) + \varphi_{1k}(x) \lg x + \ldots + \varphi_{\beta_k k}(x) (\lg x)^{\beta_k}] ,$$

$$p_i(x) = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{i\lambda} x^{\lambda} ,$$

valable dans le voisinage du point singulier $x = 0$ pour lequel les intégrales de $P(y) = 0$ sont toutes régulières. On trouvera les résultats pour le cas général dans le mémoire cité plus haut.

De la même manière j'arrive dans ce mémoire à l'expression en série représentant asymptotiquement une intégrale particulière de l'équation différentielle

$$P(y) = \sum_{i=0}^{n} x^{s(n-i)} . p_i(x) y^{(i)} = e^{\frac{\beta x^{t+1}}{t+1} + \frac{\beta_1 x^t}{t} + \ldots + \beta_t x} . x^{\sigma} \left[C_0 + \frac{C_1}{x} + \ldots \right] ,$$

$$p_i(x) = a_i + \frac{a_{i_1}}{x} + \frac{a_{i_2}}{x^2} + \ldots ; \qquad a_n \neq 0 ,$$

quand x grandit indéfiniment en étant positif.

II

On connaît plusieurs moyens pour former une intégrale définie représentant une solution particulière de (3). A ce but conduisent la méthode de la variation des constantes et un théorème de Cauchy, voir *Comptes Rendus*, T. 11, p. 2 (1840). Soit

$$\int_{x_0}^{x} W(x, t) dt$$

cette intégrale définie cherchée, il doit être possible de déterminer la constante C telle que l'équation subsiste

$$Cy_1(x) + V(x) = \int_{x_0}^{x} W(x, t)\,dt .$$

Or dans le cas présent il est plus simple de la tirer des équations

$$xy' - xp(x)y = x^{\alpha} \cdot \varphi(x) ,$$

$$xy_1' - xp(x)y_1 = 0 ,$$

qui donnent

$$x[y_1 \cdot y' - y \cdot y_1'] = x^{\alpha} \cdot y_1 \cdot \varphi(x)$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{y}{y_1}\right] = \frac{x^{\alpha-1} \cdot \varphi(x)}{y_1(x)} ,$$

ou

$$\left|\frac{V(x)}{y_1(x)}\right|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} \frac{x^{\alpha-1} \cdot \varphi(x)}{y_1(x)}\,dx ; \tag{9}$$

car on a

$$\left|\frac{y(x)}{y_1(x)}\right|_{x_0}^{x} = \left|\frac{Cy_1(x) + V(x)}{y_1(x)}\right|_{x_0}^{x} = \left|\frac{V(x)}{y_1(x)}\right|_{x_0}^{x} .$$

C'est la formule principale et, comme l'équation différentielle (3) joue un rôle fondamental, je l'appelle *équation différentielle de liaison.*

Dans le mémoire plusieurs fois cité je fais la démonstration d'une formule analogue pour le cas général d'une équation différentielle de liaison de $n^{\text{ième}}$ ordre.

Connaissant la forme analytique des fonctions V, y_1, φ il s'ensuit :

Théorème : Les deux membres de (9) convergent pour $\lim x_0 = 0$, si $R(\alpha) > 0$, $R(\alpha)$ désignant la partie réelle de la quantité α.

III

Les applications de (9) qui suivent résultent de l'introduction d'un paramètre. Je commence par le cas le plus simple :

$$y' - ay = x^{\alpha-1} . \varphi(x) \ , \tag{10}$$

$$\left| e^{-ax} . V(x) \right|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} e^{-at} . t^{\alpha-1} . \varphi(t)\, dt \ . \tag{11}$$

Ici $V(x)$ est représenté par la série

$$V(x) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k x^{k+\alpha} \ ,$$

si α n'est ni nul ni entier négatif, et si en outre $R(\alpha) > 0$, on a

$$e^{-ax} . V(x) = \int_{0}^{x} e^{-at} . t^{\alpha-1} . \varphi(t)\, dt \ . \tag{12}$$

La condition de convergence étant remplie pour $\alpha = 1$, on obtient pour

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \ ,$$

la formule

$$e^{-ax} . V(x) - V(0) = \int_{0}^{x} e^{-at} . \varphi(t)\, dt \ . \tag{13}$$

La relation entre $V(x)$ et $\varphi(x)$ se calcule en employant dans (10) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^{n+\alpha} \ ,$$

ce qui donne :

$$x^{\alpha-1} . \varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n x^{n+\alpha} = \sum_{n=1}^{\infty} [(n+\alpha) A_n - a A_{n-1}] x^{n+\alpha-1} \ ,$$

ou

$$D_n = (n+\alpha) A_n - a A_{n-1} \ .$$

Pour introduire le paramètre mentionné je pose maintenant

$$A_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda} z^{\lambda},$$

ce qui entraîne que les $a_{n\lambda}$ et z doivent être choisis conformément à la condition que la série $\sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n$ soit convergente.

En faisant usage du tableau suivant :

$a_{n\lambda}$	$\lambda = 0$	1	2	3
$n = 0$	a_{00}	a_{01}	a_{02}	*
1	0	$\frac{a a_{01}}{\alpha + 1}$	$\frac{a a_{02}}{\alpha + 1}$	*
2	0	0	$\frac{a^2 a_{02}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}$	*
3	*	*	*	*

on trouve

$$A_0 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda},$$

. . . . . .

$$A_n = \frac{a^n}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n)} \sum_{\lambda=n}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda},$$

$$D_0 = \alpha . A_0,$$

. . . . . .

$$D_n = \frac{- a^n . a_{0,n-1} . z^{n-1}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \ldots (\alpha + n - 1)},$$

et la formule (12) devient

$$e^{-ax} . (ax)^{\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \left[\sum_{\lambda=n}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} \right]$$

$$= \left(\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} \right) \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-at} (at)^{\alpha-1} d(at)$$

$$- \int_0^x e^{-at} (at)^{\alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n} (azt)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right\} d(at) . \qquad (14)$$

Elle est valable pour toutes les valeurs des a_{0n} et z telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n = \alpha \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^\lambda - ax \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n}(azx)^n}{(\alpha+1)(\alpha+2)\dots(\alpha+n)} \qquad (15)$$

soit par rapport à x une série convergente. Par suite $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^\lambda$ est nécessairement une série à rayon de convergence non nul et z une valeur pour laquelle elle converge. Donc $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n}(zx)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)}$ est une série toujours convergente. Pourtant je distingue *deux cas :*

Premier cas. — Soit $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^\lambda$ une série à rayon de convergence non nul et z une valeur fixe pour laquelle elle converge. A chaque quantité positive ε si petite qu'on veut, il est possible de déterminer l'indice ν tel qu'on a pour $n > \nu$

$$\left| \sum_{\lambda=n}^{\infty} a_{0\lambda} z^\lambda \right| < \varepsilon .$$

Il est facile d'obtenir la formule

$$(ax)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} = e^{ax} - \frac{(ax)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-t}.dt}{\left(1+\frac{t}{ax}\right)^{1-\alpha}} ,$$

$$= e^{ax} - \frac{a^\alpha . x^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \Gamma(n+1-\alpha) \frac{(-1)^n}{(ax)^n} ,$$

par exemple en calculant (12) pour $\varphi(x) = 1$. Donc le premier membre de (14) peut s'écrire

$$\frac{(ax)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} \left[\sum_{\lambda=n}^{\infty} a_{0\lambda} z^\lambda \right]}{(ax)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n}{\Gamma(\alpha+n+1)} + \frac{(ax)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \frac{e^{-t}.dt}{\left(1+\frac{t}{ax}\right)^{1-}}} = \mathrm{L} .$$

Cette forme conduit aisément à la valeur limite :

$$\lim_{x=\infty} \mathrm{L} = \lim_{n=\infty} \left(\sum_{\lambda=n}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} \right) = 0 \ .$$

L'équation (14) est valable pour chaque valeur z, pour laquelle $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda}$ est convergente et pour chaque valeur x qui n'est pas point singulier de l'équation différentielle (10), c'est-à-dire pour chaque valeur finie x, $x = \infty$ étant le seul point singulier. Donc, le point $x = \infty$ étant atteint tel que $\mathrm{R}(ax) > 0$, on conclut de

$$\lim_{x=\infty} \int_0^x e^{-at} (at)^{\alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n} (azt)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right\} d(at)$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-at} (at)^{\alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n} (azt)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right\} d(at)$$

$$= \left[\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} \right] \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \lim_{x=\infty} \int_0^x e^{-at} (at)^{\alpha-1} d(at) - \lim_{x=\infty} \mathrm{L} \ ,$$

le Théorème : L'égalité

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda} = \int_0^{\infty} e^{-at} (at)^{\alpha} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n} (azt)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right\} d(at) \ ; \qquad \mathrm{R}(\alpha) > 0 \qquad (16)$$

subsiste pour chaque valeur z pour laquelle $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda}$ est convergente. L'intégrale définie dans le second membre converge au moins pour les mêmes valeurs de z.

Dans son mémoire « Sur la représentation analytique d'une branche uniforme d'une fonction monogène », *Acta Math.*, T. 29, M. G. Mittag-Leffler a démontré trois théorèmes (A, B, C du § 1) se rapportant à des intégrales de la forme de l'intégrale définie dans (16). Il est facile d'étendre en suivant le même ordre d'idée les autres résultats des §§ 1 et 4 du mémoire de M. Mittag-Leffler à cette nouvelle intégrale. On est ainsi conduit au

Théorème : L'intégrale

$$f(z) = \int_0^\infty e^{-t} . t^\alpha \left\{ \sum_{n=0}^\infty \frac{a_{0n} (zt)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right\} dt$$

possède par rapport à z une étoile de convergence $B^{(1)}$. L'égalité

$$FB^{(1)}(z) = f(z)$$

a lieu partout à l'intérieur de $B^{(1)}$.

Cette étoile de convergence que M. Mittag-Leffler, dans le Tome 29 des *Acta Math.*, désigne par $B^{(1)}$ est identique au polygone de sommabilité de M. E. Borel.

Par le même procédé on obtient pour $\alpha = 1$ les formules (14) et (16) en partant de (13). Une intégration par parties conduit alors à la formule (16) dans laquelle on a fait $\alpha = 0$. C'est la formule célèbre de Laplace-Abel-Borel.

Second cas. — Soit $\sum_{\lambda=0}^\infty a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda}$ une série qui représente une fonction $f(z)$ asymptotiquement. C'est une série divergente pour chaque valeur finie z. Les considérations faites dans le premier cas seront en défaut, mais c'est M. Borel qui a remarqué que l'intégrale Laplace-Abel peut pourtant être convergente. M. Borel[1] introduit par définition la valeur de cette intégrale définie comme somme de la série divergente. Et M. G. H. Hardy[2] a formulé à cet égard son « principle » : « If two limiting processes performed in a definite order on a function of two variables lead to a definite value X, but when performed in reverse order lead to a meaningless expression Y, we may agree to interpret Y as meaning X. »

Il est curieux[3] que personne ne semble avoir remarqué la possibilité d'une démonstration exacte. Dans le cas présent il n'est pas nécessaire d'avoir recours à une nouvelle définition ou à un nouveau principe. Mais les séries conver-

---

[1] Voir p. ex. ses *Leçons sur les séries divergentes*, Gauthier-Villars, 1901.

[2] *Trans. Cambr. Phil. Soc.*, 19, p. 297, 1904.

[3] Comparez la critique sévère de M. G. Mittag-Leffler, « Sur la représentation arithmétique des fonctions analytiques générales d'une variable complexe », Congrès intern. des mathématiciens, Rome, 1908, Atti, I, et *Bull. Americ. Math. Soc.*, sér. 2. vol. XIV (1908).

gentes et les séries asymptotiques dans le sens de Poincaré sont jusqu'à ce jour les seules qui ont un sens arithmétique défini. La supposition faite signifie, d'après la définition introduite par Poincaré : il subsiste pour chaque entier m l'équation

$$\lim_{z=\infty} z^m \left[f(z) - \sum_{\lambda=0}^{m} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda} \right] = 0 .$$

Donc on écrit l'équation (14) de la manière suivante :

$$z^m . e^{-ax} . x^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ax)^n \left[\sum_{\lambda=n}^{m} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda} \right]}{\Gamma(\alpha + n + 1)}$$

$$= - z^m \left\{ f(z) - \sum_{\lambda=0}^{m} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda} \right\} \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-at} . t^{\alpha-1} dt$$

$$- z^m \left\{ \frac{-f(z)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x e^{-at} . t^{\alpha-1} dt + \int_0^x e^{-at} . t^\alpha \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{a_{0n} a^{n+1} \left(\frac{t}{z}\right)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right] dt \right\} ,$$

ce qui est une équation exacte. En passant à la limite $x = +\infty$, on trouve pour $R(a) > 0$ et pour chaque valeur finie de z, excepté $z = 0$,

$$0 = - z^m \left[f(z) - \sum_{\lambda=0}^{m} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda} \right]$$

$$- z^m \left\{ - f(z) + \int_0^\infty e^{-at} (at)^\alpha \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{a_{0n} \left(\frac{at}{z}\right)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right] d(at) \right\} .$$

Or il subsiste pour chaque entier m l'équation

$$\lim_{z=\infty} z^m \left\{ f(z) - \int_0^\infty e^{-at} (at)^\alpha \left[\sum_{n=0}^{m} \frac{a_{0n} \left(\frac{at}{z}\right)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right] d(at) \right\} = 0 . \qquad (17)$$

et c'est l'expression en formule du fait que l'intégrale

$$K = \int_0^\infty e^{-at} (at)^\alpha \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_{0n} \left(\frac{at}{z}\right)^n}{\Gamma(\alpha + n + 1)} \right] d(at) \qquad (18)$$

représente asymptotiquement la fonction $f(z)$ de même que la série $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda}$ de laquelle on est parti.

Mais il est possible que cette intégrale K converge et représente une fonction analytique $K(z)$ dans le sens ordinaire. Donc on conclut

$$f(z) = K(z) + E ,$$

où E est une fonction représentée asymptotiquement par un développement identiquement nul. Et parce que dans les calculs faits on n'a pas introduit des parties étrangères à $f(z)$, l'équation

$$f(z) = K(z) \tag{19}$$

sera exacte dans un grand nombre de cas.

La fonction $f(z)$ est représentée asymptotiquement par la série $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda}$ lorsque $z = r \cdot e^{i\psi}$ croît indéfiniment suivant un rayon déterminé. Pour les séries asymptotiques dont on fait usage dans la théorie des équations différentielles, une telle égalité asymptotique

$$f(z) \sim \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} \frac{1}{z^\lambda}$$

r tendant vers l'infini, est unique pour tous les arguments ψ compris dans un certain angle

$$\theta_1 < \psi = \arg z < \theta_2 .$$

Donc l'équation (17) aura lieu dans le même angle.

La série sous le signe d'intégration

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_{0\lambda} \left(\frac{at}{z}\right)^\lambda}{\Gamma(\alpha + \lambda + 1)} = g\left(\frac{at}{z}\right) \tag{20}$$

est convergente ou représente une fonction $g\left(\frac{at}{z}\right)$ asymptotiquement.

Je suppose, faisant $\frac{at}{z} = u = \rho \cdot e^{\varphi i}$, que la série

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{a_{0\lambda} u^\lambda}{\Gamma(\alpha + \lambda + 1)}$$

soit convergente et que la fonction $g(u)$ qu'elle représente soit holomorphe dans l'angle

$$0 \leqq \varphi \leqq N \,, \qquad \text{(N nombre positif arbitrairement grand)}$$
$$\varphi_1 < \varphi < \varphi_2 \,.$$

Ainsi $u = \infty$ est, pour $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$ le seul point singulier possible.

En outre, je suppose que, $u = \infty$ étant singulier, $g(u)$ soit tel que l'intégrale (18) converge pour

$$\varphi_1 < \arg u < \varphi_2 \,,$$

ou, t ayant l'argument 0,

$$\varphi_1 < \arg a - \arg z < \varphi_2 \,,$$
$$\arg a - \varphi_2 < \arg z < \arg a - \varphi_1 \,.$$

Il résulte que l'intégrale (18) converge si $z = r \,.\, e^{i\psi}$ est une valeur quelconque dans l'angle

$$\arg a - \varphi_2 < \psi < \arg a - \varphi_1 \,,$$

$\varepsilon \leqq r \leqq \infty$ quelque petit que soit le nombre positif ε. Dans cet angle l'intégrale (18) représente une fonction analytique holomorphe.

Dans le cas le plus simple et très important $g(u)$ est fonction rationnelle, holomorphe pour $u = \infty$. Sous cette condition l'intégrale (18) est convergente dans tout le plan de la variable z sauf peut-être sur quelques rayons limitant un nombre fini d'angles. Les fonctions qu'elle représente, holomorphes pour tout point z intérieur à ces différents angles sont en général des fonctions analytiques différentes.

L'exemple suivant montre le grand avantage que présentent les formules (16) et (19).

On sait par la méthode Poincaré-Horn, que l'équation différentielle

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - n^2) y = 0$$

admet un système fondamental qui, pour toutes les valeurs

finies de n réelles ou complexes, est représenté asymptotiquement par les séries

$$y_1(x) = \frac{e^{ix}}{\sqrt{ix}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda + n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda - n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda + 1)} \frac{1}{(2ix)^{\lambda}},$$

$$y_2(x) = \frac{e^{-ix}}{\sqrt{-ix}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda + n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\lambda - n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda + 1)} \frac{1}{(-2ix)^{\lambda}},$$

lorsque $r = |x|$ augmente indéfiniment, si

pour la fonction $y_1(x)$: $-\pi + \delta < \arg x < 2\pi - \delta$,

» » $y_2(x)$: $+\delta < \arg x < 3\pi - \delta$,

le nombre positif δ étant aussi petit qu'on le veut.

Je pose $a = 1$, $\alpha = n - \frac{1}{2}$ et à cause de la formule

$$\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(\lambda - n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(-n + \frac{1}{2}\right)\Gamma(\lambda + 1)} (-u)^{\lambda} = (1 + u)^{n - \frac{1}{2}};$$

(16) donne

$$y_{\varepsilon}(x) = \frac{e^{-(-1)^{\varepsilon}.ix} . e^{(-1)^{\varepsilon}\frac{\pi}{4}i}}{\sqrt{x}} \int_0^{\infty} e^{-t} . t^{n-\frac{1}{2}} \frac{\left[1 + (-1)^{\varepsilon}\frac{t}{2ix}\right]^{n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} dt,$$

$$(\varepsilon = 1, 2)$$

d'où

$$y_1(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n . \sqrt{2} . e^{\frac{\pi i}{2}(n-1)}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_{-i}^{\infty} e^{-xu} (1 + u^2)^{n - \frac{1}{2}} du,$$

$$y_2(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n . \sqrt{2} . e^{-\frac{\pi i}{2}(n-1)}}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)} \int_{+i}^{\infty} e^{-xu} (1 + u^2)^{n - \frac{1}{2}} du.$$

Ici le chemin d'intégration doit atteindre l'infini tel que $R(xu) > 0$.

Enfin les relations

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{-i\frac{n\pi}{2}} \cdot y_1(x) = H_n^{(1)}(x) ,$$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot e^{i\frac{n\pi}{2}} \cdot y_2(x) = H_n^{(2)}(x) ,$$

montrent qu'on est arrivé à la représentation par intégrales définies des fonctions cylindriques de troisième espèce[1] (Hankel).

On voit que la formule (16) et d'autres qu'on obtient par le même procédé fournissent un moyen indispensable pour des calculs effectifs, notamment pour les séries dérivant des équations différentielles linéaires du type hypergéométrique.

IV

Je reprends les considérations du commencement de III, en disposant des constantes $a_{n\lambda}$ comme il suit

$a_{n\lambda}$	$\lambda = 0$	1	2	3
$n = 0$	0	0	0	0 .
1	$\frac{a_{00}}{\alpha + 1}$	0	0	0 .
2	$\frac{a \cdot a_{00}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}$	$\frac{a \cdot a_{01}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)}$	0	0 .
3	$\frac{a^2 \cdot a_{00}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$	$\frac{a^2 \cdot a_{01}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$	$\frac{a^2 \cdot a_{02}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2)(\alpha + 3)}$	0 .

Il en résulte

$$A_0 = 0 ,$$

. . . . . .

$$A_n = \frac{a^{n-1} \cdot \sum_{\mu=0}^{n-1} a_{0\mu} z^{\mu}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n)} ,$$

$$D_0 = 0 ,$$

. . . . . .

$$D_n = \frac{a^{n-1} \cdot a_{0,n-1} \cdot z^{n-1}}{(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + n)} ,$$

[1] N. Nielsen. *Handbuch der Theorie der Cylinderfunktionen.*

et la formule (12) devient

$$e^{-ax}(ax)^{\alpha}\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{(ax)^{\lambda}}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\left[\sum_{n=0}^{\lambda-1}a_{0n}z^{n}\right]$$

$$=\int_{0}^{x}e^{-at}(at)^{\alpha}\left\{\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{a_{0\lambda}(azt)^{\lambda}}{\Gamma(\alpha+\lambda+1)}\right\}d(at)\,. \qquad (21)$$

Cette équation est démontrée pour $R(\alpha) > 0$, mais on voit aisément qu'elle reste valable pour $\alpha = 0$. En outre on a par rapport aux $a_{n\lambda}$ et z à remplir la condition que

$$\sum_{n=0}^{\infty} D_n x^n = x\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{a_{0\lambda}(azx)^{\lambda}}{(\alpha+1)\ldots(\alpha+\lambda)}\,,$$

soit une série convergente. Elle est satisfaite si $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda}$ est une série convergente; elle peut l'être encore pour une infinité de séries asymptotiques. Il est permis de donner dans (21) à x une valeur finie quelconque, si $\sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{0\lambda} z^{\lambda}$ est convergente, mais si c'est une série asymptotique il y a des restrictions spéciales pour chaque choix des constantes $a_{0\lambda}$.

De la définition de la notion limite on conclut que pour $\lim x = +\infty$ les deux membres de (21) convergent pour les mêmes valeurs de z.

L'intégrale du second membre a été considérée dans III.

Cette formule (21) dans le cas $a = 1$, $\alpha = 0$, $\lim x = +\infty$ est la découverte de M. E. Borel [1] et M. G. Mittag-Leffler en parle à plusieurs occasions [2].

Il me semble du plus haut intérêt qu'il ne subsiste pas seulement pour $\lim x = +\infty$ mais z étant fixé pour chaque valeur x qui est point régulier de la fonction analytique défini par la série de Taylor $\sum_{\lambda=0}^{\infty}\frac{a_{0\lambda}(azx)^{\lambda}}{\Gamma(a+\lambda+1)}$ à rayon de convergence fini plus grand que zéro.

---

[1] Voir : *Leçons sur les séries divergentes*, Paris, 1901.

[2] Par exemple, Sur la représentation, etc., *Acta Math.*, T. 26 (1902), p. 374.

V

Comme dernière application de la méthode exposée je reviens à l'équation (3) pour $\alpha = 1$.

$$x\frac{dy}{dx} - xp(x)y = x \cdot \varphi(x) \ , \tag{22}$$

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \ ,$$

$$\varphi(x) = \sum_{m=0}^{\infty} D_m x^m$$

$p(x)$ et $\varphi(x)$ étant des séries de Taylor à rayon de convergence non nul. L'intégrale de l'équation sans second membre est

$$y_1(x) = e^{\int_0^x p(\xi)d\xi} = \sum_{n=0}^{\infty} E(n)x^n \ , \tag{4}$$

et il reste à calculer les différentes parties de la formule (9) pour le cas présent.

$$\left|\frac{V(x)}{y_1(x)}\right|_{x_0}^{x} = \int_{x_0}^{x} \frac{\varphi(t)\,dt}{y_1(t)} \ .$$

Le théorème du second cas dans I montre qu'on aura

$$V(x) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \ ,$$

et l'on obtient

$$D_n = (n+1)A_{n+1} - \sum_{\lambda=0}^{n} b_{n-\lambda} \cdot A_\lambda \ .$$

Je dispose des $A_n = \sum_{\lambda=0}^{\infty} a_{n\lambda} z^\lambda$ de la manière suivante :

$a_{n\lambda}$	$\lambda = 0$	1	2	3
$n = 0$	0	0	0	0 .
1	$E(1)a_0$	0	0	0 .
2	$E(2)a_0$	$E(2)a_1$	0	0 .
3	$E(3)a_0$	$E(3)a_1$	$E(3)a_2$	0 .

d'où

$$A_0 = 0 \ ,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$A_n = E(n) \sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r \ ,$$

et par suite

$$D_n = (n+1)E(n+1) \sum_{r=0}^{n} a_r z^r - \sum_{\lambda=0}^{n} b_{n-\lambda} E(\lambda) \left\{ \sum_{r=0}^{\lambda-1} a_r z^r \right\}$$

$$= (n+1)E(n+1) a_n z^n + \sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r \left[(n+1)E(n+1) - \sum_{\mu=0}^{n-1-r} b_\mu E(n-\mu) \right]$$

$$= \sum_{r=0}^{n} d_{n,r} a_r z^r \ .$$

Donc on est arrivé à l'équation

$$\frac{\sum_{n=1}^{\infty} E(n) x^n \left(\sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r \right)}{\sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n}$$

$$= \int_0^x \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} t^n [d_{n,0} a_0 + d_{n,1} a_1 z + \ldots + d_{n,n} a_n z^n] \right\} \frac{dt}{y_1(t)} \ . \qquad (23)$$

Pour le moment je considère cette formule seulement en supposant $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E(n) x^n$ fonction entière transcendante. Dans ce cas M. Mittag-Leffler[1] donne pour l'expression à gauche dans (23) la valeur

$$= \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r - \frac{1}{2\pi i} \frac{1}{y_1(x)} \int_S \frac{F(z \cdot y)}{y-1} \cdot y_1\left(\frac{x}{y}\right) dy \ . \qquad (24)$$

où

$$F(z) = \sum_{r=0}^{\infty} a_r z^r \ .$$

Le contour S doit être la limite d'une surface simplement

[1] Voir : Sur la représentation, etc., *Acta Math.*, T. 29, p. 170.

connexe pour laquelle la fonction $F(z.y)$ reste régulière; il doit être parcouru dans le sens direct et embrasser les deux points $y = 0$, $y = 1$.

En discutant l'intégrale curviligne M. G. Mittag-Leffler a démontré que

$$\lim_{x=\infty} \frac{\sum_{n=1}^{\infty} E(n).x^n \left(\sum_{r=0}^{n-1} a_r z^r\right)}{\sum_{n=0}^{\infty} E(n).x^n} = FA(z) \tag{25}$$

est uniformément convergente pour tout domaine intérieur à l'étoile principale A et représente la branche fonctionnelle $FA(z)$ partout à l'intérieur de cette étoile, si la fonction entière $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} E(n).x^n$ est choisie telle que :

$$\lim_{x=\infty} \frac{y_1(x.u)}{y_1(x)} = \lim_{x=\infty} e^{\int_0^{x.u} p(\xi)d\xi - \int_0^{x} p(\xi)d\xi} = 0$$

d'une manière uniforme tant que u appartient à un domaine fini situé en dehors de la partie de l'axe réel positif compris entre $x = 1$ et l'infini. Cette condition est satisfaite par toute fonction entière

$$\int_0^x p(\xi)\, d\xi = T(x) \tag{26}$$

possédant la propriété :

$$\lim_{r=\infty} T(r.e^{i\varphi}) = 0$$

uniformément pour

$$\varepsilon < \varphi < 2\pi - \varepsilon ,$$

ε étant un nombre positif arbitrairement petit,

$$\lim_{r=\infty} T(r.e^{i\varphi}) = \infty \qquad \text{pour} \qquad \varphi = 0 .$$

En outre M. Mittag-Leffler démontre que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} E(n)x^n \left(\sum_{r=0}^{n-1} |a_r z^r|\right)$$

est pour toute valeur de z une série toujours convergente par rapport à x. Elle est, x étant fixé, uniformément convergente pour un domaine quelconque de la variable z. $p(x) = T'(x)$ est fonction entière transcendante, donc $\varphi(x) = V'(x) - p(x).V(x)$ est une série de x et de z qui partage avec $V(x)$ les deux propriétés exposées il y a un moment. La fonction entière transcendante $y_1(x) = e^{T(x)}$ ne s'annule pour aucune valeur finie x et par suite l'intégrale dans (23) a un sens pour chaque valeur finie x.

En passant à la limite on est conduit à cause de (25) à la formule

$$\int_0^\infty \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} t^n [d_{n,0} a_0 + d_{n,1} a_1 z + \dots + d_{n,n} a_n z^n] \right\} \frac{dt}{y_1(t)} = FA(z) \,. \qquad (27)$$

L'intégrale converge uniformément pour tout domaine intérieur à l'étoile principale A. C'est une généralisation de l'intégrale Laplace-Abel, de l'intégrale de M. Mittag-Leffler et une formule analogue à la troisième des formules (125) p. 177 démontrées par M. Mittag-Leffler (*Acta Math.* t. 29).

Je termine par la remarque que les applications de la méthode exposée peuvent être augmentées considérablement, car elle contient trois éléments arbitraires : 1. l'équation différentielle de liaison d'ordre quelconque ; 2. le point x_0, qui peut être point singulier de cette équation différentielle en lequel toutes ses intégrales sont régulières ou point singulier en lequel les intégrales sont irrégulières ; 3. le chemin d'intégration.

D'autres résultats que j'ai obtenus paraîtront dans la *Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich* [1].

Küsnacht (Zürich), octobre 1916.

---

[1] « Neue Entwicklungen über die Abel'sche Integralumkehrungsformel. » Jahrgang 62 (1917).

SUR
CERTAINES FONCTIONS ANALYTIQUES UNIFORMES OBTENUES COMME LIMITES DE FONCTIONS MULTIFORMES

PAR

D. Pompeiu (Bucarest).

---

1. — On connaît le procédé, aujourd'hui classique, pour définir sur un segment rectiligne un ensemble de points : parfait et partout non dense.

On enlève du segment donné (a, b) les points intérieurs appartenant à une suite dénombrable d'intervalles (a_k, b_k), ces intervalles étant assujettis aux deux conditions suivantes :

1° Deux quelconques de ces intervalles n'empiètent jamais l'un sur l'autre et n'ont aucune extrémité commune ;

2° Dans toute portion de (a, b) il y a des points appartenant à des segments (a_k, b_k).

Il est clair que

$$\Sigma(b_k - a_k) \leqq b - a .$$

Dans le cas de l'égalité l'ensemble obtenu est de longueur nulle ; dans l'autre cas il est de longueur finie.

2. — Parallèlement à cette opération qui donne l'ensemble parfait partout non dense, considérons une fonction non uniforme $F(z)$ admettant les points a et b comme points *critiques* et supposons qu'il soit possible de trouver une autre fonction $F_1(z)$ admettant a_1 et b_1 comme points critiques, et telle que la différence

$$\Phi_1(z) = F(z) - F_1(z)$$

n'admette plus $(a_1 b_1)$ comme coupure, $\Phi_1(z)$ ayant deux coupures aa_1 et bb_1.

Supposons maintenant que l'on puisse trouver $F_2(z)$ de façon que retranchant $F_2(z)$ de $\Phi_1(z)$ la fonction

$$\Phi_2(z) = F(z) - F_1(z) - F_2(z)$$

soit *uniforme* le long de $a_2 b_2$, les points a_2 et b_2 étant des points critiques pour $F_2(z)$. — Et ainsi de suite.

On serait ainsi conduit à une série

$$\Phi(z) = F(z) - \Sigma F_k(z)$$

définissant une fonction analytique uniforme possédant des points singuliers formant un ensemble parfait non dense.

Dans ce qui suit nous nous proposons de développer ces indications générales et de préciser la méthode qui en découle.

3. — Soit $F(z)$ une fonction analytique possédant deux points *critiques* a et b. Nous écrirons

$$F(z, a, b)$$

pour mettre en évidence les points critiques ; il est clair qu'en dehors des points d'une coupure (a, b) (qu'on peut supposer *rectiligne*) une quelconque des déterminations de F est uniforme : autrement le point à l'infini serait lui-même critique, ce qui n'est pas dans nos hypothèses.

Cela posé, soit

$$G(z, a_1, b_1)$$

une autre fonction analytique non uniforme, possédant les points critiques a_1 et b_1 ; je suppose, pour simplifier l'exposition, que a_1 et b_1 sont deux points situés sur le segment ab, de façon que

$$|a_1 - b_1| < |a - b| .$$

Cela précisé, je suppose que la fonction

$$H = F - G$$

(ou, d'une façon plus claire, toute détermination de cette

fonction) est uniforme en dehors des segments rectilignes aa_1 et bb_1.

En d'autres termes nous admettons que : en retranchant de F (qui possède la coupure ab) la fonction G (qui possède la coupure a_1b_1) on *neutralise* la portion a_1b_1 de la coupure ab. Nous nous proposons, en prenant ce fait analytique comme prémisse, de chercher la forme générale des fonctions F et G.

4. — Pour cela partons d'un point ζ, situé sur ab, avec une certaine détermination F_0 de F et tournons autour du point critique a, dans le sens direct, pour revenir au même point ζ : nous arriverons avec une autre détermination F_1 de F :

La différence

$$F_1(\zeta) - F_0(\zeta) = f(\zeta) \tag{1}$$

n'est pas nulle, en général, lorsque ζ décrit le segment ab : c'est d'ailleurs une fonction analytique qui peut être prolongée en dehors du segment ab.

Un raisonnement analogue nous conduit à une fonction

$$G_1(\zeta) - G_0(\zeta) = g(\zeta) \tag{2}$$

définie sur le segment ab et qui est aussi analytique et prolongeable en dehors de ab.

Il est clair que le fait analytique qui constitue notre hypothèse se traduit par la condition

$$g(\zeta) \equiv f(\zeta) \quad \text{(à une condition uniforme près)} . \tag{3}$$

Je dis que cette condition entraîne la conclusion suivante : f(z) *est nécessairement une fonction uniforme.*

En effet, envisageons la relation (1) par laquelle est définie $f(z)$.

Si cette fonction est non uniforme elle ne peut admettre d'autres points critiques que a et b, d'après nos hypothèses relatives à F.

De la même manière raisonnant sur la relation (2) nous voyons que $g(z)$ ne peut admettre d'autres points critiques que a_1 et b_1.

Mais dans ces conditions, on le voit clairement, la relation (3) ne peut subsister que si $f(z) \equiv g(z)$ est une fonction *uniforme*.

C'est la conclusion à laquelle nous voulions arriver. Mais cette conclusion nous conduit au *problème général* suivant :

Soit $F(z)$ une fonction non uniforme ayant deux points critiques a et b : elle est, par suite, uniforme le long de tout contour fermé contenant a et b dans son intérieur (autrement le point à l'infini serait aussi *critique*).

Joignons a et b par un segment rectiligne $\overline{ab}$. Lorsque l'on part d'un point ζ, situé sur $\overline{ab}$ avec une certaine détermination $F_0(z)$ de $F(z)$ et que l'on tourne autour du point a on revient en ζ avec une valeur $F_1(\zeta)$ différente de la valeur initiale $F_0(\zeta)$: c'est en quoi consiste la non-uniformité autour de a.

Si maintenant on considère la différence

$$f(\zeta) = F_1(\zeta) - F_0(\zeta)$$

pour tous les points ζ du segment ab on définit ainsi une fonction $f(\zeta)$ qui est *régulière* en tout point ζ autre que a et b, et par suite *prolongeable* en dehors du segment ab.

Maintenant deux cas peuvent se présenter :

1° $f(z)$ est une fonction *uniforme ;*

2° $f(z)$ est une fonction *non uniforme.*

Nous ne nous occuperons que du premier cas et nous nous proposons de trouver la forme générale de $F(z)$.

5. — Prenons, pour cela, la fonction

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i} f(z) \log \frac{z-a}{z-b}$$

et considérons la différence

$$u(z) = F(z) - G(z) \ .$$

Partons du point ζ avec la valeur

$$u_0(z) = F_0(z) - G_0(z)$$

$G_0(z)$ étant une, quelconque, des déterminations de $G(z)$: on voit qu'en tournant autour de a on revient au point de départ avec la même valeur u_0. Donc $u(z)$ est une fonction uniforme.

Ainsi

$$F(z) = u(z) + \frac{1}{2\pi i} f(z) \log \frac{z-a}{z-b}$$

qui est la forme générale de $F(z)$.

6. — Maintenant, pour simplifier et considérer un cas précis, supposons

$$u(z) \equiv 0 \ , \qquad f(z) \equiv 1 \ ,$$

alors

$$F(z) = \frac{1}{2\pi i} \log \frac{z-a}{z-b} \ ,$$

que nous écrivons aussi sous la forme $F(z, a, b)$ pour mettre en évidence les points critiques.

Soit maintenant $F(z, a_1, b_1)$ une fonction de même forme mais dont les points critiques sont a_1 et b_1 situés dans l'intérieur du segment $\overline{ab}$. Si je forme la différence

$$F(z, a, b) - F(z, a_1, b_1) \ ,$$

j'observe que cette fonction est uniforme en dehors des coupures $\overline{aa_1}$ et $\overline{bb_1}$. Donc la soustraction de $F(z, a_1, b_1)$ a eu comme effet de neutraliser la portion $\overline{a_1 b_1}$ de la coupure primitive.

Cette propriété peut être utilisée pour obtenir une fonction uniforme intéressante comme somme d'une *série* de fonctions non uniformes.

7. — En effet, sur un intervalle (a, b) découpons une suite dénombrable, d'intervalles (a_n, b_n) de manière à définir sur ab un ensemble parfait, partout non dense.

Cela fait, considérons la série

$$\varphi(z) = \log \frac{z-b}{z-a} - \sum_1^{\infty} \log \frac{z-b_n}{z-a_n} \ ,$$

qui est convergente en dehors de ab, comme on peut facilement l'établir.

On démontre aisément que tous les points a_n et b_n sont des points *singuliers* pour $\varphi(z)$.

En effet, la série étant absolument et uniformément convergente dans tout domaine termé ne contenant aucun des points a_n ou b_n, on peut dériver terme à terme et représenter $\varphi'(z)$ par la série

$$\varphi'(z) = \left(\frac{1}{z-b} - \frac{1}{z-a}\right) - \sum\left(\frac{1}{z-b_n} - \frac{1}{z-a_n}\right).$$

Or, pour cette série tous les points a_n et b_n sont singuliers, comme on le voit tout de suite. Donc il en est de même pour la fonction primitive $\varphi(z)$.

Ainsi la fonction $\varphi(z)$ est *uniforme* et admet un ensemble parfait et non dense de points singuliers, cette fonction étant obtenue comme somme d'une série de fonctions non uniformes.

8. — Reprenons la série qui définit $\varphi(z)$ et cherchons une limite supérieure des modules des termes de cette série pour une valeur donnée de la variable z.

Prenons la fonction

$$k(z) = \log \frac{z-a_1}{z-a_2},$$

on a

$$k(z) = \log \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} \qquad \begin{pmatrix} z - a_1 = r_1 e^{i\theta_1} \\ z - a_2 = r_2 e^{i\theta_2} \end{pmatrix}$$

et l'on peut supposer

$$|\theta_1 - \theta_2| < \pi,$$

si l'on prend la détermination de $k(z)$ qui s'annule à l'infini.

En écrivant $k(z)$ sous la forme

$$k(z) = \log(z-a_1) - \log(z-a_2)$$

et appliquant le théorème des accroissements finis on arrive à

$$|k(z)| \leq \frac{|a_1 - a_2|}{\delta} \tag{4}$$

δ étant la distance du point z au segment rectiligne ab.

L'inégalité ci-dessus pouvant d'ailleurs s'établir aussi en

écrivant $k(z)$ sous la forme d'une intégrale définie où z entre comme paramètre.

9. — La relation (4) va nous permettre d'établir un résultat intéressant, relatif à la fonction $\varphi(z)$ du n° 7.

Soit ab l'intervalle primitif et $a_1 b_1$ le premier intervalle d'uniformité obtenu en retranchant $F(z, a_1, b_1)$ de $F(z, a, b)$. On a

$$F(z, a, b) - F(z, a_1, b_1) = \log\frac{z-b}{z-a} - \log\frac{z-b_1}{z-a_1}.$$

Mais le second membre peut s'écrire aussi

$$\varphi_1(z) = \log\frac{z-a_1}{z-a} + \log\frac{z-b}{z-b_1},$$

et sous cette forme en appliquant la relation (4) nous trouvons

$$|\varphi_1(z)| < \frac{|a-a_1|}{\alpha} + \frac{|b-b_1|}{\beta},$$

α et β étant les nombres qui remplacent ici δ.

Mais on peut prendre au lieu de α et β la distance de z au segment (a, b) c'est-à-dire la plus petite valeur de $|Z - z|$ lorsque Z parcourt l'intervalle (a, b) : nous désignerons cette valeur par δ.

On aura alors en général

$$|\varphi_n(z)| < \frac{1}{\delta}\sum |a_n - b_n|,$$

Cela nous fait voir que : si l'ensemble des points ζ qu'on veut conserver sur (a, b) comme points singuliers est de largeur nulle la fonction $\varphi(z)$ est identiquement nulle.

En d'autres termes : *On ne peut pas former, avec le procédé que nous avons employé ici, une fonction analytique uniforme et possédant des points singuliers formant un ensemble de longueur nulle.*

Ce résultat négatif ne tient nullement à une particularité de la méthode employée pour construire $\varphi(z)$: il peut être expliqué d'une manière générale et rattaché à une propriété des fonctions *uniformes*, relative à la manière de se comporter de ces fonctions autour des points singuliers.

Si le degré d'infinitude de la fonction dans le voisinage d'un point singulier est inférieur à l'unité, ou encore si la fonction est bornée dans le voisinage des points singuliers, alors ces points ne peuvent pas former un ensemble de longueur nulle.

Mais il n'est pas possible d'insister ici sur cette propriété fondamentale des points singuliers.

10. — J'indiquerai, en terminant, une recherche qui généralise celle que nous avons développée ici.

Au lieu de considérer des fonctions multiformes dont les points singuliers sont *tous* situés sur un segment rectiligne, on peut considérer des fonctions multiformes dont les points critiques sont distribués dans le plan, et, reliant ces points par des lignes (segments rectilignes), obtenir une région R en dehors de laquelle la fonction considérée soit *uniforme*.

Ensuite on peut se proposer de retrancher de la fonction F, premièrement définie, une autre fonction F_1, de même nature, et telle que, faisant la différence

$$F - F_1 ,$$

la fonction obtenue continue à être uniforme en dehors de R, mais qui soit aussi uniforme en certaines régions $R_1, R_2, \ldots, R_n$ intérieures à R, qu'on peut appeler régions neutralisées par la soustraction de F_1. En continuant à retrancher de $F - F_1$ une autre fonction F_2 on obtiendrait d'autres régions neutralisées dans l'intérieur de R et, à la fin, on obtiendrait comme somme d'une série une fonction Φ *uniforme* possédant un ensemble parfait et non dense de points singuliers (si, bien entendu, les régions neutralisées ont été introduites de façon convenable).

J'ai pu obtenir par cette méthode la fonction uniforme que j'ai donnée dans les *Comptes Rendus* (28 novembre 1904) comme exemple d'une fonction analytique partout continue, donc continue aussi sur l'ensemble des points singuliers.

Dans les *Comptes Rendus* la fonction en question est définie par une intégrale double. D'ailleurs aussi la fonction du n° 7, qui est désignée par $\varphi(z)$, peut être définie par une intégrale ; mais l'intérêt de la recherche qui précède nous

paraît résider dans le fait que le problème général posé au n° 2 conduit à la forme générale de la fonction $F(z)$ donnée au n° 5.

Une recherche analogue et présentant même intérêt peut être faite pour le problème généralisé que nous venons d'indiquer.

Jassy, décembre 1916.

NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

(3e article)[1]

PAR

Emile Turrière (Montpellier).

Les quartiques gauches.

43. — Méthode du plan osculateur. — De même que, sur une cubique plane dont l'équation a ses coefficients rationnels, l'existence de deux arithmopoints quelconques entraîne *par alignement* celle d'un troisième arithmopoint, sur une quartique gauche d'équations rationnelles l'existence de trois arithmopoints particuliers quelconques entraîne celle d'un quatrième arithmopoint, trace de la courbe gauche sur l'arithmoplan défini par les trois arithmopoints connus.

Le plan défini par une tangente en un arithmopoint d'une quartique gauche et par un autre arithmopoint rencontre la courbe en un nouvel arithmopoint.

Enfin, le plan osculateur en un arithmopoint rencontre à nouveau la quartique gauche en un nouvel arithmopoint.

---

[1] Voir *L'Enseignement mathématique*, 18e année, 15 mars 1916, pp. 81-110, et 15 novembre 1916, pp. 397-428.

Cette remarque donne naissance à une méthode analogue à celle du *point tangentiel* pour les cubiques planes et permettant de rattacher par une voie itérative une suite d'arithmopoints à tout arithmopoint d'une quartique gauche. Cette méthode du *plan osculateur* consistera à partir d'un arithmopoint connu *a priori* M_1 ; le plan osculateur à la quartique gauche en M_1 rencontrera la courbe gauche en un second point M_2 ; le plan osculateur en M_2 donnera un autre arithmopoint M_3 ... et ainsi de suite : de l'arithmopoint M_{k-1} se déduira un arithmopoint M_k qui sera la trace de la quartique sur le plan osculateur de M_{k-1}.

44. — Les équations des nombres congruents. — J'ai déjà[1] donné un exemple de l'application de la méthode du plan osculateur à l'occasion des équations indéterminées simultanées

$$x^2 + a = y^2 \,, \qquad x^2 + b = z^2 \,.$$

Pour $a + b = 0$ elles ne sont autres que les équations des nombres congruents qui ont donné lieu à des travaux remarquables de Léonard de Pise, Edouard Lucas, A. Genocchi et Mathew Collins. Impossibles pour $a = 1, 2, 3, 10, 11, 17, 19, \ldots$, elles sont possibles pour $a = 5$, $a = 6$, par exemple.

Pour $a = 5$, $b = -5$ ce sont les équations du problème proposé par Jean de Palerme à Léonard de Pise, qui en a donné la solution

$$x = 3 + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{41}{12} \,.$$

Pour $a = 6$, $b = -6$, on se trouve en présence d'un système d'équations étudié par Ed. Lucas[2]. Partant de la solution simple :

$$x = \frac{5}{2} \,, \qquad y = \frac{7}{2} \,, \qquad z = \frac{1}{2} \,,$$

---

[1] *Le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise, L'Enseignement mathematique*, XVIIe année, septembre-novembre 1915 (p. 315-324).

[2] Edouard Lucas, *Sur la résolution des systèmes d'équations* $x^2 - 6y^2 = u^2$, $x^2 + 6y^2 = v^2$, *Nouvelles Annales de Mathématiques* [2], t. XV, 1876, p. 466-469.

Ed. Lucas forme les nouvelles solutions moins évidentes :

$$x_1 = \frac{1201}{140}, \quad y_2 = \frac{1249}{140}, \quad z_1 = \frac{1151}{140},$$

$$x'_1 = \frac{2 \cdot 639 \cdot 802}{7 \cdot 776 \cdot 485}, \quad y'_1 = \frac{10 \cdot 113 \cdot 607}{7 \cdot 776 \cdot 485}, \quad z'_1 = \frac{4 \cdot 319 \cdot 999}{7 \cdot 776 \cdot 485};$$

les formules de récurrence qu'il indique ne sont d'ailleurs pas distinctes de celles que j'ai trouvées en application de la méthode du point tangentiel sur une cubique plane :

$$x_1 = \frac{ab - x^4}{2xyz}, \quad y_1 = \frac{x^2y^2 + az^2}{2xyz}, \quad z_1 = \frac{x^2z^2 + by^2}{2xyz}.$$

Des propositions générales sur l'impossibilité des équations des nombres congruents ont été données par A. Genocchi [1] (par exemple lorsque a est un nombre premier de la forme $8m + 3$ ou le double d'un nombre premier de la forme $8m + 5$) ; le même auteur s'est occupé d'ailleurs dans le même travail du cas $a + b \neq 0$. Elles ont aussi été considérées par Ed. Lucas [2] dans ses recherches sur les travaux de Léonard de Pise.

45. — Les équations simultanées homogènes

$$x^2 + ay^2 = z^2,$$
$$ax^2 + y^2 = t^2,$$

ont été traitées de même [3] ; pour $a = 7$, elles admettent une solution simple

$$x = 3, \quad y = 1, \quad z = 4, \quad t = 8,$$

---

[1] A. Genocchi, *Sur l'impossibilité de quelques équations doubles, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 1874, t. 78, p. 433-435.

[2] Ed. Lucas, *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise et sur diverses questions d'arithmétique supérieure, Bollettino di bibliografia* (du prince Boncompagni), 1877. Lucas cite Léonard de Pise, Lucas Pacioli, L. Euler, Mathew Collins et A. Genocchi.

Au sujet des mêmes équations des nombres congruents, voir aussi la question n° 4472 de l'*Intermédiaire des mathématiciens* (1915, p. 52, et p. 231) par M. A. Gérardin ; on y trouve des listes étendues de valeurs de a pour lesquelles les équations sont possibles ou impossibles.

[3] *L'Intermédiaire des mathématiciens*, 1916, p. 63. L'auteur de la solution indique précisément la méthode du plan osculateur, ainsi que celle d'une quadrique ayant avec la courbe sept intersections confondues au point initial ; le huitième point d'intersection est une nouvelle solution. Il traite ensuite la question au moyen des fonctions elliptiques d'un même paramètre u et signale toute une série de solutions de paramètres $-3u$, $-7u$, $-11u$ ... déduites d'une solution initiale de paramètre u.

dont il est possible de déduire la solution

$$x = -447 , \quad y = 1121 , \quad z = 3004 , \quad t = -1688 .$$

M. A. Gérardin[1] a d'ailleurs signalé un cas particulier de possibilité de cette équation. C'est celui pour lequel le nombre a est de la forme suivante :

$$a = \lambda^2 + 2\lambda + 4 .$$

Dans ce cas, on peut prendre :

$$x = \lambda , \quad y = \lambda + 2 , \quad z = \lambda^2 + 3\lambda + 4 , \quad t = \lambda^2 + \lambda + 2 .$$

Le cas de a carré a été traité par L. Euler en 1780[2].

46. — Comme autre exemple, je signalerai encore celui du problème de la *détermination de deux parallélépipèdes rectangles à arêtes rationnelles, équivalents et isodiagonaux. On impose une des arêtes de l'un des volumes et deux arêtes de l'autre.*

Soient x, y, c les arêtes de l'un des parallélépipèdes ; c est connu et x, y sont deux inconnues. Les arêtes du second volume seront de même a', b', z' ; a', b' sont donnés et z' est inconnu. Il s'agit alors d'étudier le système suivant d'équations entre x, y et z' :

$$\begin{cases} xyc = a'b'z' , \\ x^2 + y^2 + c^2 = a'^2 + b'^2 + z'^2 : \end{cases}$$

elles représentent, par rapport à des axes coordonnés, (Ox, Oy, Oz') une biquadratique gauche intersection d'un paraboloïde hyperbolique avec un hyperboloïde de révolution. Par la transformation définie au moyen des formules

$$X = \frac{c}{a'b'}(x + y) ,$$

$$Y = \frac{c}{a'b'}(x - y) ,$$

$$Z = \frac{c}{a'b'} . z' ,$$

[1] *Loc. cit.*, p. 64.
[2] C. f. *Commentationes arithmeticæ*, 1849, t. II, pp. 425-437.

et par conséquent constituée par une affinité et une rotation autour de Oz', les équations de la biquadratique gauche deviennent :

$$X^2 = (Z + 1)^2 - K \ , \qquad Y^2 = (Z - 1)^2 - K \ .$$

K est une constante égale à $\frac{(c^2 - a'^2)(c^2 - b'^2)}{a'^2 b'^2}$. Cette valeur particulière de K assure à la biquadratique transformée l'existence d'un arithmopoint particulier

$$X_0 = \frac{c(a' + b')}{a'b'} \ , \qquad Y_0 = \frac{c(a' - b')}{a'b'} \ , \qquad Z_0 = \frac{c^2}{a'b'} \ ,$$

correspondant à la solution banale constituée par deux parallélépipèdes égaux.

La méthode du plan osculateur pourra être appliquée à tout arithmopoint (x_0, y_0, z_0) de la biquadratique d'équations :

$$X^2 + k = (Z + 1)^2 \ , \qquad Y^2 + k = (Z - 1)^2 \ ,$$

le plan osculateur au point (x_0, y_0, z_0) ayant pour équation

$$- x_0^3 X + y_0^3 Y + 2(z_0^2 + 1 - K) Z = - 6z_0(z_0^2 + 1 - K) \ .$$

Je n'insiste pas sur ce problème qui peut être traité d'une autre manière et rattaché à des cubiques planes remarquables signalées par Edouard Lucas. (Voir §§ 61, 62 et 63.)

Je pense que ces divers exemples, étudiés par une méthode très élémentaire, suffisent amplement pour justifier l'introduction de ces considérations d'arithmogéométrie. Ils prouvent d'ailleurs qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser des résultats de la théorie des fonctions elliptiques pour aborder systématiquement l'étude de ces questions de théorie des nombres.

47. — Méthode de la quadrique passant par sept points. — Une méthode analogue à celle du plan osculateur découle du fait bien connu que toutes les quadriques passant par sept points communs passent par un huitième point fixe.

Supposons qu'on connaisse sept arithmopoints particuliers d'une *biquadratique gauche* définie comme intersection de

deux quadriques $Q_1 = 0$ et $Q_2 = 0$. On formera alors l'équation d'une quadrique passant par ces sept arithmopoints mais n'appartenant pas au faisceau ponctuel défini par les quadriques $Q_1 = 0$ et $Q_2 = 0_1$. Soit $Q_3 = 0$ une telle quadrique. Les équations simultanées

$$Q_1 = 0 , \qquad Q_2 = 0 , \qquad Q_3 = 0 ,$$

auront pour solutions les coordonnées d'un système de huit points, auxquels appartiendront les sept points connus *a priori*. De sorte que, de ces sept arithmopoints, ce procédé permettra de déduire un huitième arithmopoint.

Les sept arithmopoints initiaux peuvent être confondus en un seul arithmopoint : on possède donc une nouvelle méthode de récurrence entre arithmopoints d'une biquadratique gauche, absolument analogue à celle du plan osculateur.

48. — Réductibilité de l'étude arithmogéométrique d'une quartique gauche a celle d'une cubique plane. — Une autre voie est ouverte dans l'étude arithmogéométrique d'une quartique gauche représentée par des équations à coefficients rationnels et douée d'un arithmopoint particulier connu *a priori*.

Cette étude n'est pas distincte, en effet, de celle d'une cubique plane, qui a fait l'objet des §§ 40, 41 et 42. La cubique plane associée à la quartique gauche n'est autre que la perspective de celle-ci, le point de vue se trouvant à l'arithmopoint connu *a priori*.

Pratiquement, on projettera la quartique gauche en prenant pour centre de projection l'arithmopoint connu *a priori* sur un plan de projection dont le choix *sera effectué*, dans chaque cas particulier, par des considérations de symétrie, d'élégance ou de simplicité des équations.

La cubique plane perspective de la quartique de l'espace admet pour arithmopoint particulier la trace sur le plan de projection de l'arithmodroite tangente à la quartique au point de vue.

C'est ainsi que les équations des nombres congruents

$$x^2 + a = y^2 , \qquad x^2 + b = z^2$$

ont pu de diverses manières être ramenées à une équation représentant une cubique plane douée d'arithmopoints [1].

49. — Problème de Fermat : Arithmotriangles pythagoriques dont l'hypoténuse et la somme ou la différence des cathètes sont des nombres carrés parfaits. — L'étude des triangles pythagoriques à côtés rationnels dont l'hypoténuse est mesurée par un carré et dont la somme des cathètes est un carré a été faite par Leibniz [2], Fermat, Euler [3] et Lagrange. La plus petite solution de ce problème est constituée par le triangle dont les cathètes ont pour mesures :

$$1 \cdot 061 \cdot 652 \cdot 293 \cdot 520 \ ,$$
$$4 \cdot 565 \cdot 486 \cdot 027 \cdot 761 \ .$$

La somme des cathètes est le carré du nombre $2 \cdot 372 \cdot 159$; l'hypoténuse est égale à $(2 \cdot 165 \cdot 017)^2$.

Je vais appliquer les considérations qui précèdent au problème beaucoup plus général des arithmotriangles pythagoriques dont l'hypoténuse et la *somme ou la différence* des cathètes sont mesurées par des nombres carrés parfaits.

Soient x, y deux nombres rationnels algébriques dont les valeurs absolues sont par convention les rapports des cathètes à l'hypoténuse d'un triangle de cette espèce. Il s'agit ainsi de procéder à l'étude du système des deux équations

$$x^2 + y^2 = 1 \ , \qquad x + y = z^2 \ ,$$

admettant les solutions banales $(x = 1, \ y = 0, \ z = 1)$ $(x = 0, \ y = 1, \ z = 1)$. Ces équations représentent respectivement un cylindre de révolution et un cylindre parabolique, de sorte que leur ensemble représente une biquadratique gauche douée d'un arithmopoint particulier, dont il est possible par symétries de déduire trois autres arithmopoints.

---

[1] Cf. *L'Enseignement mathématique*, XVIIe année, 1915, p. 317 et 321.

[2] Je cite Leibniz d'après Euler : « Hoc problema a Leibnizio olim propositum » [Commentationes arithmeticæ, t. II, p. 44-52, Miscellanea analytica, 15 novembre 1773, § 4, p. 47-48].

[3] L. Euler a consacré deux mémoires à ce problème :

a) De tribus pluribusve numeris inveniendis, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum, 18 mai 1780; Commentationes arithmeticæ, édition de 1849, t. II, p. 397-402. La solution particulière rapportée dans le texte ci-dessus est indiquée dans cette pièce.

b) Solutio problematis Fermatiani de duobus numeris, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa liquadratum, ad mentem Ill. Lagrange adornata, 5 juin 1780; Commentationes arithmeticæ, ibid., pp. 403-405.

La distinction entre les solutions des deux problèmes distincts qui se traduisent par ces mêmes équations se fait aisément. Les nombres (x, y) peuvent, en effet, être soit tous deux positifs, soit de signes contraires. Dans le premier cas, on se trouve en présence du problème de Fermat proprement dit ; pour x et y de signes contraires, c'est la différence des cathètes qui est mesurée par un carré parfait. D'ailleurs, le seul examen de z permet d'effectuer autrement la même distinction ; il résulte, en effet, de l'équation

$$2xy = z^2 - 1 ,$$

que les solutions du problème de Fermat proprement dit correspondent aux arcs de la biquadratique extérieurs à l'espace limité aux deux plans parallèles $z = \pm 1$. Les arithmopoints de la biquadratique situés entre ces deux plans parallèles sont au contraire associés à des arithmotriangles pythagoriques pour lesquels la différence des cathètes est un carré parfait.

Le cône du troisième degré admettant la biquadratique considérée pour courbe directrice, le sommet étant l'arithmopoint $(x = 1, y = 0, z = 1)$, a pour équation par rapport à des axes issus de son sommet et parallèles aux axes primitifs :

$$(X^2 + Y^2)(X + Y - 2Z) + 2XZ^2 = 0 ;$$

de sorte que la cubique d'équation

$$(X^2 + Y^2)(X + Y - 2) + 2X = 0$$

est une perspective de la biquadratique gauche. La correspondance entre les nombres (x, y, z) et (x, y) s'effectue par les formules

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \dfrac{Y^2 - X^2}{Y^2 + X^2} , \quad y = -\dfrac{2XY}{X^2 + Y^2} , \quad z = X + Y - 1 , \\ \qquad X = \dfrac{x - 1}{z - 1} , \quad Y = \dfrac{y}{z - 1} . \end{array} \right.$$

La séparation entre les arcs associés aux deux problèmes considérés se fait au point à l'infini de cette cubique circu-

laire, au point à distance finie d'intersection avec l'asymptote $X + Y = 2$, à l'origine O des coordonnées et au point autre que O, situé à distance finie, d'intersection avec la parallèle menée par O à cette asymptote. Les deux arcs compris entre ces deux droites parallèles ($X + Y = 0$, $X + Y = 2$) correspondent à la différence des cathètes, tandis que les deux autres arcs extérieurs à ces deux droites parallèles correspondent au problème de Fermat. Deux arithmopoints alignés avec le point O correspondent toujours au même problème.

Une des solutions remarquables de la question, ainsi trouvée au moyen des alignements sur cette cubique, est celle qui correspond au triangle rectangle de côtés 119, 120 et 169.

La méthode du plan osculateur peut aussi être appliquée avec intérêt à la biquadratique étudiée. Pour simplifier les calculs, il est avantageux d'introduire une variable auxiliaire δ définie par la relation

$$x - y = 2\sqrt{\delta} \ ;$$

de sorte que l'on doit poser :

$$x = \frac{1}{2}z^2 + \sqrt{\delta} \ ,$$

$$y = \frac{1}{2}z^2 - \sqrt{\delta} \ ,$$

$$z^4 = 2 - 4\delta \ .$$

Avec ces notations, l'équation du plan osculateur de la biquadratique au point de coordonnées x_0, y_0, z_0 et du paramètre δ_0 est :

$$(2x_0\delta_0 + z_0^2)x + (2y_0\delta_0 + z_0^2)y - 2z_0^3 z = 6\delta_0 - 2 \ .$$

Ce plan osculateur rencontre à nouveau la courbe gauche en un point de cote z_1 dont l'expression peut être donnée en fonction de z seul,

$$z_1 = z.\frac{-12 + 12z^4 + z^8}{4 + 12z^4 - 3z^8} \ ,$$

ou, plus simplement, en fonction de z et de δ :

$$z_1 = z.\frac{1 - 4\delta + \delta^2}{1 - 3\delta^2} \ .$$

Les paramètres δ et δ_1 sont liés entre eux par la relation

$$\pm\sqrt{\frac{\delta_1}{\delta}} = \frac{\delta^4 + 12\delta^3 - 18\delta^2 + 12\delta - 3}{(3\delta^2 - 1)^2}.$$

On observera enfin que la condition $z^2 - 1 > 0$, caractéristique des solutions du problème primitivement étudié par Fermat se traduit ici par l'inéquation $\delta < \frac{1}{4}$.

La solution banale $x = 1$, $y = 0$, $z = 1$ correspond précisément au cas limite $\delta = \frac{1}{4}$; elle appartient d'ailleurs indifféremment aux deux problèmes. La formule de récurrence ci-dessus écrite, entre δ_1 et δ, donne alors pour $\delta = \frac{1}{4}$ la valeur suivante de δ_1 :

$$\delta_1 = \frac{57 \cdot 121}{114 \cdot 244}$$

qui, supérieure à $\frac{1}{4}$, correspond au second problème ; elle conduit à la solution

$$x_1 = -\frac{119}{169}, \qquad y_1 = \frac{120}{169}, \qquad z_1 = \frac{1}{13},$$

déjà signalée à propos de la cubique perspective de la biquadratique gauche.

Généralisation des équations de Brahmagupta-Fermat.

50. — L'étude des équations $Ax^4 + Bx^3 = f(x, y)$ dans lesquelles $f(xy)$ est un polynôme quelconque du second degré des deux variables x et y se ramène immédiatement à l'étude arithmogéométrique d'une biquadratique gauche par l'introduction d'une nouvelle variable auxiliaire. Une telle équation

$$Ax^4 + Bx^3 = f(x, y)$$

peut, en effet, être considérée comme représentant dans le plan $0xy$ une courbe du quatrième degré, projection d'une

biquadratique de l'espace. Cette courbe gauche est l'intersection d'un cylindre parabolique

$$x^2 = z$$

avec une quadrique d'équation :

$$Az^2 + Bxz = f(x, y) .$$

51. — Equations de Brahmagupta-Fermat généralisées. — Une première extension toute naturelle des équations de Brahmagupta-Fermat

$$Ax^2 + Bx + C = y^2$$

est l'équation

$$Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = y^2 ;$$

son étude se rattache immédiatement à celle d'une cubique plane. (Voir § 42).

Il en est de même des équations plus générales :

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = y^2 .$$

Pour traiter arithmogéométriquement une équation de cette espèce, il suffit de poser $x^2 = z$ de sorte qu'elle représente une quartique plane projection sur le plan Oxy de la biquadratique gauche d'équations :

$$\begin{cases} Az^2 + Bxz + Cz + Dx + E = y^2 , \\ x^2 = z . \end{cases}$$

Les cas où A ou E seront carrés parfaits permettront de trouver immédiatement une série de solutions.

Parmi les équations de Brahmagupta-Fermat généralisées au sens qui précède, il convient de mentionner d'une manière toute spéciale celles qui admettent pour premier membre un trinome bicarré en x et plus particulièrement encore les équations

$$x^4 + Ax^2 + B^2 = \square .$$

En posant

$$x + \frac{B}{x} = X ,$$

cette équation devient

$$X^2 + A - 2B = \square \ ;$$

de sorte que *toute équation du type*

$$x^4 + Ax^2 + B^2 = \square \ ,$$

est équivalente au système

$$X^2 + a = \square \qquad X^2 + b = \square$$

des équations des nombres congruents. Les constantes A, B, a, b qui figurent dans ces diverses équations sont liées entre elles par les conditions

$$a = A - 2B \ , \qquad b = -4B \ .$$

L. Euler affirma l'impossibilité pour $k = 1, 3, 5, 6, -14$, etc., ... de

$$x^4 + kx^2 + 1 = \square \ .$$

L'équivalence précédente fut indiquée par A. Genocchi dans le mémoire cité au § 44.

L'équation

$$x^4 - 4x^2 + 1 = \square$$

fut enfin traitée par Ed. Lucas [*Recherches sur l'analyse indéterminée,* Moulins, 1873, p. 67 ; *Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise,* p. 120].

52. — Problème des arithmodistances pour une hyperbole équilatère ou une lemniscate de Bernoulli. — Il arrive très fréquemment que ce genre d'équations de Brahmagupta-Fermat intervienne dans les problèmes des arithmodistances pour certaines courbes. C'est ainsi que le problème des arithmodistances pour l'hyperbole équilatère et son centre de symétrie ou encore pour la lemniscate de Bernoulli et son point double (transformée de l'hyperbole équilatère par inversion) se traduit analytiquement par l'équation

$$y^2 = 1 + x^4 \ .$$

Celle-ci est impossible et n'admet que la solution banale $x = 0$. Cette impossibilité résulte du théorème négatif de

Fermat sur l'équation $x^4 + y^4 = z^2$ ou encore du théorème dû à Frénicle de non-existence d'arithmotriangle pythagorique dont l'aire soit double d'un carré. (Voir à ce sujet § 6 de ma note sur *Le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise*).

Cette impossibilité est encore équivalente à celle de $\operatorname{tang}\theta = y^2$, $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$ étant rationnel. En d'autres termes il n'existe pas d'arithmotriangle pythagorique dont le rapport des cathètes soit un carré parfait.

53. — Problème des arithmodistances pour une arithmoconique — Plus généralement, étant donnée une conique douée d'arithmopoints et, par suite, représentable par des équations

$$x = \frac{f_2}{h_2}, \qquad y = \frac{g_2}{h_2},$$

dans lesquelles f_2, g_2 et h_2 sont des polynômes du second degré d'une même variable t, le problème des arithmodistances pour cette arithmoconique et pour un arithmopoint du plan, — qui peut sans restriction de généralité être pris pour origine des coordonnées, — se traduit par l'équation

$$\frac{f_2^2 + g_2^2}{h_2^2} = \text{carré parfait} \;;$$

ou encore $f_2^2 + g_2^2 = Y^2$. De sorte qu'en explicitant la variable t on est ramené à une équation de la forme

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = y^2 .$$

Ce résultat s'étend d'ailleurs au cas d'une arithmoconique de l'espace. On a alors

$$x = \frac{f_2}{h_2}, \qquad y = \frac{g_2}{h_2}, \qquad z = \frac{k_2}{h_2} \;;$$

on est par suite amené à une équation

$$f_2^2 + g_2^2 + k_2^2 = Y^2 .$$

qui, après développement, donne encore une équation de Brahmagupta-Fermat du quatrième ordre.

La réciproque n'est pas exacte. Toute équation

$$Ax^4 + Bx^3 + Cx^2 + Dx + E = y^2$$

ne serait susceptible d'être rattachée à un problème d'arithmodistance pour une arithmoconique de l'espace, ni *a fortiori* pour une arithmoconique de l'espace. Les équations pour lesquelles A et E ne sont pas sommes de deux ou trois carrés ne sont pas susceptibles d'une telle interprétation géométrique : par exemple aucune des équations

$$y^2 = x^4 - 1 \ , \qquad y^2 = x^4 + 7 \ ,$$

ne peut être associée à une arithmoconique de l'espace ou du plan au titre de courbe représentative de l'équation du problème des arithmodistances.

Le problème de Bhaskara et les équations

$$\varphi(x, y) = u^2 \ , \qquad \psi(x, y) = v^2 \ .$$

54. — Le problème de Bhaskara. — Le système des deux équations indéterminées

$$x^2 + y^2 - 1 = u^2 \ ,$$
$$x^2 - y^2 - 1 = v^2 \ ,$$

à quatre inconnues x, y, u, v, dont Bhaskara[1] a donné les trois solutions particulières suivantes dépendant d'un paramètre rationnel arbitraire

$$\left\{ \begin{array}{ll} x = 8\lambda^2 + 1 \ , & y = 8\lambda^2 \ , \\ x = \lambda + \dfrac{1}{2\lambda} \ , & y = 1 \ , \\ x = \dfrac{(8\lambda^2 - 1)^2}{8\lambda^2} \ , & y = \dfrac{8\lambda^2 - 1}{2\lambda} \ , \end{array} \right.$$

[1] *Le Lilavati*, section IV, règle 59-60. Cf. *Nouvelles Annales de Mathématiques*, question 206, [2], t. VIII, 1849, p. 107; E. Clère en donna une solution incomplète, t. IX, 1850, pp. 116-118.

et dont la solution générale a été obtenue par A. Genocchi [2], pourrait de diverses manières être rattaché aux considérations qui précèdent, en supposant que l'une des inconnues prend une valeur précisée, ou encore que u et v, par exemple, sont deux fonctions linéaires d'une variable z à coefficients rationnels et connus. On pourrait aussi songer à des considérations d'hypergéométrie.

Je me bornerai à signaler que le système des deux équations de Bhaskara est équivalent au système suivant :

$$2(x^2 - 1) = u^2 + v^2 , \qquad 2y^2 = u^2 - v^2 ;$$

il suffit de poser

$$u + v = 2y\lambda , \qquad u - v = \frac{y}{\lambda} ,$$

$$2\frac{x}{y} = X , \qquad \frac{2}{y} = Y ,$$

pour réduire toute la question à l'étude arithmogéométrique d'une surface *unicursale* du quatrième degré d'équation

$$X^2 - Y^2 = 4\lambda^2 + \frac{1}{\lambda^2}$$

en coordonnées cartésiennes (X, Y, λ). En posant alors

$$X + Y = \frac{4\lambda^4 + 1}{\lambda\mu} , \qquad X - Y = \frac{\mu}{\lambda} ,$$

il vient ainsi :

$$x = \frac{4\lambda^4 + 1 + \mu^2}{4\lambda^4 + 1 - \mu^2} , \qquad y = \frac{4\lambda\mu}{4\lambda^4 + 1 - \mu^2} .$$

Telle est la solution générale dépendant de deux paramètres rationnels arbitraires, λ et μ, des deux équations de Bhaskara.

55. — Les équations, analogues aux précédentes,

$$x^2 + y^2 + 1 = u^2 ,$$
$$x^2 + y^2 - 1 = v^2 ,$$

[2] Angelo Genocchi, Solution de la question 206, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, [2], t. X, 1851, p. 80-85.

se traitent de la même manière. Elles sont équivalentes aux équations

$$2 = u^2 - v^2 ,$$

$$2(x^2 + y^2) = u^2 + v^2 ;$$

en posant donc

$$u = \lambda + \frac{1}{2\lambda} , \qquad v = \lambda - \frac{1}{2\lambda} ,$$

l'étude de ces équations est ramenée à celle d'une surface unicursale du quatrième degré représentée par l'équation (en coordonnées cartésiennes x, y, λ) :

$$x^2 + y^2 = \lambda^2 + \frac{1}{4\lambda^2} .$$

Cette surface peut être envisagée comme engendrée par un arithmocercle passant par l'arithmopoint $\left(x = \lambda,\ y = \frac{1}{2\lambda}\right)$, de sorte que les expressions rationnelles des coordonnées d'un point quelconque de la surface s'obtiennent en posant $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2} = t$ et

$$\left\{ \begin{aligned} x &= \lambda \cos\theta + \frac{1}{2\lambda} \sin\theta , \\ y &= \lambda \sin\theta - \frac{1}{2\lambda} \cos\theta . \end{aligned} \right.$$

La solution générale du système des deux équations

$$\left\{ \begin{aligned} x^2 + y^2 + 1 &= u^2 , \\ x^2 + y^2 - 1 &= v^2 . \end{aligned} \right.$$

est ainsi

$$x = \frac{\lambda(1 - t^2) + \frac{t}{\lambda}}{1 + t^2} , \qquad y = \frac{2\lambda t - \frac{1 - t^2}{2\lambda}}{1 + t^2} .$$

56. — Le système formé par les deux équations simultanées, encore analogues aux équations de Bhaskara :

$$x^2 + y^2 - 1 = u^2 ,$$

$$x^2 - y^2 + 1 = v^2 .$$

peut être traité par un procédé semblable, à la seule différence que la surface unicursale qui se présente ici est du troisième degré. De l'équation

$$2x^2 = u^2 + v^2$$

et des résultats du § 5, il résulte qu'il faut poser actuellement

$$u = x(\cos\theta + \sin\theta) ,$$
$$v = x(\cos\theta - \sin\theta) ,$$

$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = t$ étant un nombre rationnel arbitraire. En portant ensuite ces expressions de u et de v dans l'équation

$$u^2 - v^2 = 2(y^2 - 1) ,$$

il vient

$$t(1 - t^2) = \frac{(1 + t^2)^2}{4x^2}(y^2 - 1) ,$$

de sorte que l'étude des équations proposées est réductible à celle d'une surface cubique unicursale d'équation

$$Z(1 - Z^2) = X^2 - Y^2 .$$

Les expressions générales des solutions (x, y), en fonction de deux paramètres, obtenues par ce procédé, sont les suivantes :

$$x = \frac{2\lambda(1 + t^2)}{2\lambda^2 t(1 + t^2) - 1} , \qquad y = \frac{2\lambda^2 t(1 + t^2) + 1}{2\lambda^2 t(1 + t^2) - 1} .$$

57. — Théorème fondamental sur les équations simultanées

$$\varphi(x, y) = u^2 , \qquad \psi(x, y) = v^2 .$$

Les équations de Bhaskara et autres équations analogues qui viennent d'être résolues dans les trois paragraphes précédents appartiennent à la classe très générale d'équations du type $\varphi(x, y) = u^2$, $\psi(x, y) = v^2$, ou φ et ψ sont deux polynômes à coefficients rationnels en x et y, et qui sont douées d'une solution particulière manifestement connue *a priori* : les équations de Bhaskara sont ainsi douées de la solution

$(x = 1,\ y = 0)$; les équations du § 56 sont douées de la solution $(x = 0,\ y = 1)$. Quant aux équations du § 55, il est facile d'obtenir une solution telle que $x = \frac{1}{2}$, $y = 1$.

Il est important d'observer que le problème actuel de deux équations à quatre indéterminées, qui semblerait se rattacher à des considérations d'arithmogéométrie pour un hyperespace à quatre dimensions est réductible à une étude arithmogéométrique d'une surface de l'espace ordinaire.

D'une manière précise et en se bornant, pour fixer les idées, au cas de deux équations quadratiques simultanées, il y a lieu d'énoncer le théorème fondamental suivant :

Le système formé par deux équations simultanées quadratiques à quatre inconnues

$$\varphi(x, y) = u^2, \qquad \psi(x, y) = v^2,$$

n'admet pas de solution en général. La connaissance d'une solution particulière entraîne la réductibilité de la question à l'étude arithmogéométrique d'une surface cubique.

Soit, en effet, (x_0, y_0, u_0, v_0) la solution connue *a priori*. Je pose alors

$$x = x_0 + \alpha t, \qquad y = y_0 + \beta t, \qquad u = u_0 + \gamma t, \qquad v = v_0 + \delta t,$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, t$ étant cinq indéterminées. Chacune des équations quadratiques données admet la solution $t = 0$ et peut être résolue par rapport à t, de sorte que l'on obtient ainsi deux expressions différentes de t

$$t = \frac{\Phi_1}{\Phi_2}, \qquad t = \frac{\Psi_1}{\Psi_2},$$

sous formes de fractions rationnelles dont les numérateurs sont des formes linéaires en $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ tandis que les dénominateurs sont des formes quadratiques par rapport aux mêmes variables. Il résulte de cette remarque que toute la question est réduite à l'étude arithmogéométrique de la surface du troisième degré dont l'équation est

$$\Phi_1 \Psi_2 - \Psi_1 \Phi_2 = 0$$

dans le système de coordonnées homogènes $(\alpha\beta\gamma\delta)$.

La réductibilité à l'étude arithmogéométrique d'une surface de l'espace ordinaire n'est évidemment pas particulière aux systèmes d'équations quadratiques. Lorsqu'en effet les équations $\varphi = u^2$ et $\psi = v^2$ à étudier sont de degrés plus élevés, la méthode précédente conduit à deux équations algébriques en t; l'élimination de t permet alors de se ramener à l'étude d'une relation unique entre α, β, γ, δ, homogène par rapport à ces mêmes variables.

La réductibilité à l'étude d'une surface cubique de l'espace ordinaire du système des deux équations quadratiques $\varphi(x, y) = u^2$ et $\psi(x, y) = v^2$ étant acquise, il faut maintenant observer que les conclusions du § 36 peuvent en outre être appliquées à la nouvelle équation cubique. *La surface cubique obtenue est précisément douée de trois arithmopoints non-singuliers.* Ce sont les arithmopoints de coordonnées respectives

$$\alpha = 0\,, \quad \beta = 0\,, \quad \gamma = 0\,, \quad \delta \neq 0\,,$$
$$\alpha = 0\,, \quad \beta = 0\,, \quad \gamma \neq 0\,, \quad \delta = 0\,,$$
$$\alpha = 0\,, \quad \beta = 0\,, \quad \gamma = u_0\,, \quad \delta = v_0\,,$$

c'est-à-dire deux des sommets du tétraèdre de référence et un troisième point de l'arête qui les joint. La connaissance d'un seul de ces arithmopoints suffit pour assurer et diriger par le procédé du § 36 la représentation rationnelle de la surface cubique au moyen de deux paramètres indépendants.

Dans ces conditions, la *connaissance d'une solution particulière du système d'équations quadratiques généralisées de Bhaskara entraîne la résolubilité du système; la solution dépend de deux paramètres.* Si la représentation trouvée de la surface cubique est propre, cette solution est la solution générale.

Arithmogéométrie autour des cubiques de Lucas.

58. — Pour un nombre assez considérable d'équations indéterminées ayant été l'objet de recherches spéciales, le groupement $x^2 + y^2 + z^2$ intervient dans la structure de ces équations. Il semble donc qu'il y ait intérêt — et effective-

ment il y a très souvent un réel intérêt — de rattacher une équation de cette espèce à l'étude d'une arithmosphère.

C'est ainsi que, pour une courbe sphérique, tracée sur une sphère de rayon pris pour unité, les coordonnées d'un point quelconque et leurs dérivées des deux premiers ordres par rapport au paramètre qui repère le point courant de cette courbe sphérique sont liées par une identité due à E. Catalan :

$$(x'^2 + y'^2 + z'^2)[(xy'' - yx'')^2 + (yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xz'')^2]$$
$$= (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 + [x(y'z'' - z'y'') + y(z'x'' - x'z'') + z(x'y'' - y'x'')]^2 .$$

Cette identité donne une infinité de solutions de l'équation indéterminée

$$(P^2 + Q^2 + R^2)(P'^2 + Q'^2 + R'^2) = U^2 + V^2 ;$$

on en conclut, par exemple [1],

$$(24^2 + 7^2 + 15^2)(30^2 + 36^2 + 23^2) = 375^2 + 1475^2 .$$

Mais en pareil cas il convient de ne pas se laisser fasciner par la présence du groupement $x^2 + y^2 + z^2$; il peut y avoir au contraire avantage à chercher des solutions arithmogéométriques n'ayant absolument aucun rapport avec l'arithmosphère.

59. — L'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$. Cette équation quadratique homogène à six indéterminées se rattache manifestement à l'arithmosphère. Si l'on se donne, en effet, arbitrairement les trois indéterminées x', y', z', la détermination de x, y, z n'est autre que la recherche d'un arithmopoint quelconque sur l'arithmosphère de centre O qui passe par l'arithmopoint de coordonnées x', y', z'. L'équation considérée peut donc être résolue par une des méthodes indiquées au § 8 (représentation géographique, ou mieux : projection stéréographique).

La même équation peut être étudiée arithmogéométriquement d'une manière toute différente. J'observerai dans ce but que cette équation est susceptible d'une interprétation

[1] Question n° 1124 des *Nouvelles Annales de Mathématiques*.

géométrique remarquable. Etant considéré un triangle de référence ABC, si l'on prend sur les côtés des points A′ sur BC, B′ sur CA et C′ sur AB, déterminant sur ces mêmes côtés six segments

$$BA' = x\ , \qquad A'C = x'\ ,$$
$$CB' = y\ , \qquad B'A = y'\ ,$$
$$AC' = z\ , \qquad C'B = z'\ ,$$

la condition nécessaire et suffisante de concours des perpendiculaires aux côtés en ces points A′ B′ C′ est précisément la relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2\ .$$

Cette remarque élémentaire faite, je supposerai que les sommes $x + x'$, $y + y'$ et $z + z'$ sont imposées ; soient :

$$x + x' = a\ , \qquad y + y' = b\ , \qquad z + z' = c\ .$$

Je suppose en outre que les nombres a, b, c peuvent être considérés comme étant les mesures des côtés d'un arithmotriangle héronien.

La solution générale de l'équation indéterminée dépend alors de a, b et c et de deux paramètres arbitraires. *Pour avoir cette solution générale, il suffira de se donner arbitrairement un arithmopoint du plan de l'arithmotriangle héronien et de le projeter sur les droites arithmodirigées qui portent les trois côtés de ce triangle : les six segments déterminés par ces trois projections constituent précisément la solution générale désirée.*

60. — L'équation $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2$, qui de son côté a fait aussi l'objet d'assez nombreuses remarques[1] se rattache à la précédente au titre de cas particulier. Les formules déduites de l'étude arithmogéométrique d'une arithmosphère de centre O et qui passe par l'arithmopoint des coordonnées (x', y' et 0) se simplifient du fait que l'arithmopoint connu *a priori* a sa cote nulle.

---

[1] Cette équation indéterminée $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ a été fréquemment considérée (question n° 3621 de l'*Intermédiaire des Mathematiciens*). Je pense toutefois que la solution géométrique ci-dessus doit être nouvelle.

[1] Question 4383 de l'*Intermédiaire des Mathematiciens*.

Cette équation comme la précédente est susceptible d'une solution dépendant de la considération de l'arithmotriangle héronien général. Ici toutefois la solution générale dépend des côtés de l'arithmotriangle héronien et d'un seul paramètre. Cette solution générale s'obtient, en effet, en supposant que l'arithmopoint que l'on projette sur les côtés du triangle n'est plus arbitraire dans le plan mais appartient à une autre droite arithmodirigée spéciale du plan (perpendiculaire en B à l'arithmodirigée AB).

61. — Le problème des parallélépipèdes rectangles équivalents et isodiagonaux. — Le problème du § 46 peut être étudié sous un nouveau point de vue et rattaché à l'étude arithmogéométrique de l'une ou l'autre de deux cubiques remarquables du plan d'un triangle. Ces cubiques ayant été l'objet de deux questions très précises posées par Ed. Lucas, il m'a paru justifié de proposer de leur donner le nom de l'illustre géomètre, puisqu'il s'agit ici d'une application arithmologique que Lucas aurait parfaitement pu suggérer, s'il ne l'a pas fait d'ailleurs dans des notes aujourd'hui perdues.

L'énoncé du problème des parallélépipèdes rectangles équivalents et isodiagonaux, au sujet desquels toutes mes recherches bibliographiques sont restées infructueuses, est le suivant :

Etudier les couples de parallélépipèdes rectangles à arêtes rationnelles dont les diagonales sont égales, sans être nécessairement rationnelles, et dont les volumes sont équivalents. Soient (x, y, z) et (x', y', z') les arêtes respectives des deux parallélépipèdes que l'on désire associer ainsi. Les équations du problème sont alors les suivantes :

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \,. \\ x.y.z = x'.y'.z' \,. \end{cases}$$

La question se traduisant ainsi par deux équations homogènes respectivement des second et troisième degrés à six inconnues, il convient de se donner arbitrairement trois conditions supplémentaires. Pour chaque choix de ces conditions supplémentaires, on aura à résoudre un problème du

genre de celui traité au § 44, où j'avais imposé une arête d'un des volumes et deux de l'autre.

Le problème des parallélépipèdes équivalents et isodiagonaux se rattache à des considérations particulièrement élégantes d'arithmogéométrie lorsqu'on impose les trois sommes formées avec une arête de chacun des deux parallélépipèdes. Soient, en effet, a, b, c les sommes

$$x + x' = a \ , \qquad y + y' = b \ , \qquad z + z' = c \ .$$

Pour simplifier, je supposerai que ces longueurs a, b, c sont les côtés d'un triangle ; cette hypothèse nécessaire pour pouvoir introduire des considérations d'arithmogéométrie conduit à des formules qui sont plus généralement valables pour (a, b, c) absolument quelconques.

Si donc ABC est un triangle de côtés (a, b, c) et si (x, x', y, y', z, z') sont les mesures de six segments consécutifs, dans l'ordre même de ces lettres, pris sur les côtés BC, CA, AB du triangle, les équations ci-dessus écrites expriment des propriétés géométriques remarquables.

La relation de J. Céva,

$$xyz = x'y'z' \ ,$$

exprime le concours des trois droites AA′, BB′, CC′. Quant à la seconde relation

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 \ ,$$

elle exprime que les perpendiculaires en A′B′C′ aux côtés BC, CA, AB du triangle sont trois droites concourantes (§ 59).

Dans ces conditions, une solution particulière apparaît manifestement ; elle est tellement remarquable qu'elle mérite d'être signalée avant de pousser plus loin l'étude générale du système d'équations ci-dessus. En se bornant au cas d'un triangle acutangle, *les parallélépipèdes rectangles admettant respectivement pour arêtes les segments d'ordre pair et d'ordre impair déterminés sur les côtés d'un triangle quelconque par les hauteurs du triangle sont des solutions particulières du problème.*

Si a, b, c désignent les mesures rationnelles des côtés du

triangle figuratif ABC, les expressions correspondantes des arêtes des deux parallélépipèdes associés sont :

$$x = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2a}, \qquad x' = \frac{a^2 - b^2 + c^2}{2a},$$

$$y = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2b}, \qquad y' = \frac{b^2 - c^2 + a^2}{2b},$$

$$z = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2c}, \qquad z' = \frac{c^2 - a^2 + b^2}{2c}.$$

C'est ainsi que le triangle de côtés (4, 5, 6) donne, après multiplication par 8, les deux parallélépipèdes rectangles d'arêtes respectives

$$x = 27, \quad y = 4, \quad z = 30,$$
$$x' = 5, \quad y' = 36, \quad z' = 18.$$

62. — La première cubique d'Edouard Lucas. — C'est aux cubiques qui font l'objet de la question suivante que se rattache l'étude générale du problème des parallélépipèdes rectangles équivalents et isodiagonaux. « On joint les trois sommets d'un triangle ABC à un point P et l'on prend les « intersections A′B′C′ des lignes de jonction avec les côtés « opposés. Trouver le lieu des points P de telle sorte que les « perpendiculaires élevées sur les côtés aux points A′B′C′ « se rencontrent en un même point Q. Ce lieu est une cubi- « que dont il est facile de déterminer seize points et trois « tangentes. Déterminer les asymptotes et, aussi, trouver le « lieu du point Q.[1] »

Soient X, Y, Z les coordonnées barycentriques du point courant P de la première cubique de Lucas, le triangle ABC étant pris pour triangle de référence. La droite AP a pour équation

$$\frac{\eta}{Y} = \frac{\zeta}{Z}.$$

[1] Ed. Lucas, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 2e série, t. XV, 1876, question n° 1207, p. 240. Solution p. 550-555 (Dewulf).

Enoncé analogue par Ed. Lucas, *Nouvelle correspondance mathématique*, t. II, 1876, question n° 83, p. 94. Solutions : 1re partie, 1880, p. 56-65 et 2e partie, 1878, pp. 261-272 par H. van Aubel.

Cf. aussi un article de H. van Aubel, *Nouvelle correspondance mathématique*, t. V, 1879, p. 87, Sur un lieu géométrique (trouver le lieu des points Q tels que les perpendiculaires QA′, QB′, QC′ abaissées sur les trois côtés d'un triangle ABC déterminent sur ces côtés des segments en involution.

et, par suite, les segments $BA' = x$ et $A'C = x'$ déterminés sur le côté $\xi = 0$ sont entre eux dans le rapport $\frac{x}{x'} = \frac{Z}{Y}$. Les valeurs des six segments BA', A'C, CB', B'A, AC' et C'B sont donc

$$x = a.\frac{Z}{Y+Z}, \qquad x' = a.\frac{Y}{Y+Z},$$

$$y = b.\frac{X}{Z+X}, \qquad y' = b.\frac{Z}{Z+X},$$

$$z = c.\frac{Y}{X+Y}, \qquad z' = c.\frac{X}{X+Y};$$

la relation $x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$ donne alors l'équation de la première cubique de Lucas en ce système de coordonnées barycentriques :

$$a^2.\frac{Y-Z}{Y+Z} + b^2.\frac{Z-X}{Z+X} + c^2.\frac{X-Y}{X+Y} = 0 .$$

Cette cubique se transforme en elle-même dans la transformation quadratique définie par les formules

$$XX_1 = YY_1 = ZZ_1$$

et qui est analogue à la transformation isogonale. Cette invariance de la cubique correspond à l'échange entre eux des deux parallélépipèdes associés.

En revenant au problème des parallélépipèdes rectangles équivalents et isodiagonaux, il résulte des considérations qui précèdent que sa solution générale s'exprime par les formules suivantes où a, b, c sont des paramètres absolument quelconques (qui ne sont pas de toute nécessité les mesures des côtés d'un triangle ABC) :

$$x = a.\frac{Z}{Y+Z}, \qquad x' = a.\frac{Y}{Y+Z},$$

$$y = b.\frac{X}{Z+X}, \qquad y' = b.\frac{Z}{Z+X},$$

$$z = c.\frac{Y}{X+Y}, \qquad z' = c.\frac{X}{X+Y};$$

X, Y, Z sont les coordonnées homogènes d'un arithmopoint quelconque de la cubique d'équation homogène

$$\sum a^2 \frac{Y - Z}{Y + Z} = 0$$

passant par les sommets du triangle de référence (qui n'est plus nécessairement le triangle A, B, C).

Il est essentiel de remarquer que la première cubique d'Edouard Lucas permet de résoudre le problème des parallélépipèdes lorsque a, b, c sont les mesures des côtés d'un triangle et que, si cette dernière condition n'est pas satisfaite, les formules obtenues gardent un sens et, par continuité, donnent la solution générale du même problème.

La première cubique de Lucas [ou sa généralisation pour le cas de a, b, c quelconques] est douée d'un certain nombre de points remarquables: les sommets ABC du triangle de référence, le centre de gravité, l'orthocentre, les sommets A, B, C, du triangle formé par les parallèles aux côtés de ABC, etc..... D'où *a priori* un certain nombre d'arithmopoints très simples

$$\begin{array}{lll} X = 0\,, & Y = 0\,, & Z = 1\,, \\ X = 0\,, & Y = 1\,, & Z = 0\,, \\ X = 1\,, & Y = 0\,, & Z = 0\,, \\ X = 1\,, & Y = 1\,, & Z = 1\,, \\ X = 1\,, & Y = 1\,, & Z = -1\,, \\ X = 1\,, & Y = -1\,, & Z = 1\,, \\ X = -1\,, & Y = 1\,, & Z = 1\,, \end{array}$$

$$X = b^2 + c^2 - a^2\,, \qquad Y = c^2 + a^2 - b^2\,, \qquad Z = a^2 + b^2 - c^2\,;$$

Ce dernier arithmopoint correspond, par exemple, au point transformé de l'orthocentre dans la transformation quadratique signalée précédemment.

63. — La seconde cubique de Lucas. — Soient maintenant X, Y, Z les coordonnées trilinéaires du point Q. Le théorème des projections donne immédiatement les expressions des

segments BA′, A′C... déterminés sur les côtés du triangle ABC par les projections de Q :

$$x = \frac{Z + X\cos B}{\sin B}, \qquad x' = \frac{Y + X\cos C}{\sin C},$$

$$y = \frac{X + Y\cos C}{\sin C}, \qquad y' = \frac{Z + Y\cos A}{\sin A},$$

$$z = \frac{Y + Z\cos A}{\sin A}, \qquad z' = \frac{X + Z\cos B}{\sin B};$$

l'équation de la seconde cubique de Lucas résulte du théorème de J. Céva :

$$(Y + Z\cos A)(Z + X\cos B)(X + Y\cos C) = (Z + Y\cos A)(X + Z\cos B)(Y + X\cos C).$$

Cette cubique est invariante dans la transformation isogonale. Elle passe par les sommets A, B, C du triangle ABC, par l'orthocentre, par le centre du cercle circonscrit qui est d'ailleurs le centre de cette cubique, par les centres des quatre cercles tritangents aux côtés du triangle, par les points à l'infini des trois médiatrices qui sont asymptotes de la cubique.....

Revenons au problème des parallélépipèdes. Il résulte des considérations qui précèdent que l'on doit poser

$$x = \frac{2acZ + (a^2 + c^2 - b^2)X}{4S}, \qquad x' = \frac{2abY + (a^2 + b^2 - c^2)X}{4S}, \ldots$$

S représentant la surface du triangle ABC ; l'équation de la seconde cubique de Lucas est alors :

$$\Pi \frac{2acZ + (a^2 + c^2 - b^2)X}{2abY + (a^2 + b^2 - c^2)X} = 1.$$

Il est absolument indispensable de supposer actuellement que a, b, c sont les mesures d'un véritable triangle et en outre que ce triangle est un *arithmotriangle héronien*. A la différence des considérations du paragraphe précédent relatif à la première cubique de Lucas, où aucune hypothèse restrictive n'était nécessaire sur la nature de a, b, c, ce n'est actuellement que moyennant cette double condition que le

problème des parallélépipèdes restangles équivalents et isodiagonaux étudié sera susceptible d'être rattaché à l'étude des arithmopoints de la seconde cubique de Lucas.

64. — Autre définition de la seconde cubique de Lucas. — Je crois devoir indiquer ici une propriété importante[1] qui peut servir à définir la seconde cubique de Lucas.

La seconde cubique d'E. Lucas est le lieu des points Q *du plan d'un triangle* ABC *tels que les droites* QA, QB *et* QC *soient normales en* A, B *et* C *à une même conique.*

Si l'on représente, en effet, en coordonnées trilinéaires par rapport au triangle de référence ABC, une droite issue du sommet A par l'équation

$$Y = mZ ,$$

l'involution des droites orthogonales autour du point A, qui comprend comme couples de droites associées d'une part les deux bissectrices ($m = 1$, $m' = -1$) et d'autre part la hauteur AH $\left(m = \frac{\cos C}{\cos B}\right)$ et le parallèle au côté opposé BC $\left(m' = -\frac{\sin C}{\sin B}\right)$, est définie par l'équation

$$mm' + 1 + (m + m') \cos A = 0 .$$

Si donc (x, y, z) sont les coordonnées trilinéaires du point Q du lieu étudié, les perpendiculaires en A, B et C aux droites QA, QB, QC ont pour équations respectives

$$Y = \alpha Z , \qquad Z = \beta X , \qquad X = \gamma Y ,$$

avec

$$\alpha = -\frac{z + y \cos A}{y + z \cos A} , \qquad \beta = -\frac{x + z \cos B}{z + x \cos B} , \qquad \gamma = -\frac{y + x \cos C}{x + y \cos C} .$$

Il résulte, d'autre part, de l'équation générale d'une conique circonscrite à ABC,

$$\frac{\mathfrak{A}}{x} + \frac{\mathfrak{B}}{y} + \frac{\mathfrak{C}}{z} = 0 ,$$

que les coefficients jouant le rôle de coefficients angulaires

[1] A porter au compte d'un auteur dont je ne puis préciser le nom, n'ayant pu retrouver la référence utile.

des tangentes aux sommets A, B, C du triangle de référence sont

$$\alpha = -\frac{\mathcal{B}}{\mathcal{C}}, \qquad \beta = -\frac{\mathcal{C}}{\mathcal{A}}, \qquad \gamma = -\frac{\mathcal{A}}{\mathcal{B}}.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que QA, QB, QC soient normales à une même conique en A, B et C est donc

$$\alpha\beta\gamma = -1 ;$$

elle se traduit, par conséquent, par l'équation

$$(z + y\cos A)(x + z\cos B)(y + x\cos C)$$
$$= (y + z\cos A)(z + x\cos B)(x + y\cos C)$$

représentative de la seconde cubique d'E. Lucas.

Les arithmotriangles télémétriques.

65. — Le problème télémétrique conduit à la considération de triangles obtusangles particuliers ABC qui sont définis par la relation[1]

$$\sin 2C + 2\sin 2B = 0, \qquad \left(B > \frac{\pi}{2}\right).$$

J'appellerai triangles télémétriques les triangles de cette nature. Par exemple, les triangles d'angles

$$A = 30^\circ, \qquad B = 105^\circ, \qquad C = 45^\circ$$

qui peuvent être facilement construits à partir des triangles équilatéraux sont des triangles télémétriques particuliers.

Soient maintenant A′ B′ C′ les pieds des hauteurs d'un triangle télémétrique. Le triangle pédal A′ B′ C′ de ABC a pour angles

$$A' = 2A, \qquad B' = 2B - \pi, \qquad C' = 2C.$$

Il en résulte que la relation de définition d'un triangle télémétrique quelconque se traduit par une condition très sim-

[1] J.-E. Estienne, Note sur les télémètres, *Revue d'artillerie*, novembre 1904.
Jules Raibaud, Instruments d'optique, d'observation et de mesure, *Encyclopédie scientifique*, Paris, 1910, p. 321-322.

ple : *L'un des côtés du triangle pédal d'un triangle télémétrique est double d'un autre côté :*

$$A'B' = 2A'C' .$$

Cette relation très simple permet de résoudre graphiquement le problème télémétrique.

66. — Les arithmotriangles télémétriques héroniens. — Le problème qui consiste à rechercher les arithmotriangles télémétriques, c'est-à-dire ceux de ces triangles télémétriques qui sont à côtés rationnels se rattache à l'étude arithmogéométrique d'une quartique plane. La relation entre les côtés a, b, c d'un triangle télémétrique général se déduit immédiatement de la condition

$$\sin 2C + 2\sin 2B = 0 ;$$

c'est la relation homogène

$$(b^2 - c^2)(c^2 - 2b^2) + (c^2 + 2b^2)a^2 = 0 .$$

En posant donc

$$\frac{c}{a} = x , \qquad \frac{b}{a} = y ,$$

on réduit ainsi l'étude des arithmotriangles télémétriques à celle des arithmopoints de la quartique plane représentée par l'équation

$$(x^2 - y^2)(x^2 - 2y^2) = x^2 + 2y^2 .$$

L'étude arithmogéométrique de cette quartique plane échappe aux procédés qui ont été développés dans les pages précédentes. Mais il est toutefois possible à l'occasion du problème de la détermination de ceux de ces arithmotriangles télémétriques qui sont aussi héroniens, d'établir la proposition négative suivante.

Le triangle pédal de tout arithmotriangle héronien est lui-même un arithmotriangle héronien. De sorte que l'*arithmotriangle télémétrique héronien le plus général a pour sommets le centre du cercle inscrit* I *et deux des centres* I_1 *et* I_3

des cercles exinscrits à l'arithmotriangle héronien A'B'C' *le plus général dont deux côtés soient entre eux dans le rapport* $\frac{1}{2}$:

$$A'B' = 2A'C' .$$

Reste à déterminer ceux-ci.

67. — Il s'agit donc de déterminer l'arithmotriangle héronien le plus général A'B'C' tel que $A'B' = 2\ A'C'$. De tels triangles se rencontrent à propos de l'équilibre *sur un plan incliné* d'un cercle vertical, dont le centre de gravité est au milieu d'un rayon [1].

En application de la règle du paragraphe 10, pour représenter un triangle héronien quelconque A'B'C', je dois poser

$$\operatorname{tg}\frac{A'}{2} = \frac{1 - y^2}{y + z} , \qquad \operatorname{tg}\frac{B'}{2} = y , \qquad \operatorname{tg}\frac{C'}{2} = z ,$$

y et z étant deux nombres rationnels assujettis à certaines inégalités. La condition

$$A'B' = 2A'C'$$

se traduit ici par

$$\sin C' = 2\sin B' ,$$

c'est-à-dire encore par l'équation

$$\frac{z}{1 + z^2} = 2\frac{y}{1 + y^2} .$$

Par conséquent *l'étude des arithmotriangles télémétriques héroniens* (ou encore celle des arithmotriangles héroniens dont deux côtés sont dans le rapport $\frac{1}{2}$) est *équivalente à l'étude arithmogéométrique d'une cubique plane* douée de quatre arithmopoints (l'origine et les arithmopoints à l'infini) mais ne possédant pas d'autre arithmopoint.

Cette propriété négative résulte de ce que l'équation du

---

[1] C. f. H. Brocard, *Journal de Spéciales*, 1885, pp. 108-109. L'équation d'équilibre $\sin(\theta + \omega) = 2\sin\omega$, où ω est l'angle que fait le plan incliné avec l'horizon, a été rencontrée par le même géomètre dans des recherches bien différentes concernant une question de géométrie du triangle et un certain groupe de trois paraboles. *Journal de Spéciales*, 1885, pp. 77-80, et *Mémoires de l'Académie des Sciences et Lettres de Montpellier*, Propriétés d'un groupe de trois paraboles, t. XL, 1885-1886, p. 51-58.

second degré en y ne peut admettre de racine rationnelle que si la quantité

$$\left(\frac{1+z^2}{z}\right)^2 - 1$$

est un carré parfait. On est ainsi conduit à une équation

$$z^4 + z^2 + 1 = t^2$$

qui admet la seule solution banale $z = 0$ et dont l'impossibilité a été établie en 1777 par Euler [1]. *Il n'existe donc pas d'arithmotriangle télémétrique qui soit aussi un arithmotriangle héronien.*

68. — D'une manière générale, il convient d'observer que le problème qui consiste à déterminer l'arithmotriangle héronien le plus général dont le rapport de deux côtés est imposé *a priori* se traduit par l'équation d'une cubique plane

$$\frac{z}{1+z^2} = n\frac{y}{1+y^2} .$$

Considérée comme une équation du second degré en z elle entraîne la condition

$$z^4 + 2(1-2k^2)z^2 + 1 = t^2 .$$

Le problème considéré est donc réductible à l'équation étudiée par Euler dans les mémoires cités plus haut.

On peut encore poser

$$\frac{z}{1+z^2} = n\frac{y}{1+y^2} = \frac{1}{2\lambda} ;$$

la question est alors réduite à l'étude d'une biquadratique gauche représentée par le système d'équations :

$$\lambda^2 - 1 = \mu^2 , \qquad \lambda^2 n^2 - 1 = \nu^2 .$$

obtenues en écrivant que les deux équations quadratiques en z et en y

$$z^2 - 2\lambda z + 1 = 0 ,$$
$$y^2 - 2\lambda n y + 1 = 0 ,$$

ont des racines rationnelles.

---

[1] L. Euleri, *Commentationes arithmeticæ*, édition de 1849, t. 2. *De casibus, quibus hanc formulam* $x^4 + kx^2y^2 + y^4$ *ad quadratum reducere licet* [avril 1777 et mai 1782] (pp. 183-189 et pp. 492-500).

A. Genocchi, Sur l'impossibilité de quelques équations doubles, *C. R.*, 1874, t. 78, pp. 433-435.

69. — Ici s'arrête l'article que je m'étais initialement proposé d'écrire sur les notions d'arithmogéométrie, la suite devant être consacrée à des compléments et à des considérations d'un tout autre ordre. Le but poursuivi était d'insister sur l'intérêt considérable qu'offrent les remarques géométriques dans toutes ces questions d'arithmologie. L'absence de remarques de cette nature dans presque toutes les études faites sur des problèmes spéciaux de la théorie des nombres est une lacune que j'ai souvent jugée regrettable. C'est pourquoi je me suis décidé à entreprendre cet examen, certainement très incomplet encore, de toute une série de questions arithmétiques susceptibles d'être interprétées géométriquement d'une manière intéressante.

Je me suis principalement efforcé de rester dans le domaine le plus élémentaire. C'est ainsi que j'ai systématiquement écarté les fonctions elliptiques, qui ne figurent point dans nos programmes d'enseignement secondaire. Le lecteur désireux d'aller plus loin pourra d'ailleurs introduire la notion de fonctions elliptiques à l'occasion des propriétés arithmogéométriques des cubiques et des biquadratiques gauches, en suivant la voie tracée par J. Bertrand[1], par H. Léauté[2], par M. Picquet[3] et par H. Poincaré[4].

La plus grande partie du présent travail a été effectuée dans des conditions matérielles désastreuses, loin notamment de toute bibliothèque. Je n'aurais certainement pas eu la possibilité de le mener à bonne fin sans le concours précieux de MM. H. Brocard et A. Aubry, que j'ai souvent et toujours très utilement consultés.

Je me permets donc, dès maintenant, de leur adresser ici mes plus vifs remerciements.

(A suivre.)

---

[1] J. Bertrand. Traité de Calcul différentiel et intégral, t. II, p. 583.

H. Léauté. Etude géométrique sur les fonctions elliptiques de première espèce, *Journal de l'Ecole polytechnique*, 46e cahier, 1879 (t. XXVIII, p. 67-99.

[3] Picquet, Application de la représentation des courbes du 3e degré à l'aide des fonctions elliptiques, *Journal de l'Ecole polytechnique*, 54e année, 1884.

H. Poincaré, Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques. *Journal de mathématiques pures et appliquées de Liouville*, 5e série, t. VII, 1901, pp. 161-233.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Récréation mathématique.

Le jeu de la Ziggurat.

PAR

Pierre Bovet (Genève) et L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel).

I. — La plupart des recueils de récréations mathématiques[1] mentionnent sous des noms divers : La tour de Hanoï, l'anneau du brahmine, etc., un jeu et un problème dûs, sauf erreur, à Lucas. Un certain nombre de disques, 7 ou 8, de grandeurs différentes sont enfilés dans une aiguille verticale. Le plus large est à la base, puis les diamètres des disques vont en décroissant jusqu'au plus petit, de telle sorte que l'ensemble a l'aspect d'un cône en étages et le profil d'une *ziggurat* assyrienne. Deux autres aiguilles verticales, vierges de tout disque, sont fichées dans la même planchette. Il s'agit de reconstruire la tour sur l'une d'elles en déplaçant un seul disque à la fois et sans jamais poser un disque sur un autre plus étroit. On demande quel est le nombre minimum de déplacements nécessaires pour un nombre n de disques.

Ce nombre est égal à $2^n - 1$.

En effet, quel que soit le nombre des disques, on ne pourra ôter de la première aiguille le disque de base qu'au moment où l'une des deux autres aiguilles (appelons-la la seconde) sera entièrement libre, et où, par conséquent, tous les disques sauf le dernier seront enfilés régulièrement sur la troisième aiguille.

Puis une fois le disque de base déplacé de la première à la deuxième aiguille, il faudra rebâtir sur lui la pyramide telle qu'elle a été édifiée sur la troisième aiguille.

Le minimum des déplacements nécessaires pour n disques est ainsi représenté par une somme (appelons-la S_n) qui se décompose comme suit :

$$S_n = S_{n-1} + 1 + S_{n-1} = 2S_{n-1} + 1.$$

[1] Par ex., Lucas. *Récréations mathématiques*, 1893, t. III, p. 55-57. — Gaston Tissandier. *Récréations scientifiques*, p. 223. — W. Ahrens. *Mathematische Spiele*.

On vérifie aisément que la loi est générale par le passage de n à $n + 1$.

Partons maintenant de $n = 2$, nous aurons

$$S_2 = 2\,S_1 + 1.$$

Mais déplacer une pyramide d'un seul disque, c'est évidemment l'affaire d'un seul coup : $S_1 = 1$; donc

$$S_2 = \quad 2 + 1 = 3 = 2^2 - 1$$
$$S_3 = (2 \times 3) + 1 = 7 = 2(2^2 - 1) + 1 = 2^3 - 1$$
$$S_4 = (2 \times 7) + 1 = 15 = 2(2^3 - 1) + 1 = 2^4 - 1, \text{ etc.}$$

et d'une manière générale

$$S_n = 2^n - 1.$$

Le problème de Lucas amuse les écoliers. Comme celui des grains de blé sur les cases de l'échiquier, il les familiarise avec les valeurs numériques des puissances successives de 2. Ils découvrent avec joie que pour transporter une tour de 30 disques, il faut à raison d'un coup par minute plus de 2500 ans.

Cas de quatre aiguilles. — Après avoir trouvé avec mes petits mathématiciens, des garçons de 11 à 13 ans, la solution du problème de Lucas, nous nous en sommes posé un second que je crois nouveau : « En combien de coups reconstruirait-on la tour, suivant les mêmes règles, si la planchette portait non plus 3 aiguilles, mais 4 ? »

Ce nouveau problème offre des analogies évidentes avec le premier. Le nombre total des coups (appelons-le T cette fois) s'obtient, comme c'était le cas pour S dans le problème précédent, par trois opérations :

1° L'enlèvement des $n - 1$ disques supérieurs et leur empilement provisoire de façon à laisser entièrement libre une aiguille pour y transporter le disque de base ; — cette opération représente ν coups.

2° Le transfert du disque de base de l'aiguille de départ à l'aiguille d'arrivée = 1 coup.

3° La reconstruction définitive de la pyramide sur le disque de base à l'aiguille d'arrivée, par le transfert de $n - 1$ disques. Cette opération qui est l'inverse de la première nécessite le même nombre de coups, soit ν coups.

Quel que soit le nombre des disques, T est toujours un nombre impair ; car la solution du problème est représentée par la formule $T = 2\,\nu + 1$.

La différence entre les deux problèmes consiste en ceci : La

première opération partielle, celle qui doit dégager le disque de base et qui consiste en un empilement provisoire de $n - 1$ disques, se fait non plus en *une* pyramide sur une seule aiguille, mais sur deux aiguilles en deux pyramides A et B, composées l'une (A), celle qui se construit d'abord, des a disques les plus petits, l'autre (B) des b disques les plus grands ($a + b = n - 1$).

Ces deux tas A, B ont été construits dans des conditions très différentes. On a d'abord bâti A, celui des petits disques, en disposant librement des deux aiguilles auxiliaires que comporte notre jeu de 4 aiguilles. Puis on a commencé de bâtir B, le tas des disques les plus grands, mais on n'avait plus en ce moment à sa disposition qu'*une* seule aiguille auxiliaire comme dans le problème de Lucas, l'autre étant immobilisée par la pyramide A.

La troisième opération, reconstruction de la pyramide finale, s'effectue dans des conditions identiques à la première. Il s'agit en effet de transporter une seconde fois la pyramide B (sur le disque de base déplacé) avec l'aide d'une seule aiguille auxiliaire (la pyramide A immobilisant la seconde), puis la pyramide A (sur le sommet de B) avec l'aide des deux aiguilles.

Le problème final se ramène donc à celui-ci : « Quelle est au moment où l'on va déplacer le disque de base, la répartition la plus avantageuse des $n - 1$ autres disques entre les deux pyramides A et B ? »

On sera tenté de déclarer qu'il faut faire la pyramide A aussi haute que possible, pour disposer aussi longtemps que possible des deux aiguilles, mais un examen plus attentif montre que le problème est plus complexe.

(Continuons d'appeler S_n le nombre de coups nécessaires pour transporter n disques dans le jeu des 3 aiguilles et T_n le nombre de coups nécessaires pour résoudre le même problème dans le jeu des 4 aiguilles). Pour $n = 1$ et $n = 2$, S est égal à T, car le transport s'effectue de la première à la troisième aiguille, sans que la quatrième soit mise à contribution. Mais pour $n = 3$, il n'en est plus de même : au moment de déplacer le disque de base, les deux aiguilles auxiliaires portent chacune une pyramide réduite de part et d'autre à un seul disque. Il a fallu 2 fois 1 coup pour les constituer, il en faudra autant pour les transporter. Donc, si $T_n = 2v + 1$, on aura pour $v = 2$

$$T_3 = (2 \times 2) + 1 = 5,$$

alors que, comme nous savons, $S_3 = 2^3 - 1 = 7$. Cette première divergence entre T et S détermine toutes les autres. Pour $n = 4$, nous aurons, au moment de transporter le disque de base, $n - 1$ soit trois disques répartis en deux pyramides, soit nécessairement deux d'un côté et un de l'autre. Les deux répartitions possibles :

2 sur A et 1 sur B, ou 2 sur B et 1 sur A, se valent, car d'une part

2 sur A représente $S_2 = 3$ coups,
1 sur B » $T_1 = 1$ coup,

d'où pour $v = 4$, $T_4 = 9$ et d'autre part

1 sur A donne $S_1 = 1$ coup,
2 sur B » $T_2 = 3$ coups,

soit encore $v = 4$, $T_4 = 9$.

Pour $n = 5$, nous pourrons avoir 3 empilements :

1. 1 sur A et 3 sur B, représentant $S_1 = 1$, $T_3 = 5$, $v = 6$, $T_5 = 13$.

2. 3 sur A et 1 sur B, représentant $S_3 = 7$, $T_1 = 1$, $v = 8$, $T_5 = 17$.

3. 2 sur A et 2 sur B, représentant $S_2 = 3$. $T_2 = 3$, $v = 6$, $T_5 = 13$. Si nous entendons par T_5, comme il était convenu, le *minimum* des coups nécessaires pour résoudre le problème, $T_5 = 13$.

Nous ne continuerons pas l'examen détaillé des diverses solutions possibles pour les valeurs successives de n. Ce que nous avons trouvé suffit à nous orienter sur la façon de trouver toute la suite des valeurs de T.

Nous avons déjà dit ce que nous entendons par n, par S_n et par T_n. Considérons leurs valeurs successives dans ce tableau :

n	S_n	$(S_n - S_{n-1})$	T_n	$(T - T_{n-1})$
1	1	1	1	1
2	3	2	3	2
3	7	4	5	2
4	15	8	9	4
5	31	16	13	4
6	63	32	17	4
7	127	64	25	8
8	255	128	33	8
9	511	256	41	8
10	1023	512	49	8
11	2047	1024	65	16
12	4095	2048	81	16
13	8191	4096	97	16
14	16383	8192	113	16
15	33767	16384	129	16
16	67535	33768	161	32

. . . . . .

Dans la répartition des $n - 1$ disques entre les pyramides A et B, on n'accorde pas une préférence exclusive à A, pour deux raisons : 1° parce que pour les pyramides de 1 et 2 disques, il n'y a pas de différence entre S_n et T_n. Il n'y aura ainsi jamais aucun inconvénient à ce que B compte 2 disques. C'est ce que nous venons de voir pour $n = 3$, $n = 4$, $n = 5$ (cas 3). 2° Avec l'accroissement du nombre des disques en A arrive un moment où l'adjonction d'un disque à la pyramide A représente une plus grande différence que l'adjonction d'un troisième disque à l'autre pyramide B.

C'est ce qui arrive déjà pour $n = 10$. En effet : 7 disques en B et 2 en A représentent un plus grand nombre de coups que 6 en B et 3 en A.

$$T_7 = 25,\ S_2 = 3,\ v = 28,\ T_{10} = 57,$$

$$T_6 = 17,\ S_3 = 7,\ v = 24,\ T_{10} = 49.$$

Ceci nous amène à la loi de la série T_n telle qu'elle se dégage de la cinquième colonne de notre tableau. Cette cinquième colonne renferme les mêmes nombres que la troisième ; chacun y figure autant de fois que le précédent plus une fois. Il y a un 1, deux 2, trois 4, quatre 8 et ainsi de suite. Ce que nous venons de voir de la façon dont s'établit la valeur minimum de v (par l'addition d'un S et d'un T) et par conséquent celle de T (car $T_n = 2\,v + 1$) nous explique cette particularité.

Les mathématiciens ont sans doute une façon succincte de noter la loi de formation de la série T et de calculer la valeur T_n. S'ils peuvent m'en signaler une qui soit à la portée de mes petits élèves, je leur en serai reconnaissant. Pour le moment, nous procédons comme suit :

Soit à trouver T_{24}. Le nombre triangulaire[1] inférieur à 24 qui en est le plus rapproché est 21, et de 21 à 24, il y a 3. Nous tirons de là que $T_{24} = 1 + 2 \,.\, 2^1 + 3 \,.\, 2^2 + 4 \,.\, 2^3 + 5 \,.\, 2^4 + 6 \,.\, 2^5 + 3 \,.\, 2^6 = 513$, qui s'obtiendrait indifféremment par l'un ou l'autre des empilements suivants

$$T_{18} = 225\ ,\quad S_5 = 31\ ,\quad v = 256\ .$$

$$T_{17} = 193\ ,\quad S_6 = 63\ ,\quad v = 256\ .$$

J'ai fait représenter graphiquement à mes élèves la série des valeurs de T. Cela nous a permis d'entrevoir la solution du problème des 5 aiguilles et de tous les suivants. Pour un nombre

---

[1] Mes jeunes mathématiciens connaissent cette façon pythagoricienne d'appeler les nombres, de la forme $n\,\frac{(n+1)}{2}$, résultant de l'addition des n premiers nombres entiers.

infini d'aiguilles, la série T se confondrait avec celle des nombres impairs.

J'ai conseillé à mes jeunes gens de fabriquer pour leurs amis le jeu des 4 aiguilles avec quelque 15 à 20 disques. Dans la pratique, ce jeu donnera matière à beaucoup plus d'hésitations que le jeu classique de la tour d'Hanoï. C'est dire qu'il a chance de n'être pas moins amusant. Ils l'introduiront par un petit conte assyrien et l'ont baptisé déjà : le *jeu de la Ziggurat.*

Mon vieil ami L.-G. Du Pasquier, professeur à l'Université de Neuchâtel, auquel j'ai communiqué les pages ci-dessus a bien voulu répondre déjà au vœu que j'y exprime d'obtenir des mathématiciens une formule facile permettant de calculer T_n. Il m'a permis de joindre à ma communication le complément qui suit.

Pierre Bovet (Genève).

II. — Désignons par $t_{\lambda-1}$ le $\lambda^{\text{ième}}$ nombre triangulaire ; d'après cela, $t_0 = 1$, $t_1 = 3$, $t_2 = 6$, $t_3 = 10$, $t_4 = 15, \ldots\ldots$ en général : $t_\lambda = \frac{1}{2}(\lambda + 1)(\lambda + 2)$. Soit n un nombre positif d'ailleurs quelconque ; représentons par $E_2(n)$ le plus grand nombre triangulaire contenu dans n ; par exemple $E_2(2) = 1$; $E_2(\pi) = 3$; $E_2(9) = 6$; $E_2(10, 33) = 10$; etc. (Cette notation est une généralisation du symbole de Legendre : $E(n)$ = plus grand nombre *entier* contenu dans n ; nous posons donc par définition : $E_1(x) = E(x)$; $E_2(x)$ = le plus grand nombre triangulaire contenu dans x ; $E_3(x)$ = le plus grand nombre carré contenu dans x ; $E_4(x)$ = le plus grand nombre pentagonal contenu dans x ; et ainsi de suite).

Cela posé, tout nombre positif n peut se représenter, et d'une seule manière, sous forme d'une somme de deux termes

$$n = t_\lambda + r \tag{a}$$

où $t_\lambda = E_2(n)$ est le plus grand nombre triangulaire contenu dans n, et r un nombre non négatif. Si, en particulier, n représente un nombre entier, par exemple le nombre des disques dans le jeu en question, on aura les décompositions suivantes :

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16 ...
$t_\lambda =$	1	1	3	3	3	6	6	6	6	10	10	10	10	10	15	15 ...
$r =$	0	1	0	1	2	0	1	2	3	0	1	2	3	4	0	1 ...
$\lambda =$	0	0	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4 ...

La série T_n est alors représentée par la formule

$$T_n = 1 + (\lambda + r) \,.\, 2^{\lambda+1}$$

La sommation de la série

$$1 + 2 \,.\, 2^1 + 3 \,.\, 2^2 + 4 \,.\, 2^3 + 5 \,.\, 2^4 + \ldots + (n+1) \,.\, 2^n = \sum_{\lambda}^{0\ldots n} (\lambda+1) \,.\, 2^{\lambda},$$

qui intervient dans la formation des nombres T_n, peut être trouvée, grâce aux indications qui suivent, même par des garçons d'une douzaine d'années, pourvu qu'ils connaissent la formule de sommation des progressions géométriques. On a tout d'abord

$$\sum_{\lambda} (\lambda + 1) \,.\, 2^{\lambda} = \sum_{\lambda} \lambda \,.\, 2^{\lambda} + \sum_{\lambda} 2^{\lambda}.$$

D'une part,

$$\sum_{\lambda}^{0\ldots n} 2^{\lambda} = 1 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1 \,.$$

D'autre part, on peut représenter $\sum_{\lambda}^{0\ldots n} \lambda \,.\, 2^{\lambda}$ de la manière que voici :

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda}^{0\ldots n} \lambda \,.\, 2^{\lambda} &= 0 + 1 \,.\, 2 + 2 \,.\, 2^2 + 3 \,.\, 2^3 + 4 \,.\, 2^4 + 5 \,.\, 2^5 + \ldots + n \,.\, 2^n \\
&= \quad 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^n \\
&\qquad\quad + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^n \\
&\qquad\qquad\quad + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^n \\
&\qquad\qquad\qquad\quad + 2^4 + 2^5 + \ldots + 2^n \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 2^{n-1} + 2^n \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad + 2^n
\end{aligned}$$

Faisant la sommation de chaque ligne horizontale séparément, puis additionnant ces sommes partielles, il vient

$$\begin{aligned}
\sum_{\lambda}^{0\ldots n} \lambda \,.\, 2^{\lambda} = {} & (2^{n+1} - 1) - 1 \\
& + (2^{n+1} - 1) - (1 + 2) \\
& + (2^{n+1} - 1) - (1 + 2 + 4) \\
& + (2^{n+1} - 1) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3) \\
& + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
& + (2^{n+1} - 1) - (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{n-2} + 2^{n-1}).
\end{aligned}$$

Tout ce problème est ainsi ramené à la sommation de progressions géométriques.

On trouve facilement $\sum_{\lambda}^{0..n} \lambda \,.\, 2^{\lambda} = 2 + (n - 1) \,.\, 2^{n+1}$.

On en déduit immédiatement $\sum_{\lambda}^{0...n} (\lambda + 1) \,.\, 2^{\lambda} = 1 + n \,.\, 2^{n+1}$,

et ce résultat, combiné avec la décomposition (a) du nombre n des disques, conduit à la formule cherchée

$$T_n = 1 + (\lambda + r) \,.\, 2^{\lambda+1}$$

L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel).

Remarques sur le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise (Fibonacci),

à propos d'un article de M. E. Turrière.

Il est intéressant de rapprocher les recherches publiées récemment par MM. Hæntzschel[1] et Turrière[2] sur le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise. Tandis que M. Turrière ne fait usage que de moyens élémentaires, M. Hæntzschel montre comment l'emploi des fonctions $\wp$ de Weierstrass facilite l'étude approfondie de ces problèmes arithmo-géométriques.

D'après le 7e exemple du 3e livre de l'Arithmétique de Diophante, il s'agit de trouver trois nombres en progression arithmétique $(a - d,\ a,\ a + d)$ et tels que la somme de deux des nombres soit chaque fois un carré parfait.

Diophante cherche d'abord trois nombres carrés qui sont en progression arithmétique

$$2a - d = r^2\ , \qquad 2a = t^2\ , \qquad 2a + d = u^2\ ;$$

il trouve

$$41^2 - 720 = 31^2\ , \qquad 41^2\ , \qquad 41^2 + 720 = 49^2\ .$$

---

[1] *Jahresbericht der D. M.-V.*, 24e année, 1915, p. 467-471, Lösung einer Aufgabe aus der Arithmetik des Diophante; 25e année, 1916, p. 139-145, Ueber eine Aufgabe aus der Arithmetik des Diophante.

[2] *L'Enseign. mathém.*, 17e année, 1915, p. 315-324, Le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise.

Mais c'est la première question de Jean de Palerme à Léonard de Pise (Fibonacci) qui a donné la solution

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2, \qquad \left(\frac{41}{12}\right)^2, \qquad \left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

Il est clair que

$$\left(\frac{w+r}{2}\right)^2 + \left(\frac{w-r}{2}\right)^2 = t^2 ,$$

d'où il suit que $\frac{w-r}{2}$, $\frac{w+r}{2}$ et t sont des nombres rationnels de Pythagore.

M. Hæntzschel a démontré [*l. c.*, 24e année, p. 468, (5) et p. 469, (7)-(11)] que l'expression générale de la série est :

$$2a - d = \wp(u) - e_3 = \frac{n^2}{4k^2}(2k^2 - 4k + 1)^2 = r^2 ;$$

$$2a = \wp(u) = \frac{n^2}{4k^2}(2k^2 - 2k + 1)^2 = t^2 ;$$

$$2a + d = \wp(u) - e_1 = \frac{n^2}{4k^2}(2k^2 - 1)^2 = w^2 ;$$

$$d = e_3 = - e_1 = \frac{n^2}{k}(2k^2 - 3k + 1) ,$$

où $\wp(u)$ est la fonction elliptique de Weierstrass. C'est la solution primitive selon Fermat. Voici la solution complète du problème de Jean de Palerme (*Jahresbericht*, 25e année, p. 142), où δ est une valeur spéciale de la différence d.

$$\begin{array}{ccc}
\wp(u) - \delta , & \wp(u) , & \wp(u) + \delta ; \\
\wp(2u) - \delta , & \wp(2u) , & \wp(2u) + \delta ; \\
\wp(3u) - \delta , & \wp(3u) , & \wp(3u) + \delta ; \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\wp(nu) - \delta , & \wp(nu) , & \wp(nu) + \delta .
\end{array}$$

$$\wp(2u) = \frac{n^2[(2k^2 - 2k + 1)^4 + 16k^2(2k^2 - 3k + 1)^2]^2}{16k^2(2k^2 - 1)^2(2k^2 - 2k + 1)^2(2k^2 - 4k + 1)^2} ;$$

$$\wp'(nu)^2 = 4\wp(nu)[\wp^2(nu) - d^2] ;$$

$$\wp(3u) = \wp(u) + \frac{\wp'(u) \cdot \wp'(2u)}{(\wp(2u) - \wp(u))^2} \qquad (l.\ c.,\ \text{p. } 470, 471, 143).$$

Exemples. A. $k=5$; $n=\frac{5}{6}$; d'où suit $2a=\left(\frac{41}{12}\right)^2$; $d=\delta=5$. (Léonard de Pise.)

$$a)\qquad \left(\frac{41}{12}\right)^2-5=\left(\frac{31}{12}\right)^2;\qquad \left(\frac{41}{12}\right)^2;\qquad \left(\frac{41}{12}\right)^2+5=\left(\frac{49}{12}\right)^2.$$

$$b)\qquad \frac{3\,344\,161^2}{24^2.31^2.41^2.49^2}-5=\frac{113\,279^2}{24^2.31^2.41^2.49^2};\qquad \left(\frac{3\,344\,161}{24.31.41.49}\right)^2;$$

$$\left(\frac{3\,344\,161}{24.31.41.49}\right)^2+5=\left(\frac{4\,728\,001}{24.31.41.49}\right)^2.\qquad \text{etc.}$$

B. $k=-1$, $n=-2$; d'où il suit $2a=25$; $d=\delta=-24$ (*Jahresbericht*, 25e année, 1916, p. 142-145).

$$a)\qquad 5^2-24=1^2;\qquad 5^2;\qquad 5^2+24=7^2.$$

$$b)\qquad \left(\frac{1201}{70}\right)^2-24=\left(\frac{1151}{70}\right)^2;\quad \left(\frac{1201}{70}\right)^2;\quad \left(\frac{1201}{70}\right)^2+24=\left(\frac{1249}{70}\right)^2.$$

$$c)\qquad \left(\frac{7\,776\,485}{1\,319\,901}\right)^2-24=\left(\frac{4\,319\,999}{1\,551.851}\right)^2;\qquad \left(\frac{7\,776\,485}{1\,319\,901}\right)^2;$$

$$\left(\frac{7\,776\,485}{1\,319\,901}\right)^2+24=\left(\frac{10\,113\,607}{1\,551.851}\right)^2.\qquad \text{etc.}$$

Dans le travail de M. Turrière on aurait

$x^4=\wp(3u)$, voir p. 316, (3) et $x_2^4=\wp(2u)$, voir p. 320, (10).

(D'après une lettre de M. Hæntzschel. *La Réd.*)

CHRONIQUE

Société mathématique suisse.

Réunion de Zurich, 30 mai 1917.

Les mathématiciens suisses ont tenu leur réunion de printemps à Zurich, le mercredi 30 mai 1917, sous la présidence de M. Marcel Grossmann, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale. La séance était consacrée à une conférence de M. Jacques Hadamard, membre de l'Institut, professeur au Collège de France et à l'Ecole polytechnique de Paris. Répondant à l'invitation qui lui a été adressée par le Comité de la Société mathématique suisse, le savant mathématicien a bien voulu, malgré les temps difficiles, se rendre à Zurich pour y exposer quelques résultats sur ses profondes recherches concernant « la notion de fonction analytique et les équations aux dérivées partielles ». La conférence eut lieu devant un nombreux auditoire composé de mathématiciens et d'étudiants en mathématiques de l'Ecole polytechnique et de l'Université de Zurich. Avec une remarquable clarté, le savant conférencier a su mettre en lumière les problèmes à la fois difficiles et délicats que présentent l'emploi et le rôle des fonctions analytiques.

Après les paroles de remerciements du président, M. le Prof. J. Franel a rappelé la place que prennent les travaux de M. Hadamard dans le développement des différentes branches mathématiques depuis près de vingt-cinq ans. Grâce à la tournure philosophique de son esprit, il a fourni d'importantes contributions à la connaissance approfondie des premiers principes de la science.

Société mathématique de Londres. — Médaille De Morgan.

La *London Mathematical Society* a conféré la *Médaille De Morgan* à M. le Prof. W. H. Young, F. R. S., pour l'ensemble de ses travaux. Cette distinction, qui est décernée tous les trois ans, a été attribuée autrefois à Cayley, Sylvester et Rayleigh. Les trois derniers lauréats ont été signalés dans cette Revue : Glaisher (1908), Lamb (1911), Larmor (1914).

BIBLIOGRAPHIE

Maxime Bôcher. — **Leçons sur les Méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes,** professées à la Sorbonne en 1913-1914, recueillies et rédigées par Gaston Julia. — 1 vol. gr. in-8° de vi-118 p. et 8 fig.; 5 fr.; Gauthier-Villars, Paris, 1917.

Ces *Leçons,* publiées dans la Collection de Monographies de M. Emile Borel, proviennent encore de l'enseignement donné en Sorbonne par un professeur étranger, américain cette fois, et appartenant plus particulièrement à la brillante Université Harward. La France s'est toujours félicitée de tels concours et de telles amitiés et point à tort semble-t-il; ce pays, qu'on accuse volontiers de légèreté et d'imprévoyance, n'a tout de même pas mal placé sa confiance en l'accordant à l'Angleterre et à l'Amérique.

Il est aussi fort intéressant de voir nos amis étrangers remettre en lumière le nom et les méthodes de Sturm alors qu'avec une modestie exagérée nous les aurions peut-être laissés s'effacer derrière les constructions plus modernes relatives aux équations intégrales.

Il me semble pouvoir situer, en bloc, les *Leçons* aujourd'hui publiées en y voyant surtout un développement des questions traitées par M. Emile Picard dans les chapitres V et VI du tome III de son *Traité d'Analyse* (seconde édition, pp. 88-128).

Partant de l'équation

$$u'' + pu' + qu = r \ ,$$

où p, q, r sont des fonctions quelconques de x, M. Bôcher montre, dans un premier chapitre, qu'il n'y a, en général, qu'une courbe intégrale passant par un point donné avec une pente donnée. Il étend la question au sens analytique, le plus général, du mot courbe. Il étudie notamment la constitution fonctionnelle de u par rapport à p, q, r et aux constantes γ et γ', introduites par l'intégration précitée.

Le chapitre II reprend l'étude de l'équation linéaire d'ordre quelconque, de l'équation adjointe de Lagrange et de la formule de Green les réunissant. Mais cet exposé classique est complété au jour d'une symétrie mise en parallèle avec celle de systèmes de formes algébriques bilinéaires.

Le chapitre III reprend l'équation du second ordre et cherche à préciser la position des zéros de ses solutions réelles. C'est le problème de M. E. Picard déjà mentionné. C'est également ici que réapparaissent les théorèmes de Sturm proprement dits sur la manière dont les solutions indépendantes séparent respectivement leurs zéros. Des théorèmes de ce genre peuvent s'étendre entre certaines combinaisons linéaires en u et u'. On peut étudier aussi la manière dont oscillent les solutions u connaissant les bornes des coefficients de l'équation.

Le chapitre IV étend ces théorèmes d'oscillation au cas des équations d'ordre quelconque.

Le chapitre V a trait aux fonctions de Green. Il fait surtout ressortir pour ces fonctions, ordinairement définies sous forme d'intégrales, un mode de symétrie analogue à celui étudié, au chapitre II, pour des combinaisons de formes différentielles.

Et c'est une chose fort curieuse que de voir les procédés algébriques de Sturm, concernant les séparations de racines, s'étendre ainsi dans la théorie des équations différentielles et remonter enfin jusqu'aux symétries des expressions fonctionnelles introduites dans la Science par la théorie des équations intégrales.

Ce livre contient de très nombreuses références bibliographiques ; si sa remarquable originalité de conception honore grandement son auteur, la rédaction n'honore pas moins M. Gaston Julia qui s'est acquitté d'une telle tâche avec un soin digne de tous éloges. A. Buhl (Toulouse).

R. C. Fawdry. — **Dynamics,** Part I. — 1 vol. cart. in-16, 187 p.; 3 sh; G. Bell and Sons, Londres.

Ce manuel fait partie de la collection « Bell's Mathematical Series for School and Colleges ». Faisant suite à la Statique, du même auteur, il fournit une première introduction à la Dynamique limitée aux notions essentielles que l'on enseigne généralement dans les écoles secondaires. Ces premiers éléments sont répartis comme suit :

Cinématique. — Chute des corps. — Les lois du mouvement. — Travail, puissance et énergie. — Le choc. — Composition des vitesses, des accélérations et des forces. — Vitesse relative. — Mouvement circulaire.

Par les nombreux exercices numériques qui accompagnent chaque chapitre, ce petit manuel constitue en même temps un excellent recueil de problèmes élémentaires de Dynamique. H. F.

R. Mehmke. — **Leitfaden zum graphischen Rechnen.** (Sammlung mathem.-physik. Lehrbücher.) — 1 vol. cart. in-16, 152 p., 4 M. 80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce *Précis de calcul graphique* est un résumé des leçons professées l'Ecole technique supérieure de Stuttgard. L'auteur se borne au calcul graphique proprement dit sans aborder les méthodes graphiques de la Nomographie. Il divise son exposé en deux parties. Dans la première il étudie le calcul ordinaire et la résolution graphique des équations, en ayant recours : *a)* aux échelles usuelles, *b)* aux échelles logarithmiques. Cette méthode logarithmique, due à M. Mehmke, sera étudiée avec beaucoup d'intérêt par tous ceux qui désirent suivre les progrès des procédés graphiques.

La seconde partie est consacrée à l'intégration et à la différentiation : Construction des courbes intégrales. Résolution des équations différentielles du 1er ordre ou d'ordre supérieur. Emploi d'échelles usuelles ou d'échelles logarithmiques.

Il n'est guère besoin d'ajouter que l'on retrouve dans cet opuscule les qualités de précision et de clarté qui caractérisent les travaux de M. Mehmke.

H. F.

R. de Montessus de Ballore. — **Leçons sur les fonctions elliptiques en vue de leurs applications.** Cours libre professé à la Faculté des Sciences de Paris. — 1 vol. gr. in-8° de x-268 p. et 23 fig.; 12 fr.; Paris, Gauthier-Villars, 1917.

On peut dire, d'une manière générale, que ces *Leçons* représentent une heureuse tentative de construction des fonctions elliptiques fondée surtout sur l'emploi du calcul algébrique. Le premier grand calcul fondamental est l'intégration de l'équation d'Euler d'où l'on peut tirer la formule d'addition pour *sn*. D'une manière plus précise, l'auteur en déduit les propriétés de $sn(u + iv)$ et notamment la double périodicité par comparaison avec des périodes respectives de $sn\,u$ et $sn\,iv$. La Première Partie de l'Ouvrage renferme aussi tout ce qui concerne la réduction des intégrales elliptiques, ce à quoi la transformation de Landen paraît naturellement rattachée. On sait que cette transformation rend possible l'étude d'intégrales elliptiques au moyen d'autres de même forme mais de modules différents : elle ne repose que sur un calcul très simple d'ailleurs présenté par J. Bertrand sous une élégante forme géométrique. Il est dans l'esprit du Livre non seulement de ne point dédaigner mais encore de rechercher de telles choses.

Avec une Seconde Partie nous abordons les fonctions de Weierstrass. Ici les intégrales elliptiques contiennent des radicaux portant sur le fameux polynome $4x^3 - g_2x - g_3$; des différences notables, portant tout au moins sur le maniement des fonctions inverses, s'observent suivant le signe du discriminant $\Delta = g_2^3 - 27g_3^2$. C'est ce que M. de Montessus fait ressortir par d'originales méthodes ; la formule d'addition de *pu* est tirée de celle de *sn* quand Δ est positif, de celle de *cn* quand Δ est négatif.

Une Troisième Partie fait appel aux généralités de la théorie des fonctions. Il est certain que ce sont ces généralités qui donnent encore les vues les plus claires sur l'inversion, surtout quand les singularités des intégrales sont situées de manière quelconque dans le champ complexe. De plus, les propriétés générales des fonctions entières et méromorphes trouvent, dans le domaine elliptique, de belles applications particulières. Un coup d'œil rapide en ces deux voies fondamentales s'est traduit ici par une exposition réduite et originale.

Enfin, dans une Quatrième Partie, nous venons aux fonctions θ, facilement présentées au moyen de celles de leurs propriétés qui permettent d'immédiats développements en séries. Il paraît ensuite naturel de revenir, par l'intermédiaire de ces fonctions θ, aux fonctions elliptiques déjà étudiées, notamment à *sn*, *cn*, *dn*.

Là encore, l'auteur a fait beaucoup de calculs ; l'ouvrage ne contient pas d'applications à proprement parler, mais il est éminemment propre à aboutir à celles-ci, s'efforçant de ne rien laisser dans l'ombre, même en ce qui concerne les difficultés arithmétiques. Il n'y a point là quelque promesse plus ou moins vaine. Rappelons que M. de Montessus est aussi l'auteur des *Exercices et Leçons de Mécanique analytique* publiés en 1915 et analysés, d'ailleurs, dans *L'Enseignement Mathématique* (1916, pp. 140-142 [1]). Ces *Exercices* ont été terminés par une exposition de la théorie des fonctions elliptiques particulièrement adaptée à la résolution des problèmes du Re-

[1] Je profite de ce rappel pour corriger une coquille assez agaçante. Dans l'article bibliographique cité, p. 141, ligne 16, au lieu de *prismes elliptiques*, il faut lire *formes elliptiques*.
A. B.

cueil. A beaucoup d'égards les *Leçons* d'aujourd'hui développent cet appendice ; l'auteur de celui-ci ne pouvait oublier maintenant ce qu'il avait si bien vu sous l'empire des nécessités d'ordre mécanique. Lui-même renvoie modestement, pour de telles applications, au Livre bien connu de P. Appell et E. Lacour. A coup sûr un tel renvoi ne saurait être méconnu, mais pour moi, qui ne suis point tenu à de telles considérations de modestie, je renverrai également aux *Exercices de Mécanique* de M. de Montessus quant à l'élégante et précieuse intervention des fonctions elliptiques dans la science analytique du mouvement et de la géométrie des masses.

A. Buhl (Toulouse).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

American Journal of Mathematics. — Vol. XXXVIII, N° 4. — H. Taber : Conditions for the Complete Reductibility of Groups of Linear Substitutions. — C.-H. Sisam : On Sextic Surfaces having a Nodal Curve of Order 8. — W.-D. Macmillan : A theorem connected with Irrational Numbers. — W.-B. Ford : On the Representation of Arbitrary Functions by Definite Integrals. — H.-R. Kingston : Metric Properties of Nets of Plane Curves. — H.-C. Gossard : On a special Elliptic Ruled Surface of the Ninth Order.

Vol. XXXIX, n° 1. — T. Fort : Linear Difference and Differential Equations. — W.-V. Lovitt : Some Singularities of a Contact Transformation. — D. Buchanan : Oscillations near an Isosceles-Triangle Solution of the Problem of Three Bodies as the Finite Masses Become Unequal. — L.-C. Cox : The Finite Groups of Birational Transformations of a Net of Cubics. — A.-E. Young : On the Determination of a Certain Class of Surfaces. — H. Hilton and Miss R.-E. Colomb : On Orthoptic and Isoptic Loci. — L.-B. Robinson : A New Canonical Form for Systems of Partial Differential Equations.

Archiv der Mathematik und Physik, Leipzig. — Band 25. — M. Pasch : Zusammenhänge in der Lehre von den Kegelschnitten. — F. Emde : Schwingungen und Vektoren. — W. Weber : Zur Geometrie des einfachen Vierecks. — G. Jaumann : Ueber Dyaden und Dyadenrechnung. — E. Lampe : Aufgaben über die aus den Gliedern einer ganzzahligen arithmetischen Progression gebildeten symmetrischen Grundfunktionen und über die Summen gleich hoher Potenzen dieser Glieder. — L. Berwald : Ueber einige Minimums-Sätze der Dreiecks- und Tetraedergeometrie. — P. Riebesell : Ueber die Integration der ballistischen Hauptgleichung bei Anwendung des Sommerfeldschen Luftwiderstandsgesetzes. — O. Danzer : Eine Abbildung allgemeiner Konchoiden auf Regelflächen. — E. Budde : Ueber Nablaprodukte. — M. Bauer : Zur Theorie der arithmetischen Progression. — G. Pick : Zur nichteuklidischen Geometrie. — J. Horn : Ueber nichtlineare Differenzengleichungen. — A. Horn : Ueber die Anwendung der Methode der sukzessiven Näherungen zur Lösung von linearen Integralgleichungen mit unsymmetrischen Kernen. — E. Landau : Neuer Beweis eines Hardys-

chen Satzes. — L. Lichtenstein : Zur konformen Abbildung einfach zusammenhängender schlichter Gebiete. — T. Vahlen : Beiträge zur Ballistik. — M. Pasch : Zerlegbare Kegelschnittsgleichungen. — A. Kempner : Ueber irreduzible Gleichungen, die unter ihren Wurzeln auch solche mit rationalem reellem Teil oder mit rationalem absolutem Betrag zulassen. — Id. : Bemerkung zu einem zahlentheoretischen Satz von Herrn Lind. — J.-A. Schouten : Ueber eine neue Theorie der Systeme direkter Rechnung und ihre Bedeutung für die mathematische Physik. — L. Guempel : Flüssigkeitsoberflächen unter dem Einfluss der Kohäsion u. Adhäsion. — K. Kommerell : Elementare Berechnung der Zahl π u. der trigonometrischen Funktionen. — Eug. Jahnke : Zur Einführung in die Dyadenrechnung.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Vol. XXV, 2me semestre 1916. — G. Andreoli : Sull'iternazione delle funzioni di variabili reali. — Id. : Sui nuclei periodici di Evans e la composizione di seconda specie. — Id. : Sulla risoluzione di certe equazioni di composizione di seconda specie. — Id. : Sulla soluzione generale di una classe di equazioni di composizione. — L. Berzolari : Sopra una classe di configurazioni di rette e di piani. — Id. : Proprietà caratteristiche della configurazione formata dalle rette e dai piani tritangenti di una superficie del terzo ordine. — Id. : Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni, e sulla configurazione di quindici cerchi dello spazio ordinario studiata dallo Stefanos. — L. Bianchi : Sopra un'interpretazione geometrica dei sistemi commutativi di numeri a più unità. — C. Burali-Forti : Sugli operatori differenziali omografici. — Id. : Ancora sulla definizione di coppie terne, ecc. — P. Burgatti : Sulle discontinuità delle funzioni scalari e vettoriali e delle loro derivate nel passaggio attraverso una superficie. — Id. : Sulle discontinuità delle funzioni e delle loro derivate attraverso una superficie. — E. Daniele : Sulle equazioni differenziali e le equazioni integro-differenziali correlative. — A. Del Re : Hamiltoniani e gradienti di formazioni estensive nell'analisi generale di Grassmann. — Id. : Proprietà generali degli hamiltoniani e dei gradienti nell'analisi ad n dimensioni di Grassmann. — Id. : Gli hamiltoniani ed i gradienti del prodotto di due funzioni estensive. — M. A. Molinari : Derivazioni ad indice qualunque. — J. Pérès : Sur la composition de première espèce. — Id. : Les fonctions d'ordre quelconque et leur composition. — G. Sannia : Deduzione geometrica dei metodi di approssimazione delle radici reali di una equazione. — F. Tricomi : Sull'iterazione delle funzioni di una variabile complessa. — A. Vergerio : Sulla derivazione per serie. — E. Almansi : La teoria delle distorsioni e le deformazioni finite dei solidi elastici. — Id. : Sulla teoria degli impulsi. — Id. : Sulla teoria delle distorsioni. — U. Crudeli : Sul moto traslatorio di un solido sferico in un liquido viscoso. — C. Del Lungo : Dimostrazione termodinamica della legge di Avogrado. — C. Somigliana : Sulla teoria delle distorsioni. Al prof. C. Almansi. — G. Armellini : Sopra la forma dello sferoide lunare. — G. Armellini : Osservazioni sopra una recente teoria della luce zodiacale. — Id. : Ricerche sopra le perturbazioni del satellite di Nettuno.

Bulletin of the American Mathematical Society, New-York. Vol. XXIII, Nos 1-6. E. B. van Vleck : Current tendencies of Mathematical Research. — G. A. Miller : Graphical Method of finding the possible Sets of Independent Generators of an Abelian Group. — C. N. Moore : On the Developments in Bessel's Functions. — W. E. Milne : Second Note on Removable Singula-

rities. — V. Snyder : The Cambridge Colloquium. — C. A. Fischer : Note on the Order of Continuity of Functions of Lines. — H. W. Richmond : The Equation of a plane Rational Curve defined by Parametric Equations. — L. E. Dickson : An Extension of the Theory of Numbers by Means of Correspondences between Fields. — H. S. Vandiver : Note on the Distribution of Quadratic Residues. — M. Morse : Proof of a General Theorem on the Linear Dependence of Analytic Functions of a Single Variable. — G. A. Pfeiffer : Note on the Linear Dependence of Analytic Functions. — G. M. Green : On the Linear Dependence of Functions of One Variable. — O. E. Glenn : Translation Surfaces Associated with Line Congruences. — J. H. Weaver : Pappus introductory Paper. — Virgil V. Snyder : Mathematics at an Italian Technical School. — F. N. Cole : The October Meeting of the American Mathematical Society. — M. W. Haskell : The Maximum Number of Cusps of an Algebraic Plane Curve, and Enumeration of Self-Dual Curves. — W. E. Milne : Note on Asymptotic Expressions in the Theory of Linear Differential Equations. — E. B. Wilson : On Notational Equivalence. — M. Frechet : On Pierpont's Integral. — J. Pierpont : A Reply to a Reply. — E. W. Brown : The Relations of Mathematics to the Natural Sciences. — A. Emch : A Theorem on the Curves Describes by a Spherical Pendulum. — R. L. Moore : A. Theorem Concerning Continuous Curves. — P. R. Rider : A Note in Discontinuous Solutions in the Calculus of Variations. — F. N. Cole : The Twenty-Third Annual Meeting of the American Mathematical Society. — E. V. Huntington : Complete Existential Theory of the Postulates for Serial Order. — E. V. Huntington : Complet Theory of the Postulates for Well Ordered Sets. — G. A. Miller : Groups Generated by Two Operators of the Same Prime Order Such that the Conjugates of One under then Powers of the Other are Commutative. — R. L. Borger : A. Theorem in the Analysis of Real Variables. — J. R. Kline : Concerning the Complement of a Countable Infinity of Point Sets of a Certain Type. — A. L. Miller : An Analogue to Pascal's Theorem.

2. Livres nouveaux :

H.-F. Blichfeldt. — **Finite Collineation Goups,** with an Introduction to the Theory of Groups of Operators and Substitution Groups. (The University of Chicago Science Serie). — 1 vol. in-16, 194 p., relié, 1 D. ; The University of Chicago Press, Ill.

G. Darboux. — **Principes de Géométrie analytique.** Cours de géométrie de la Faculté des Sciences de Paris. — 1 vol. gr. in-8°, 520 p., avec 27 fig., 20 fr. ; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

K. Merz. — **Zur Erkenntnisstheorie über Raum und Zahl,** aus Historischem der Steinerschen Fläche. — 1 fasc. in-8°. 48 p., 1 fr. ; Librairie Schuler, Coire.

P. Popovatz. — **Critique des propulseurs.** — 1 vol., p. in-8°, 131 p. ; Gauthiers-Villars & Cie, Paris.

J. Rey-Pastor. — **Teoria de la Representacio conforme.** (Publicacions de l'Institut de Ciencias). — 1 vol. in-8, 115 p., Institut d'Estudis Catalans, Barcelona.

A.-N. Whitehead. — **The Organisation of Thought,** Educational and Scientific. — 1 vol. in-8°, 228 p., 6 sh., Williams and Norgate, Londres.

REMARQUES SUR LA THÉORIE DES ENSEMBLES ET LES ANTINOMIES CANTORIENNES. — I.

PAR

D. MIRIMANOFF (Genève).

Introduction. Dans un travail récent, publié ici même[1], j'ai essayé de faire un rapprochement nouveau entre les antinomies cantoriennes les plus connues, celle de Russell et celle de Burali-Forti. Cette étude m'a amené à m'occuper d'un problème important, que j'ai appelé problème fondamental de la théorie des ensembles, et qui consiste à trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un ensemble d'éléments existe. Ce n'est qu'en m'appuyant sur plusieurs postulats que j'ai réussi à obtenir un critère pour une catégorie d'ensembles que j'ai appelés ensembles ordinaires.

Comme je l'ai fait remarquer à la fin de mon travail, ces postulats auraient besoin d'être examinés de près et discutés. Je compte le faire prochainement, mais cette discussion exige à son tour une étude préparatoire. Pour se rendre compte de la portée des postulats, il est utile de préciser et d'approfondir les notions en partie nouvelles que j'ai été amené à introduire dans mon travail. C'est ce que je vais essayer de faire dans ces premières remarques.

1. — Convenons de représenter un ensemble E dont les éléments sont a, b, c, ... par $(a, b, c, \ldots)$. Il y a deux choses à distinguer dans un ensemble : les éléments a, b, c, ... et

---

[1] *Ens. math.*, année 1917, p. 37 à 52.

l'opération de réunion ou d'association figurée par la parenthèse.

Dans ses *Neue Grundlagen der Logik, Arithmetik und Mengenlehre,* J. König distingue plusieurs sortes d'opérations d'association qu'on pourrait évidemment figurer par des parenthèses de formes différentes. J'ai fait abstraction de ces distinctions dans mon travail sur les antinomies.

Nous dirons donc qu'un ensemble E ne diffère pas d'un ensemble F, lorsque tout élément de E est un élément de F et réciproquement.

Soit a un élément d'un ensemble E. Deux cas peuvent se présenter : ou bien, par définition, l'élément a n'est pas un ensemble ; je dirai alors qu'il est indécomposable et je le désignerai par une minuscule ; ou bien l'élément a est à son tour un ensemble ; dans ce cas je le désignerai par une majuscule. Par exemple l'ensemble $E = (e, E')$ contient un élément indécomposable e et un élément-ensemble E'.

Si l'élément-ensemble E' contient deux éléments indécomposables f, g, et un élément-ensemble E'', on pourra écrire $E' = (f, g, E'')$, d'où $E = (e, (f, g, E''))$; de même E'' pourrait être représenté par une nouvelle parenthèse, et ainsi de suite. Pour mettre en évidence la composition des éléments d'un ensemble, on est conduit, comme on le voit, à introduire des parenthèses intérieures s'emboîtant les unes dans les autres.

En supprimant les parenthèses intérieures relatives à un ensemble E on obtient un ensemble nouveau qui ne doit pas être confondu avec l'ensemble E. Supposons par exemple que l'ensemble E contienne deux éléments F et G, tels que $F = (f_1, f_2)$; $G = (g_1, g_2, g_3)$, les f_i, g_i étant des indécomposables. On pourra écrire $E = (F, G) = ((f_1, f_2), (g_1, g_2, g_3))$.

En supprimant les parenthèses intérieures, on obtient l'ensemble $(f_1, f_2, g_1, g_2, g_3)$, que j'appellerai $\mathcal{E}$. Or aucun des éléments de $\mathcal{E}$ n'est un élément de E, et réciproquement ; du reste les ensembles E et $\mathcal{E}$ diffèrent entre eux non seulement par leurs éléments, mais par le nombre de ces éléments, puisque E n'en contient que deux tandis que $\mathcal{E}$ en contient cinq.

Comme l'ensemble $\mathcal{E}$ est la somme des ensembles F et G, supprimer les parenthèses revient ici à remplacer l'ensemble primitif E dont les éléments sont F et G par la somme des ensembles F et G.

2. — Deux notions m'ont été particulièrement utiles dans mon travail sur les antinomies : celle de descente et celle d'ensembles isomorphes.

En partant d'un ensemble E, parcourons une suite quelconque E, E′, E″, ..., où E′ est un élément de E, E″ un élément de E′, etc. Cette opération, que j'ai appelée *descente*, prend fin lorsqu'on tombe sur un terme indécomposable. Telles sont par exemple les descentes E, e ; E, E′, f dans l'exemple donné au commencement du n° précédent. J'appelle *noyaux* d'un ensemble E les termes indécomposables auxquels aboutissent les descentes finies de E. Un noyau de E n'est pas nécessairement un élément de E. Par exemple dans le cas de l'ensemble E = (F, G), que j'ai défini à la fin du n° précédent, aucun des noyaux f, g ne figure parmi les éléments de E. Je désigne par N l'ensemble (e, f, ...) de tous les noyaux distincts. Le nombre de ces noyaux peut être égal à 1. Tel est par exemple l'ensemble (e, (e)) dont l'un des éléments est l'ensemble singulier (e).

Lorsque toutes les descentes d'un ensemble E sont finies, je dis que E est un ensemble ordinaire.

Je passe maintenant à la notion d'isomorphisme. Cette notion peut être définie par récurrence. Je dirai que deux ensembles E et F sont isomorphes, s'il est possible d'établir entre les éléments de E et ceux de F une correspondance parfaite, telle qu'à un élément indécomposable de E corresponde un élément indécomposable de F, et à un élément ensemble E′ de E, un élément ensemble isomorphe F′ de F, et réciproquement. Deux ensembles isomorphes différents ne diffèrent que par les noyaux et non par les opérations d'association ou de réunion figurées par les parenthèses.

Ce qui est commun par conséquent aux ensembles isomorphes c'est leur structure ou le mode de leur composition. Si l'on fait abstraction des propriétés particulières qui distinguent un ensemble de ses isomorphes, si l'on ne retient que

les particularités de sa structure, on arrive à un concept nouveau qu'on pourrait appeler type de structure de cet ensemble, concept étroitement lié aux notions de puissance, et de nombres ordinaux de Cantor ; il se confond en effet avec la notion de puissance, ou de nombre cardinal, lorsqu'on fait abstraction de la structure des éléments de l'ensemble, ce qui revient à regarder ces éléments comme des indécomposables ; et d'autre part les types d'ordre des ensembles bien ordonnés, ou les nombres ordinaux de Cantor, dérivent directement des types de structure de certains ensembles particuliers que j'ai appelés ensembles S.

3. — *Ensembles de 1re et 2de sorte.* Conformément à Russell, je dis qu'un ensemble E est de 1re sorte, s'il diffère de chacun de ses éléments ; il est au contraire de 2e sorte, s'il contient un élément au moins qui ne diffère pas de E. En modifiant légèrement cette définition, nous dirons qu'un ensemble est de 1re sorte au sens nouveau, s'il n'est isomorphe à aucun de ses éléments, et nous dirons qu'il est de 2e sorte au sens nouveau, s'il est isomorphe à l'un au moins de ses éléments (cf. le n° 2 de mon travail cité). Il résulte de cette définition qu'un ensemble ordinaire est toujours de 1re sorte.

Je rappelle l'exemple d'un ensemble de 2e sorte au sens nouveau que j'ai donné dans mon travail (p. 41). Supposons qu'un ensemble E contienne deux éléments : un élément indécomposable e et un élément-ensemble E′ de la forme (e', E''), où $E'' = (e'', E''')$, et en général $E^{(n)} = (e^{(n)}, E^{(n+1)})$ pour tout n. On voit immédiatement que l'ensemble E est isomorphe à E′; il est donc bien de 2e sorte au sens nouveau.

Si en particulier aucun des noyaux e', e'', ... $e^{(n)}$, ... n'était différent de e, l'ensemble E pourrait être regardé comme un ensemble de 2e sorte au sens de Russell.

Autre exemple d'un ensemble de 2e sorte au sens nouveau. Je me rappelle avoir vu il y a quelques années un livre pour enfants dont la couverture était ornée d'une grande image en couleurs. Cette image que j'appellerai J représentait deux enfants admirant le livre même dont je parle ou plutôt son image, c'est-à-dire l'image J′ de l'image J. Sur cette image

J′ on apercevait, on devinait plutôt, les deux enfants en petit et l'image du livre déformés par la perspective. Tout cela devait théoriquement continuer à l'infini. Or, l'image primitive J peut être considérée comme un ensemble dont les éléments sont les enfants e_1, e_2, l'entourage f et l'image J′ de J, se décomposant à son tour en e'_1, e'_2, f' et J″, etc. Si donc l'on convient de regarder les éléments e_1, e_2, f et leurs transformés comme des indécomposables, l'isomorphisme de J et de J′ est manifeste, et l'image J possède bien, au point de vue où je me place, les propriétés caractéristiques d'un ensemble de 2e sorte au sens nouveau.

Ensembles bien ordonnés et ensembles S.

4. — J'ai fait voir dans le n° 5 de mon travail sur les antinomies qu'en partant d'un nombre ordinal quelconque α de Cantor on pouvait former un ensemble ordinaire σ_s à un noyau dont la structure dérive directement des relations d'ordre définissant le nombre α et que j'ai appelé ensemble S. Une correspondance parfaite peut être établie de cette manière entre les nombres ordinaux de Cantor et les ensembles S ainsi formés. Soient α et β deux nombres ordinaux de Cantor; si α est inférieur à β, l'ensemble α_s est un élément de l'ensemble β_s.

Je crois utile de compléter maintenant les indications que j'ai données au n° 5.

Rappelons d'abord que les nombres ordinaux de Cantor sont les types d'ordre d'ensembles bien ordonnés.

Soit $E = (a, b, c, \ldots)$, un ensemble bien ordonné dont le premier élément est a, le second b, le troisième c, etc.

En remplaçant a, b, c, ... par des éléments nouveaux quelconques a', b', c', ... on obtient un ensemble E′ qui diffère de E, mais dont le type d'ordre est le même, pourvu que les relations d'ordre n'aient pas changé, c'est-à-dire par exemple que a', b', c', ... soient respectivement le premier, le second, le troisième élément de E′, etc. Je rappelle que l'ensemble E′ est dit semblable à E. Pour arriver à la notion du type d'ordre, ou nombre ordinal α, correspondant à E, nous devons faire abstraction des propriétés particulières des éléments a, b, c, ... et ne tenir compte que des relations

d'ordre telles que « a précède b », « b précède c », etc. Peu importe par conséquent que les éléments a, b, c, ... soient des points, des corps, des symboles... Supposons en particulier que ces éléments soient des ensembles A, B, C, ... Cherchons à définir ces ensembles de telle manière que leur structure dérive directement des relations d'ordre des éléments correspondants a, b, c, ... Il suffit pour cela de remplacer les mots « précède » ou « est précédé de » par les mots « est un élément de » et « contient ».

Quelle sera alors par exemple la structure de A ? L'élément correspondant a n'étant « précédé » d'aucun autre élément, A ne doit « contenir » aucun élément ; c'est donc un *indécomposable* ou un noyau, que je désignerai par e. De même l'élément b n'étant précédé que de l'élément a, B est un ensemble qui ne contient qu'un seul élément : le noyau e. Donc $B = (e)$. On verra de même que C doit être de la forme $(e, (e))$, etc.

On pourra définir ainsi de proche en proche les éléments suivants D, F, ... de l'ensemble nouveau, qui n'est autre que l'ensemble S correspondant à E.

Par cette transformation les propriétés particulières des éléments de l'ensemble initial E ont été éliminées ; seules les relations d'ordre apparaissent dans la structure de l'ensemble transformé.

A tous les ensembles bien ordonnés du type α correspond un ensemble S (ou plus exactement un type de structure α_s) déterminé, car je suppose qu'on fait abstraction des propriétés particulières du noyau e. Et réciproquement, à tout ensemble S (son type de structure) correspond un nombre ordinal α déterminé.

5. — Comme je l'ai fait remarquer dans le n° 6 de mon travail, on peut édifier la théorie des ensembles S en s'appuyant uniquement sur les propriétés suivantes, qu'il faut alors regarder comme une définition de ces ensembles.

1. Un ensemble S est un ensemble ordinaire à un noyau (le noyau e).

2. Si x et y sont deux éléments d'un ensemble S, l'un deux est un élément de l'autre.

3. Si E est un ensemble S, et si x est un élément de E, tout élément de x est un élément de E.

Indiquons les propriétés les plus importantes des ensembles S qui découlent de cette définition :

a) Si x et y sont deux éléments d'un ensemble S, on ne saurait avoir à la fois « x est un élément de y » et « y est un élément de x ».

En effet, tout ensemble E dont les éléments x, y sont liés par des relations ce cette forme, possède la descente E, x, y, x, ..., dans laquelle les termes x, y, se succèdent périodiquement. Cette descente étant infinie, l'ensemble E ne saurait être un ensemble S.

b) Soit E, E′, ... $E^{(n)}$, e une descente quelconque de E. Je dis que tous les termes de cette descente sont des éléments de E. En effet, en vertu de la propriété 3, cela est vrai de E″ et par suite, en vertu de la même propriété, de $E^{(3)}$ $E^{(4)}$, etc. En particulier le noyau e est un élément de E.

Il en résulte que tout ensemble S contient un élément indécomposable, le noyau e.

c) Tout élément E′ de E est un ensemble S.

Il est évident d'abord que E′ est un ensemble ordinaire à un seul noyau (le noyau e).

Soient maintenant x', y' deux éléments de E′. En vertu de la propriété 3, x', y' sont des éléments de E ; donc, en vertu de 2, l'un d'eux (x' par exemple) est un élément de l'autre (de y'). Par conséquent E′ possède les propriétés 1 et 2.

Soit maintenant x'' un élément de x'. En vertu de la propriété *b)*, x'' est un élément de E. Donc, en vertu de 2, x'' est un élément de E′, à moins que E′ ne soit un élément de de x'', mais cette dernière hypothèse est à rejeter, car elle entraînerait une descente infinie. Donc x'' est un élément de E′ et par conséquent E′ possède les trois propriétés caractéristiques des ensembles S.

d) Soit $\mathcal{E}$ un sous-ensemble de E. Il est évident que $\mathcal{E}$ possède les propriétés 1 et 2.

Supposons de plus que l'ensemble $\mathcal{E}$ possède aussi la propriété 3 et qu'il diffère de E. Je dis que $\mathcal{E}$ figure alors parmi les éléments de E.

En effet soit E′ un élément de E qui n'appartient pas à $\mathcal{E}$; en vertu de 2 et 3, tous les éléments de $\mathcal{E}$ sont contenus dans E′. Par conséquent $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble de E′. Si $\mathcal{E}$ diffère de E′, on conclura de même que l'ensemble $\mathcal{E}$ est un sous-ensemble d'un élément E″ de E′, etc. Comme la descente E, E′, E″, ... est finie, on tombera finalement sur un terme $E^{(n)}$ égal à $\mathcal{E}$. Or, en vertu de la propriété *b)* $E^{(n)}$ est un élément de E.

Donc $\mathcal{E}$ est un élément de E, si $\mathcal{E}$ diffère de E.

On en déduit la propriété suivante que j'ai déjà énoncée dans le paragraphe précédent :

Théorème. Etant donnés deux ensembles S de même noyau e, ou bien ils sont égaux, ou bien l'un est un élément de l'autre.

Soient E et F deux ensembles S de même noyau e, et supposons que E diffère de F. Je dis que l'un de ces ensembles est un élément de l'autre.

Désignons par $\mathcal{E}$ l'ensemble de *tous* les éléments communs à E et F. Soit d'autre part x un élément quelconque de $\mathcal{E}$ et x' un élément quelconque de x. En vertu de 3, x' est à la fois un élément de E et un élément de F. Par conséquent x' est un élément de $\mathcal{E}$. Il en résulte que l'ensemble $\mathcal{E}$ possède la propriété 3.

Donc, en vertu de *d)*, $\mathcal{E}$ est un élément de E, si $\mathcal{E}$ diffère de E et pour la même raison $\mathcal{E}$ est un élément de F, si $\mathcal{E}$ diffère de F.

D'ailleurs $\mathcal{E}$ ne peut pas être à la fois élément de E et de F, puisque, par définition, $\mathcal{E}$ est l'ensemble de tous les éléments communs à E et F. Par conséquent $\mathcal{E}$ se confond avec l'un des ensembles E, F, par exemple avec E, et alors E est un élément de F ; c. q. f. d.

L'analogie entre les ensembles S et les ensembles bien ordonnés est manifeste ; ce qui était à prevoir.

En particulier, le théorème que nous venons de démontrer est l'analogue du théorème suivant de Cantor : Etant donnés deux ensembles bien ordonnés, ou bien ils sont semblables ou bien l'un est semblable à un segment de l'autre.

Du reste, il résulte immédiatement des propriétés 1, 2, 3

qu'à tout ensemble S correspond un nombre ordinal déterminé ; en effet tout ensemble S peut être bien ordonné ; il suffit pour cela de traduire les relations « x est un élément de y », où x et y sont deux éléments quelconques de l'ensemble, par les relations d'ordre « x précède y ». On obtient ainsi un type d'ordre déterminé que dans mon travail sur les antinomies j'ai appelé rang de l'ensemble S. En posant le rang du noyau e égal à zéro, on voit immédiatement que le rang d'un ensemble S est le plus petit nombre ordinal supérieur aux rangs de ses éléments.

L'analogie que je viens de souligner permet de ramener la théorie des ensembles bien ordonnés à celle des ensembles S. Je ne sais si cette méthode détournée présente des avantages réels. En tout cas la théorie classique de Cantor apparait ainsi sous un aspect nouveau. L'essentiel pour nous c'est que les relations d'ordre, au lieu d'être des étiquettes artificielles, se trouvent en quelque sorte incorporées aux éléments de l'ensemble, puisque le rang de chacun d'eux est déterminé par la structure de l'élément. Aux nombres ordinaux de Cantor correspondent dans cette théorie les types de structure des ensembles S.

Dans l'étude suivante, je m'occuperai plus particulièrement des antinomies cantoriennes.

DÉCOMPOSITION DES SEGMENTS DE DROITE EN PARTIES ÉGALES [1]

PAR

Emile DUMONT (Bruxelles).

---

1. — DÉFINITIONS. — On appelle *suite croissante de segments* une succession de segments tels, que chacun à partir du second est supérieur ou égal au précédent. Considérée dans l'ordre inverse, la *suite* est dite *décroissante*.

Lorsqu'à partir d'un certain rang tous les segments d'une suite sont égaux, la *suite* est dite *finie ;* le segment à partir duquel l'égalité est définitive est dit le *dernier* de la suite.

Une *suite* de segments est dite *infinie* si après chacun d'eux il y a au moins un segment plus grand ou plus petit que lui, c'est-à-dire si aucun segment ne peut être dit « le dernier ».

Une suite de segments

$$G_1 , G_2 , G_3 , \ldots , G_n , \ldots$$

est *déterminée* si l'on peut connaître le $n^{\text{ième}}$ segment G_n quand on connaît l'entier n, quel que soit celui-ci.

2. — LIMITES. — On dit, d'une suite infinie de segments, qu'elle *croît sans limite* lorsqu'à partir d'un certain rang, ces segments sont définitivement plus grands qu'un segment A choisi arbitrairement grand.

3. — On dit d'une suite de segments qu'elle *a pour limite zéro* lorsqu'à partir d'un certain rang ces segments sont

---

[1] La théorie que l'on va lire suppose connue la théorie des nombres entiers. Elle se place logiquement en tête de la théorie des fonctions, dans un cours d'Arithmétique métrique (voir *Scientia*, n° 35).

définitivement moindres qu'un segment α choisi arbitrairement petit.

4. — On dit d'une suite de segments qu'elle *a pour limite un segment déterminé* L lorsque la suite des différences entre L et ces segments a pour limite zéro.

Pour qu'il en soit ainsi il faut et il suffit évidemment que, choisissant un segment α arbitrairement petit, on ait définitivement, à partir d'un certain rang,

$$L - \alpha < G_n < L + \alpha .$$

5. — Segment variable. — Considérons, sur une demi-droite Od, des segments

$$OA_1 = G_1 , \quad OA_2 = G_2 , \ldots . \quad OA_n = G_n , \ldots$$

Imaginons un point mobile M parcourant successivement les segments

$$A_1A_2 , A_2A_3 , \ldots , A_{n-1}A_n , \ldots$$

Le segment OM, dont l'origine O est fixe et l'extrémité M mobile, est appelé un segment *variable*. On peut d'ailleurs se libérer du point O, et imaginer un segment variable G, constamment égal à OM.

Les segments de la suite

$$G_1 , G_2 , G_3 , \ldots , G_n , \ldots$$

peuvent être considérés comme des états particuliers successifs que prend le segment variable G au cours de sa variation, et l'on peut simplifier le langage en raisonnant sur ce segment variable plutôt que sur les segments de la suite considérée.

Ainsi l'on dira respectivement, dans les trois cas décrits aux n°s 2, 3, 4, que le segment variable G croît sans limite, a pour limite zéro, ou a pour limite le segment L.

On écrira

$$G \to \infty ,$$

$$G \to 0 , \quad \text{ou} \quad \lim G = 0 ,$$

$$G \to L , \quad \text{ou} \quad \lim G = L .$$

Un segment que l'on ne fait pas varier est dit « constant ».

6. — Théorème. — *Un segment variable ne peut* simultanément

1° *Admettre pour limites deux segments différents ;*

2° *Admettre pour limites un segment déterminé et zéro ;*

3° *Admettre pour limite un segment déterminé et croître sans limite ;*

4° *Avoir pour limite zéro et croître sans limite.*

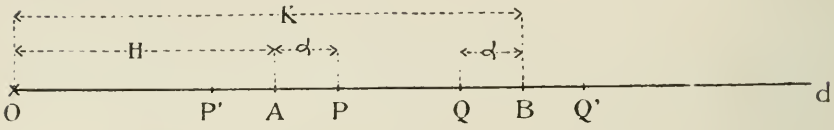


Fig. 1.

Soit G un segment variable. Supposons qu'il puisse avoir simultanément pour limites deux segments différents H et K.

Sur une demi-droite O*d* prenons

$$OA = H\ , \qquad OB = K\ , \qquad \text{et} \qquad OM = G\ .$$

Décomposons AB en deux parties dont α soit la plus petite ; on aura

$$AB > 2\alpha\ .$$

D'où, prenant

$$OP = OA + \alpha \qquad \text{et} \qquad OQ = OB - \alpha\ ,$$

$$OP' = OA - \alpha \qquad \text{et} \qquad OQ' = OB + \alpha\ ,$$

on aura

$$AB = AP + PQ + QB\ .$$

Si notre hypothèse de deux limites différentes pour G était admissible, G devrait pouvoir satisfaire simultanément aux conditions

$$H - \alpha < G < H + \alpha\ , \qquad \text{et} \qquad K - \alpha < G < K + \alpha\ ,$$

ou

$$OP' < OM < OP \qquad \text{et} \qquad OQ < OM < OQ'\ .$$

Or, par le choix que nous avons fait de α, nous avons

$$OP < OQ\ .$$

On ne peut donc pas avoir simultanément

$$OM < OP < OQ < OM .$$

Un raisonnement analogue montrera l'incompatibilité des hypothèses énoncées aux 2°, 3° et 4° du théorème.

7. — Remarque. — Quand un segment variable est croissant :

1° ou bien il n'existe pas de segment qu'il ne puisse surpasser définitivement ; dans ce cas on sait que le segment variable croît sans limite (n° 5) ;

2° ou bien il existe au moins un segment H qu'il ne peut surpasser ; on va démontrer que dans ce cas il existe un segment déterminé, limite du segment croissant considéré.

8. Théorème. — *Si un segment variable* G *est croissant à partir d'un état initial* G_0, *sans pouvoir surpasser un segment donné* H, *il admet une limite* L, *inférieure ou égale à* H.

Considérons sur une demi-droite O*d* des segments

$$OI = G_0 , \qquad OB = H , \qquad OM = G .$$

Désignons, d'une façon générale, par A tout point que le point mobile M peut atteindre et par conséquent dépasser sur le segment IB. [Remarquons qu'il n'y a évidemment pas de point A plus éloigné de O que tous les autres, puisque, le segment OM étant croissant, le point M peut dépasser tout point A]. A cause de l'hypothèse le point B ne peut pas être dépassé par le point M ; il ne peut donc pas non plus être atteint par ce point mobile.

Deux cas sont maintenant à examiner :

Premier cas. — S'il n'y a entre I et B aucun point que M ne puisse atteindre, tout point compris entre I et B est un point A. Alors, quelque petit que l'on choisisse un segment α, en prenant

$$OA = H - \alpha$$

on pourra prendre définitivement

$$OA < OM < OB \qquad \text{ou} \qquad H - \alpha < G < H$$

et par conséquent

$$H - G < \alpha \qquad \text{d'où} \qquad H = \lim G .$$

Second cas. — S'il y a entre I et B au moins un point N que M ne peut atteindre, alors tout point du segment NB est dans le même cas. Désignons d'une façon générale par N tout point du segment IB que M ne peut atteindre. On observera que tout point de IB doit être évidemment soit un point A (comme I), soit un point N (comme B); et aucun point A ne peut se trouver à droite d'un point N.

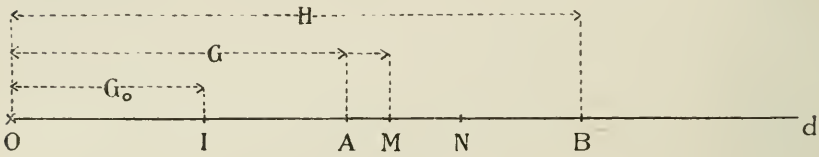


Fig. 2.

Il en résulte que le segment IB se trouve partagé en deux parties : le lieu géométrique des points N et le lieu géométrique des points A ; parties qui, d'une part ne chevauchent pas, et d'autre part englobent tous les points de IB.

Le partage de IB en deux parties répondant à ces deux conditions ne peut se faire qu'au moyen d'un point C [1].

Tout point compris entre C et I est un point A, et tout point compris entre C et B est un point N ; quant au point C lui-même, s'il était un point A, il y aurait des points A entre C et B ce qui n'est pas ; le point C est donc un point N ; et il joue donc dans ce deuxième cas le même rôle que le point B jouait dans le premier cas. Par conséquent on peut lui appliquer la conclusion obtenue dans ce cas et posant OC = L, on aura

$$OC = \lim OM \qquad \text{ou} \qquad L = \lim G < H \ .$$

[1] Le lecteur qui ne considérerait pas l'existence du point C comme *démontrée* par mon raisonnement est prié de l'admettre à titre de *postulat*, à l'exemple de plusieurs auteurs. Ainsi, Dedekind énonce les deux postulats suivants :

1° Entre deux points d'une ligne il y a toujours au moins un point intermédiaire ;

2° Si une ligne est divisée en deux parties (classes de points) de telle façon que :

a) chaque point de la ligne appartienne à l'une ou à l'autre de ces parties ;

b) chaque point de la première partie précède (dans un sens donné de la ligne) chaque point de la seconde ;

il existe alors un *point de séparation* qui ne suit aucun point de la première partie et que ne précède aucun point de la seconde.

9. — Remarque. — Quand un segment variable est décroissant : 1° ou bien il n'existe pas de segment tel que le segment variable ne puisse devenir (définitivement) moindre que lui.

On sait que dans ce cas on dit que le segment variable a pour limite zéro.

2° Ou bien il existe au moins un segment tel que le segment variable ne puisse pas devenir moindre que lui.

On démontre par le même raisonnement qu'au n° 8 que dans ce cas il existe un segment déterminé, limite du segment décroissant considéré.

10. — Théorème. — *Lorsqu'un segment variable est constamment compris entre deux autres variables qui ont une même limite, le segment intermédiaire a la même limite.*

Considérons les trois segments variables G, H et K, vérifiant constamment les conditions :

$$H < G < K$$

et soit

$$L = \lim H = \lim K \ .$$

Je dis qu'on a aussi

$$L = \lim G \ .$$

Il suffit de prouver que, choisissant un segment α arbitrairement petit, on peut amener G à satisfaire définitivement aux conditions $L - \alpha < G < L + \alpha$.

Or on peut amener H et K à satisfaire définitivement et simultanément à ces conditions ; et quand on a simultanément et définitivement

$$L - \alpha < H < L + \alpha \ , \quad L - \alpha < K < L + \alpha \ , \quad \text{et} \quad H < G < K \ ,$$

on en déduit

$$L - \alpha < H < G < K < L + \alpha \ . \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

11. — Corollaire. — *Lorsqu'un segment variable est constamment compris entre un autre segment variable et un segment constant, limite de celui-ci, il a la même limite.*

12. — Théorème. — *Si deux segments variables ont simultanément chacun une limite, leur somme et leur différence ont*

des limites respectivement égales à la somme et à la différence des limites des variables.

Soient G et H deux segments variables ayant respectivement pour limites K et L.

1° Je dis que G + H a une limite égale à K + L.

Soit α un segment aussi petit que nous voulons. Décomposons α en deux parties β et γ.

Je puis amener G et H à satisfaire simultanément et définitivement aux conditions

$$K - \beta < G < K + \beta , \qquad L - \gamma < H < L + \gamma .$$

D'où en même temps et définitivement

$$(K + L) - \alpha < G + H < (K + L) + \alpha .$$

Donc on a

$$K + L = \lim (G + H) = \lim G + \lim H .$$

2° Je dis que la différence entre G et H a une limite égale à K — L (en supposant K > L).

Choisissons un segment α aussi petit que nous voulons, et moindre que K — L. Décomposons-le en deux parties β et γ.

Nous aurons

$$\beta + \gamma < K - L \qquad \text{d'où} \qquad L + \gamma < K - \beta .$$

Nous pouvons amener G et H à satisfaire simultanément et définitivement aux conditions

$$L - \gamma < H < L + \gamma < K - \beta < G < K + \beta ,$$

d'où

$$(K - L) - (\beta + \gamma) < G - H < (K - L) + (\beta + \gamma) .$$

ou

$$(K - L) - \alpha < G - H < (K - L) + \alpha .$$

Donc on a

$$K - L = \lim (G - H) = \lim G - \lim H .$$

13. — Corollaire. — *Si* G *est un segment variable admettant une limite, et si* n *est un nombre entier déterminé, on a*

$$n \lim G = \lim (nG) .$$

14. — Théorème. — *Si un segment variable* G *a pour limite*

zéro, et si n *est un nombre entier déterminé, le segment* nG *a aussi pour limite zéro.*

En effet, soit α un segment aussi petit que nous voulons ; décomposons-le en n parties quelconques, dont la plus petite soit β.

On a donc $n\beta < \alpha$.

Nous pouvons par hypothèse amener G à satisfaire définitivement à la condition

$$G < \beta ,$$

d'où, définitivement aussi,

$$nG < n\beta < \alpha ,$$

ou

$$\lim_{G \to 0} (nG) = 0 .$$

15. — Théorème. — *Les multiples successifs*

$$A , 2A , 3A , \ldots nA , \ldots$$

d'un segment constant A, *forment une suite infinie croissant sans limite, quelque petit que soit* A [1].

En effet, la suite considérée est évidemment croissante. Si elle ne croissait pas sans limite, nous savons qu'elle aurait une limite L supérieure à tous les segments de la suite ; donc, choisissant un segment arbitrairement petit, par exemple A lui-même, on pourrait prendre n assez grand pour que l'on ait définitivement n A compris entre L et L — A :

$$L - A < nA < L \qquad \text{d'où} \qquad L < (n + 1)A .$$

Donc le segment $(n + 1)$ A ainsi que tous les suivants seraient supérieurs à L et non tous moindres que L.

Cette conclusion étant incompatible avec l'hypothèse que L soit supérieur à tous les segments de la suite considérée, celle-ci n'a donc pas de limite, et par conséquent elle croît sans limite (7).

---

[1] Ce théorème n'est autre que la proposition admise souvent sans démonstration sous le nom de *Postulat d'Archimède.*

16. — Théorème. — *Si l'on considère une suite infinie de segments*

$$\Delta_0 , \Delta_1 , \Delta_2 , \Delta_3 , \ldots$$

satisfaisant à la condition générale

$$\Delta_{m-1} > n \Delta_m$$

dans laquelle n *est un nombre entier déterminé, la suite infinie considérée a pour limite zéro.*

Choisissons un segment α arbitrairement petit, et moindre que Δ_0. Le théorème revient à démontrer qu'il existe dans la suite *décroissante*

$$\Delta_0 , \Delta_1 , \Delta_2 , \ldots$$

un segment moindre que α, quelque petit que soit celui-ci Les conditions

$$\begin{aligned} &\Delta_0 > n \Delta_1 , \\ &\Delta_1 > n \Delta_2 , \\ &\ldots \\ &\Delta_{m-1} > n \Delta_m , \end{aligned}$$

donnent

$$\Delta_0 > n \Delta_1 > n^2 \Delta_2 > n^3 \Delta_3 > \ldots > n^m \Delta_m ,$$

d'où

$$\Delta_0 > n^m \Delta^m ,$$

relation qui est vérifiée quel que soit m.

Quelque petit que soit le segment α, nous savons que la suite infinie

$$\alpha , 2\alpha , 3\alpha , \ldots , n\alpha , \ldots , n^2\alpha , \ldots , n^m\alpha , \ldots$$

croît sans limite ; il en est donc de même a fortiori de la suite

$$n\alpha , n^2\alpha , n^3\alpha , \ldots , n^m\alpha , \ldots$$

Les termes de cette dernière suite arrivent donc à surpasser Δ_0 ; soit par exemple

$$n^p \alpha > \Delta_0$$

en même temps que

$$\Delta_0 > n^p \Delta_p .$$

Comparant ces deux relations, on en déduit

$$n^p \alpha > n^p \Delta_p \qquad \text{ou} \qquad \Delta_p < \alpha \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

17. — Théorème. — *Tout segment est décomposable en un nombre arbitraire de parties égales.*

Considérons un segment arbitraire G et un nombre entier n ; je dis qu'il existe un segment H tel que l'on ait

$$G = nH .$$

Prenons sur une demi-droite Od

$$OA = G .$$

Décomposons OA en n parties quelconques, et soient OB'_1 et OB''_1 deux segments respectivement égaux à la plus petite et à la plus grande de ces n parties. Soient

$$n . OB'_1 = OA'_1 . \qquad nOB''_1 = AO''_1 .$$

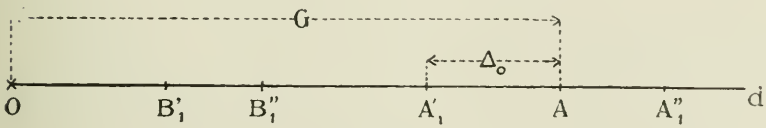


Fig. 3.

on aura évidemment

$$OA'_1 < OA < OA''_1 .$$

Posons

$$A'_1 A = \Delta_0 ,$$

et décomposons Δ_0 en n parties quelconques dont la plus petite soit Δ_1 ; on a alors

$$\Delta_0 > n\Delta_1 .$$

Comparons Δ_0 ou $A'_1 A$ aux multiples successifs de $n\Delta_1$. Nous savons (n° 15) qu'il existe un premier multiple de $n\Delta_1$ plus grand que $A'_1 A$; soit

$$(m + 1)(n\Delta_1)$$

ce segment, m désignant un certain nombre entier supérieur ou égal à 1.

Le multiple précédent, c'est-à-dire $m\,(n\Delta_1)$, peut ou bien être égal à A'_1A, ou bien être moindre que lui (on sait que $n\Delta_1$ est moindre que A'_1A).

Dans le *premier cas*, on aura

$$A'_1A = m(n\Delta_1) = n(m\Delta_1)\ .$$

On a vu qu'on a aussi

$$OA'_1 = nOB'_1\ ;$$

ajoutant membre à membre on obtient

$$OA = n(OB'_1 + m\Delta_1)\ , \qquad \text{ou} \qquad G = nH$$

en posant

$$OB'_1 + m\Delta_1 = H\ .$$

Dans le *second cas* on aura

$$m(n\Delta_1) < A'_1A < (m+1)(n\Delta_1)\ ;$$

d'où ajoutant

$$OA'_1 = nOB'_1$$

on obtient

$$n[OB'_1 + m\Delta_1] < OA < n[OB'_1 + (m+1)\Delta_1]$$

inégalités d'où l'on déduit

$$OA - n[OB'_1 + m\Delta_1] < n\Delta_1\ .$$

Posant

$$OB'_1 + m\Delta_1 = OB'_2 > OB'_1$$

et

$$n[OB'_1 + m\Delta_1] = nOB'_2 = OA'_2 > nOB'_1 = OA'_1$$

et remarquant que, des inégalités

$$OA'_2 < OA < OA''_1 \qquad \text{d'où} \qquad nOB'_2 < nOB''_1$$

on déduit

$$OB'_2 < OB''_1\ .$$

ces relations deviennent

$$OA'_1 < OA'_2 < OA \ , \qquad \text{avec} \qquad OA - OA'_2 = A'_2A < n\Delta_1$$

et

$$OB'_1 < OB'_2 < OB''_1 \ .$$

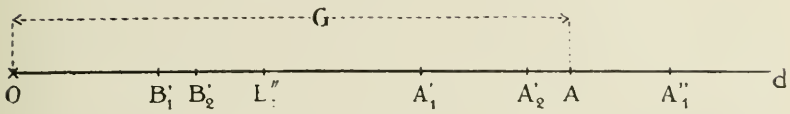


Fig. 4.

Considérons maintenant le plus petit des deux segments

$$\Delta_1 \qquad \text{et} \qquad A'_2A$$

et décomposons-le en n parties arbitraires dont la plus petite soit Δ_2 ; on a alors simultanément

$$\Delta_1 > n\Delta_2 \qquad \text{et} \qquad A'_2A > n\Delta_2 \ .$$

Comparons le segment A'_2A aux multiples successifs de $n\Delta_2$, comme nous avons comparé A'_1A aux multiples de $n\Delta_1$. Nous obtiendrons, ou bien

$$OA = n[OB'_2 + p\Delta_2]$$

ou bien

$$OA'_1 < OA'_2 < OA'_3 < OA \qquad \text{et} \qquad OB'_1 < OB'_2 < OB'_3 < OB''_1$$

avec les conditions

$$OB'_3 = OB'_2 + p\Delta_2 \ , \qquad OA'_3 = nOB'_3 \ , \qquad \text{et} \qquad A'_2A < n\Delta_2 \ ;$$

et ainsi de suite.

Procédant toujours d'après la même loi, deux circonstances pourront se présenter à la longue :

1° Ou bien il arrivera que l'on obtienne

$$OA = n[OB'_r + s\Delta_r] \qquad \text{ou} \qquad G = nH$$

et le théorème est démontré dans ce cas.

2° Ou bien la circonstance examinée au 1° ne se présentera jamais, quelque loin que l'on pousse les opérations.

Dans ce cas on aura créé une loi de formation de trois suites infinies de segments :

la suite croissante	$OA'_1, \quad OA'_2, \quad OA'_3, \ldots$	(1)
la suite croissante	$OB'_1, \quad OB'_2, \quad OB'_3 \ldots$	(2)
la suite décroissante	$\Delta_0, \quad \Delta_1, \quad \Delta_2, \quad \Delta_3, \ldots$	(3)

La première a tous ses termes moindres que OA, donc (n° 8) elle a une limite $\leqq$ OA.

La seconde suite est liée à la première par la relation générale

$$OA'_r = nOB'_r ;$$

de plus elle a tous ses termes moindres que OB''_1, donc elle a une limite $\leqq OB''_1$.

La troisième suite vérifie la condition générale

$$\Delta_{r-1} > n\Delta_r ,$$

donc (n° 16) elle a pour limite zéro ; il en est donc de même (n° 14) de la suite

$$n\Delta_1, \quad n\Delta_2, \quad n\Delta_3 \ldots \tag{4}$$

Or, si l'on considère la suite infinie des différences entre OA et les termes de la suite (1), c'est-à-dire

$$A'_1A, \quad A'_2A, \quad A'_3A, \ldots \tag{5}$$

on sait que les suites (4) et (5) sont liées par la condition générale

$$A'_rA < n\Delta_{r-1} ;$$

il en résulte que si la suite (4) a pour limite zéro, il en sera de même a fortiori de la suite (5) puisque celle-ci a ses termes respectivement moindres que ceux de celle-là. On conclut de là, par définition des limites, que la suite (1) a pour limite OA, ce que nous écrirons

$$OA = \lim OA'_r .$$

Considérons à nouveau la suite (2). Nous avons vu qu'elle a une limite $\leqq OB''_1$; désignons cette limite par H, et soit

$$OB = H = \lim OB'_r \ ;$$

je dis qu'on a

$$OA = nOB \ .$$

En effet, on a

$$OA = \lim OA'_r = \lim (nOB'_r)$$

et en vertu du théorème du n° 13

$$\lim (nOB'_r) = n \lim OB'_r = nOB$$

d'où

$$OA = nOB \qquad \text{ou} \qquad G = nH \ .$$

Le théorème est donc démontré dans tous les cas.

18. — Remarque. — Quel que soit le procédé géométrique adopté pour décomposer un segment G en n parties égales, on obtient toujours le même résultat ; c'est-à-dire qu'il n'existe pas deux segments différents H et K tels que l'on ait simultanément

$$G = nH \qquad \text{et} \qquad G = nK \ .$$

En effet, si l'on suppose par exemple $K > H$ on aura

$$K = H + (K - H) \qquad \text{d'où} \qquad nK = nH + n(K - H) > nH \ .$$

19. — Définitions. — Chacun des segments égaux obtenus par la décomposition d'un segment G en n parties égales s'appelle la $n^{ième}$ *partie de* G, et se représente par le symbole

$$\frac{G}{n} \ .$$

On a donc

$$\frac{G}{n} . n = G \ .$$

On dit que le segment $\frac{G}{n}$ est contenu n fois dans G. On appelle *partie aliquote* d'un segment G tout segment contenu un nombre entier quelconque de fois dans G.

20. — Théorème. — *Les parties aliquotes d'un segment* G *constituent une suite infinie décroissante*

$$\frac{G}{2}, \frac{G}{3}, \frac{G}{4}, \ldots, \frac{G}{n}, \ldots$$

ayant pour limite zéro.

Choisissons un segment α arbitrairement petit ; le théorème revient à démontrer qu'il existe dans la suite considérée un segment moindre que α. Or, la suite

$$\alpha, 2\alpha, 3\alpha, 4\alpha, \ldots$$

croît sans limite ; donc on peut prendre n de façon à vérifier la condition

$$n\alpha > G, \quad \text{ou} \quad n\alpha > n\frac{G}{n} \quad \text{ou encore} \quad \alpha > \frac{G}{n}.$$

D'ailleurs, la suite considérée est décroissante, car si l'on suppose par exemple $p > n$, on aura

$$G = n\frac{G}{n} = p\frac{G}{p}, \quad \text{et} \quad n\frac{G}{n} < p\frac{G}{n} \quad \text{ou} \quad p\frac{G}{p} < p\frac{G}{n},$$

d'où l'on tire

$$\frac{G}{p} < \frac{G}{n}.$$

La condition

$$\frac{G}{n} < \alpha$$

est donc vérifiée définitivement.

21. — Remarque. — La théorie qui précède est applicable non seulement aux segments de droite, mais aussi aux arcs de circonférence d'un même rayon et aux arcs d'hélice de même pas sur un même cylindre circulaire droit, et par conséquent aux angles et à toutes les grandeurs géométriques directement mesurables.

Front belge de l'Yser, avril 1917.

NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

(4e article)[1]

L'arithmotrigonométrie.

70. — C'est dans une pièce en date du 1er mai 1780, *De casibus quibusdam maxime memorabilibus in analysi indeterminata, ubi imprimis insignis usus calculi angulorum in analysi Diophantea ostenditur*[2], que L. EULER a introduit l'usage des nombres trigonométriques pour l'étude de certaines équations de l'analyse diophantine.

Ce mémoire traite de deux problèmes; chacun d'eux est résolu d'abord par la méthode algébrique; EULER montre ensuite combien est avantageux l'usage des rapports trigonométriques de certains angles auxiliaires pour la résolution de chacun de ces deux problèmes.

Le premier problème est relatif à la résolution de l'équation du quatrième degré à quatre variables :

$$x^4 + y^4 + z^4 + v^4 - 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 2v^2(x^2 + y^2 + z^2) = 0 ,$$

admettant entre autres solutions entières les trois systèmes qui suivent :

$$\begin{array}{llll} x = 20 , & y = 17 , & z = 17 , & v = 12 ; \\ \quad\;\; 39 , & \quad\;\; 25 , & \quad\;\; 20 , & \quad\;\; 12 ; \\ \quad\;\; 78 , & \quad\;\; 65 , & \quad\;\; 29 , & \quad\;\; 24 . \end{array}$$

[1] Voir l'*Enseignement mathématique*, 18e année, 15 mars 1916, pp. 81-110, et 15 novembre 1916, pp. 397-428; 19e année, 15 mai 1917, pp. 159-191.

[2] *Commentationes arithmeticæ*, tomus posterior, pp. 366-379.

En posant

$$\frac{xy}{vz} = \sin\alpha\ , \qquad \frac{xz}{vy} = \sin\beta\ ,$$

Euler montre que toute la question revient à déterminer deux arcs α et β dont les nombres trigonométriques sont rationnels et qui sont en outre tels que le produit de $\sin\alpha$ et de $\sin\beta$ soit un carré.

Le second problème, qui consiste de même à résoudre l'équation

$$x^4 + y^4 + z^4 + v^4 - 2x^2y^2 - 2x^2z^2 - 2x^2v^2 - 2y^2z^2 - 2y^2v^2 - 2z^2v^2 = 0\ ,$$

douée de solutions telles que

$$\begin{array}{rrrr} x = 14\ , & y = 8\ , & z = 5\ , & v = 3\ , \\ 72\ , & 35\ , & 33\ , & 14\ , \\ 165\ , & 99\ , & 56\ , & 32\ , \end{array}$$

se traite d'une manière analogue, en posant

$$\frac{xy}{vz} = \operatorname{cotang}\alpha\ , \qquad \frac{xz}{vy} = \operatorname{cotang}\beta\ ,$$

et en déterminant des angles α et β, à rapports trigonométriques rationnels, tels que

$$\operatorname{cotang}\alpha\,.\,\operatorname{cotang}\beta = \square\ .$$

A la même date, c'est-à-dire encore le 1er mai 1780, nous trouvons une autre pièce d'Euler consacrée aux angles d'un quadrilatère tels que leurs sinus soient proportionnels à des nombres rationnels donnés : *Investigatio quadrilateri in quo singulorum angulorum sinus datam inter se teneant rationem ; ubi artificia prorsus singularia in analysi Diophantea occurrunt*[1].

Si, par exemple, les nombres donnés sont 15, 14, 11 et 6, les angles demandés sont :

$$\begin{aligned} A &= 92^\circ\, 23'\, 16''\ , \\ B &= 111^\circ\, 10'\, 06''\ , \\ C &= 132^\circ\, 53'\, 14''\ , \\ D &= 23^\circ\, 33'\, 24''\ , \end{aligned}$$

[1] *Commentationes arithmeticæ*, t. II. pp. 380-391.

dont la somme est bien 360° et dont les nombres trigonométriques sont :

$$\sin A = \frac{5}{24}\sqrt{23}\,, \qquad \cos A = -\frac{1}{24}\,,$$

$$\sin B = \frac{7}{36}\sqrt{23}\,, \qquad \cos B = -\frac{13}{36}\,,$$

$$\sin C = \frac{11}{72}\sqrt{23}\,, \qquad \cos C = -\frac{49}{72}\,,$$

$$\sin D = \frac{1}{12}\sqrt{23}\,, \qquad \cos D = -\frac{11}{12}\,.$$

La solution de ce problème peut être obtenue d'une manière très rapide en introduisant le rapport commun de sin A, sin B, sin C et sin D aux nombres donnés a, b, c et d. Si, en effet, on pose

$$\sin A = ax\,, \qquad \sin B = bx\,, \qquad \sin C = cx\,, \qquad \sin D = dx\,,$$

la condition $A + B + C + D = 2\pi$ se traduit par une équation du premier degré en x^2; d'une manière générale, les expressions des quatre sinus sont irrationnelles, les nombres a, b, c, d étant multipliés par la racine carrée d'un même nombre rationnel[1] : c'est ce qui se produit pour les trois exemples numériques traités complètement par Euler.

71. — Cette introduction des rapports trigonométriques de certains angles dans des recherches arithmétiques, cette confrontation de la trigonométrie plane (et peut-être aussi de la trigonométrie sphérique) et de l'analyse diophantine semblent devoir présenter un intérêt comparable à celui de l'arithmogéométrie, dont le fondement n'est autre que la confrontation des grandeurs de la géométrie et des nombres rationnels.

Indépendamment des considérations d'Euler sur l'avantage que peut présenter l'introduction des angles dans l'étude de certains problèmes diophantins, j'avais rencontré — dans les derniers paragraphes de mon examen du Problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise — des équations tri-

[1] Il serait intéressant de rechercher, à ce propos, si, pour un choix convenable des données a, b, c, d, les quatre sinus peuvent être rationnels.

gonométriques particulières[1]. Les théorèmes de FERMAT et de FRÉNICLE relatifs à l'inexistence d'arithmotriangles pythagoriques, dont l'aire soit un carré parfait ou le double d'un tel carré, se traduisent par des équations

$$\sin 2\theta = \square ,$$

$$2\sin 2\theta = \square ,$$

impossibles si $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$ doit être un nombre rationnel.

Ces exemples simples suffisent pour permettre d'introduire avec clarté et précision la notion d'*équation arithmotrigonométrique*. Par définition, *une telle équation est une équation à coefficients rationnels dans laquelle un certain nombre d'inconnues* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *sont engagées par leurs seuls rapports trigonométriques et dont les solutions sont telles que* $\operatorname{tang}\frac{x_1}{2}, \operatorname{tang}\frac{x_2}{2}, \ldots \operatorname{tang}\frac{x_n}{2}$ *soient des nombres rationnels*. En d'autres termes, ces angles $x_1, \ldots, x_n$ dont la présence dans l'équation trigonométrique, au sens habi-

---

[1] Lorsque j'écrivais, en septembre 1915, les remarques sur *le probleme de Léonard de Pise et de Jean de Palerme*, ou même les *premières* pages des *Notions d'arithmogéométrie*, je me trouvais dans l'absolue impossibilité de faire la moindre recherche bibliographique. C'était donc de mémoire que je citais FERMAT à l'occasion de l'impossibilité de certaines équations.

Voici maintenant les renseignements historiques necessaires. C'est à propos du problème 20 de BACHET [trouver un arithmotriangle pythagorique dont l'aire soit égale à un nombre donné], qui se rattache lui-même à la 26e question du VIe livre de l'*Arithmétique* de DIOPHANTE, que FERMAT observa que *l'aire d'un triangle rectangle en nombres ne peut être un carré.*

Cette même proposition négative se trouve aussi dans la lettre de FERMAT à CARCAVI, d'août 1659, dont une copie par HUYGENS nous a été transmise (œuvres de Fermat, t. 2, p. 431).

FRÉNICLE (*Traité des triangles rectangles en nombres*, dans lequel plusieurs belles propriétés sont démontrées par de nouveaux principes, Paris, 1676) donne ce même théorème a la page 100.

A noter aussi une pièce du 29 décembre 1678. *Invenire triangulum in numeris cujus area sit quadratus* (*Leibnizens mathematische Schriften*, Gerhardt, III, p. 120-125) dans laquelle LEIBNIZ retrouve cette même impossibilité.

LEIBNIZ établit aussi l'impossibilité de chacune des équations

$$x^3 - x = \square ,$$

$$x^4 - y^4 = \square ;$$

la première est équivalente à

$$2\operatorname{tang}\theta = \square .$$

La seconde a été considérée par FERMAT (Observations sur Diophante, VI, 26).

En ce qui concerne d'autre part l'*inexistence d'arithmotriangles pythagoriques dont l'aire soit le double d'un nombre carre*, c'est à la page 101 du *Traité* de FRÉNICLE qu'elle est énoncée et établie. Plus loin d'ailleurs (p. 111), FRÉNICLE indique l'impossibilité de l'équation *équivalente ;*

$$x^4 + y^4 = \square$$

que FERMAT a de son côté mentionnée comme impossible dans son observation VI, 22.

tuel de cette expression, en fait une équation arithmotrigonométrique, sont des angles d'une espèce toute particulière que nous connaissons bien déjà : ce sont les angles des arithmotriangles pythagoriques. Dans ces conditions, l'*Arithmotrigonométrie,* c'est-à-dire l'ensemble des propriétés de toutes les équations arithmotrigonométriques, n'offre aucune originalité, mais c'est une nouvelle forme avantageuse d'exposition des faits qui constituent la « Géométrie des triangles rectangles en nombres » telle que la concevaient Diophante, Fermat ou Frénicle.

L'arithmotrigonométrie mérite d'être étudiée ici. Ce qui fait, en effet, le plus défaut dans la théorie des nombres, ce n'est pas une théorie générale ; ce n'est pas non plus une base métaphysique solide ; ce qui fait défaut, dis-je, c'est une méthode de résolution des équations en nombres rationnels ou entiers. Toute considération qui peut conduire à des moyens pratiques de détermination des solutions est la bienvenue dans le monde mystérieux des nombres. C'est ce qui me décida à consacrer tant de pages aux présentes notions d'arithmogéométrie, dès que je reconnus que l'intuition géométrique pouvait apporter quelques perfectionnements à l'analyse diophantine. C'est encore pour une raison identique que je crois devoir donner un tel développement à ces principes d'arithmotrigonométrie.

72. — Les équations qui viennent d'être rappelées ci-dessus et qui sont étroitement liées aux deux théorèmes de Fermat et de Frénicle sur l'aire d'un arithmotriangle pythagorique sont évidemment équivalentes aux équations

$$\operatorname{tang}\theta = \square \qquad \text{et} \qquad 2\operatorname{tang}\theta = \square\ ;$$

celles-ci sont donc impossibles du point de vue arithmotrigonométrique. Cette impossibilité des équations arithmotrigonométriques

$$\operatorname{tang}\theta = \square\ , \qquad 2\operatorname{tang}\theta = \square\ ,$$

et des équations qui en dérivent manifestement, telles que les équations arithmotrigonométriques

$$\sin 2\theta = \square\ , \qquad 2\sin 2\theta = \square\ ,$$

ou encore des équations algébriques remarquables qui leur sont équivalentes, présente une grande importance dans la théorie des nombres et dans l'histoire de son développement. Nombreuses sont, en effet, les propositions trouvées et retrouvées sur ces différentes équations ou sur les figures géométriques (les arithmotriangles pythagoriques notamment) qui leur sont liées. En réalité, il *s'agit d'une unique propriété de la théorie des nombres*. Tout d'abord, il faut observer que les équations

$$\operatorname{tang}\theta = \square\,, \qquad 2\sin 2\theta = \square\,,$$

sont identiques entre elles et qu'il en est de même des équations :

$$2\operatorname{tang}\theta = \square\,, \qquad \sin 2\theta = \square\,.$$

Reste à prouver que les équations $\sin 2\theta = \square$ et $2\sin 2\theta = \square$ sont équivalentes par changement de variable. Il suffit de remarquer que l'équation impossible

$$xy(x^4 - y^4) = \square\,,$$

considérée par Euler[1] devient

$$2XY(X^4 - Y^4) = \square\,,$$

au moyen de la transformation affine définie par les équations

$$x + y = X\,, \qquad x - y = Y\,.$$

En posant alors

$$y = x \operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$$

dans l'une et l'autre des deux équations impossibles équivalentes :

$$xy(x^4 - y^4) = \square\,, \qquad 2xy(x^4 - y^4) = \square\,,$$

il vient :

$$\sin 2\theta = \square \quad \text{et} \quad 2\sin 2\theta = \square\,.$$

L'impossibilité de l'une des équations entraîne donc celle de l'autre. Et, par suite, *il y a équivalence entre les deux propositions négatives de Fermat et de Frénicle relatives à*

[1] *Investigatio binorum numerorum formæ* $xy(x^4 - y^4)$, *quorum productum, sive quotus sit quadratum* (14, août 1780). *Commentationes arithmeticæ*, tomus posterior, pp. 438-446.

l'inexistence d'arithmotriangles pythagoriques dont l'aire soit un carré ou le double d'un carré.

73. — Impossibilité de $\sin\theta = \square$ et de $\cos\theta = \square$, de $2\sin\theta = \square$ et de $2\cos\theta = \square$.

Je viens de dire que les équations arithmotrigonométriques

$$\operatorname{tang}\theta = \square \qquad \text{et} \qquad 2\operatorname{tang}\theta = \square$$

étaient séparément impossibles, comme attachées aux problèmes des arithmotriangles pythagoriques dont l'aire est un carré parfait ou le double d'un carré.

Les quatre équations suivantes

$$\sin\theta = \square\,, \qquad 2\sin\theta = \square\,,$$
$$\cos\theta = \square\,, \qquad 2\cos\theta = \square\,,$$

sont de même séparément impossibles, pour les raisons qui vont être données. Il y a lieu d'exposer tout d'abord que les deux équations de la seconde ligne, c'est-à-dire les équations en cosinus, sont respectivement équivalentes aux deux équations en sinus de la première ligne.

Des deux équations irréductibles l'une à l'autre qu'il convient de considérer maintenant, l'une d'elles $\cos\theta = \square$ est équivalente à l'équation

$$x^4 - y^4 = \square$$

reconnue impossible par Fermat à l'occasion du 26e problème du VIe livre de Diophante. De même, de l'impossibilité de l'équation

$$2(X^4 - Y^4) = \square\,,$$

établie par Euler, ou encore de celle de l'équation

$$x + \frac{1}{x} = \square\,,$$

considérée par Leibniz[1], il résulte que les équations, équi-

[1] Exercitium ad promovendam scientiam numerorum, *Leibnizens mathematische Schriften* Gerhardt, [2], III, 1863, p. 114-119.

Dans cette pièce, Leibniz s'occupe de l'équation

$$x + \frac{a}{x} = \square\,,$$

qui peut être rattachée à l'étude arithmogéométrique d'une cubique, la cubique harmonique d'équation :

$$y^2 = x^3 + ax\,.$$

valentes par changement de variable θ,

$$2\cos\theta = \square \qquad \text{et} \qquad 2\sin\theta = \square\ ,$$

sont elles aussi impossibles.

74. — Les théorèmes qui précèdent présentent, en plus de leur intérêt historique, celui d'être fondamentaux dans l'étude d'un nombre respectable d'équations impossibles déjà connues. Il semble, en outre, que cette source féconde de propositions négatives soit encore loin d'être tarie.

Voici quelques nouveaux exemples de leur utilité incontestable.

Soit, en premier lieu, l'équation arithmotrigonométrique à deux indéterminées :

$$\sin u + \sin v = 1\ ;$$

elle peut être transformée en l'équation équivalente :

$$\sin u = 2\cos^2\frac{v}{2}\ ,$$

c'est-à-dire :

$$2\sin u = \square\ .$$

Il est donc impossible de satisfaire à l'équation

$$\sin u + \sin v = 1\ ,$$

avec des angles tels que $\operatorname{tang}\frac{u}{2}$ *et* $\operatorname{tang}\frac{v}{2}$ *soient deux nombres rationnels.*

Soit, en second lieu, à résoudre le problème de la détermination de quatre carrés en progression arithmétique. M. E. Hæntschel vient de rappeler que ce problème avait été considéré, dans le cas de trois carrés, par Diophante et que le Problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise en était un cas particulier (voir paragraphe 76). J'ajouterai que ce même problème de trois carrés en progression arithmétique a été considéré aussi par Fermat [1] et par Frénicle [2] et que sa solution générale au moyen d'une représentation

[1] *Œuvres*, t. II, p. 65 et 234.

[2] *Traité des triangles rectangles en nombres...*, p. 27-28. Frénicle donne la solution simple 49, 169, 289.

arithmotrigonométrique a été donnée plus haut (paragraphe 6: arithmotriangles automédians).

Le problème de quatre carrés en progression arithmétique se traduit par les équations

$$x^2 - y^2 = y^2 - z^2 = z^2 - t^2 ,$$

qui deviennent

$$x^2 + z^2 = 2y^2 , \qquad y^2 + t^2 = 2z^2 .$$

Conformément aux conclusions du paragraphe 6, je poserai donc

$$x = y(\cos\alpha - \sin\alpha) ,$$
$$z = y(\cos\alpha + \sin\alpha) ,$$
$$y = z(\cos\beta + \sin\beta) ,$$
$$t = z(\cos\beta - \sin\beta) ;$$

d'où il résulte que les angles α et β doivent satisfaire à l'équation arithmotrigonométrique

$$(\cos\alpha + \sin\alpha)(\cos\beta + \sin\beta) = 1 ,$$

ou encore

$$\cos(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta) = 1 .$$

Celle-ci est impossible d'après le résultat qui vient d'être obtenu à l'instant. *Il est donc impossible de déterminer quatre carrés en progression arithmétique.*

Sur certains arithmotriangles pythagoriques.

75. — L'examen du plus célèbre des arithmotriangles pythagoriques, celui des harpedonaptes égyptiens, donne l'idée de former des équations arithmotrigonométriques fort simples que je vais étudier. Les sinus et cosinus des angles aigus de ce triangle sont :

$$\frac{3}{5} \quad \text{et} \quad \frac{4}{5} = \frac{1}{1 + \frac{1}{4}} .$$

Quels sont d'une manière générale les arithmotriangles pythagoriques tels que

$$\sin\theta = \frac{1}{1+y^2}\,?$$

La solution *générale* de cette équation arithmotrigonométrique s'obtient aisément par considération d'une arithmocubique unicursale ; on doit poser

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = 2\lambda^2\,,$$

et, par suite :

$$\sin\theta = \frac{1}{1+\left(\frac{2\lambda^2-1}{2\lambda}\right)^2}\,.$$

De même l'équation

$$\cos\theta = \frac{1}{1+y^2}\,,$$

qui n'est d'ailleurs pas essentiellement distincte de la précédente, se laisse résoudre en toute généralité en posant :

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \frac{2\lambda^2-1}{2\lambda^2+1}\,.$$

Il convient de noter que cette question fournit des solutions particulières des deux équations

$$\sin\theta = \square + \square\,,$$
$$\cos\theta = \square + \square\,,$$

qui seront étudiées quelques pages plus loin (paragraphe 80).

76. — Le théorème de Fermat sur le nombre 7. — Pour le même arithmotriangle pythagorique (3, 4, 5), on a $\operatorname{tang}\theta = \frac{3}{4} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$; cette dernière relation donne naissance à une question intéressante en elle-même, qui se rattache à une fort belle proposition de Fermat :

Quelle est la solution générale de l'équation

$$\operatorname{tang}\theta = 1 - \lambda^2$$

en nombres rationnels $\frac{\theta}{2}$ *et* λ *?*

Cette équation se transforme immédiatement en la suivante :

$$\frac{1-y^2}{2y} = 1 - x^2 ,$$

représentative d'une cubique plane. Considérée comme une équation du second degré en y, cette équation dépend du point de vue arithmogéométrique d'une équation

$$x^4 - 2x^2 + 2 = \square$$

de Brahmagupta-Fermat généralisée. A cette même équation, ou d'une manière plus précise à l'équation équivalente

$$2x^4 - 2x^2 + 1 = \square ,$$

se ramène d'ailleurs le problème des arithmodistances pour l'origine et l'hyperbole équilatère $y = \frac{x^2-1}{x}$.

Mais ce qui est encore plus digne de retenir notre attention c'est que la question envisagée n'est point distincte d'un problème qui a son histoire : l'étude d'une propriété caractéristique du nombre entier 7. Fermat[1], en effet, a remarqué le premier que, *seul dans la suite des entiers, le nombre 7 jouit de la propriété d'être, ainsi que son carré, de la forme* $2u^2 - 1$; en d'autres termes, les équations simultanées

$$2y^2 - 1 = x ,$$
$$2z^2 - 1 = x^2 ,$$

n'admettent, *en nombres entiers,* que l'unique solution :

$$x = 7 , \quad y = 2 , \quad z = 5 .$$

Je n'insisterai guère sur ce problème de Fermat, qui se rattache encore à la théorie des arithmopoints d'une biquadratique gauche ; je me bornerai à mettre en lumière sa

---

[1] Sur ce problème de Fermat, cf. t. 2 des *Œuvres de Fermat,* pp. 434-446 et d'autre part :
Ch. Henry, Recherches sur les manuscrits de Fermat, p. 176.
T. Pépin, Sur un théorème de Fermat *(Atti dell' Accademia pontificia dei nuovi Lincei*, t. 36, 1883, p. 23-33.
A. Genocchi, Démonstration d'un théorème de Fermat, *Nouvelles Annales de Mathématiques,* 3e série, t. 2, 1883, p. 306-310.

liaison avec l'équation précédente ; cette liaison résultant de l'équation

$$z^2 = 2y^4 - 2y^2 + 1 ,$$

de l'une des projections de la biquadratique de l'espace. Comme nouvelle solution simple de cette équation, j'ai trouvé :

$$x = -\frac{31}{49}, \quad y = \frac{3}{7}, \quad z = \frac{41}{49}, \quad \operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{tang}\theta = -\frac{40}{9}.$$

La solution primitive de Fermat correspond précisément à l'angle de l'arithmotriangle pythagorique de côtés 3, 4 et 5. Celle que j'en ai déduite met en évidence deux nombres,

$$\frac{31}{49} \quad \text{et} \quad \frac{41}{49},$$

qui ont une grande signification, si l'on se reporte à mon article sur *le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise*[1] ou à la lettre de M. Haentzchel[2] sur ce même travail : la solution de Diophante, pour le problème des trois nombres carrés en progression arithmétique,

$$\overline{41}^2 - 720 = \overline{31}^2, \ \overline{41}^2 \quad \text{et} \quad \overline{41}^2 + 720 = \overline{49}^2,$$

et la solution équivalente de Léonard de Pise

$$\left(\frac{41}{12}\right)^2 + 5 = \left(\frac{49}{12}\right)^2, \quad \left(\frac{41}{12}\right)^2 - 5 = \left(\frac{31}{12}\right)^2,$$

pour le problème qui constituait la première des trois questions de Jean de Palerme, mettent précisément en évidence les trois nombres 31, 41 et 49. Simple coïncidence, mais coïncidence bien curieuse !

77. — Dans les paragraphes précédents, les relations

$$\cos\theta = \frac{4}{5}, \quad \operatorname{tang}\theta = \frac{3}{4},$$

[1] *L'Enseignement Mathématique*, 17e année 1915, pp. 315-324.
[2] *Ibid.*, 19e année, 1917, pp. 199-201.

m'ont amené à étudier *séparément* les deux équations arithmotrigonométriques

$$\cos\theta = \frac{1}{1+\square}, \quad \operatorname{tang} = 1 - \square .$$

Il y a lieu maintenant de rechercher ceux des arithmotriangles pythagoriques qui, comme celui dont les côtés sont 3, 4 et 5, satisfait *simultanément* à ces deux équations.

Partant de la première des équations,

$$\cos\theta = \frac{1}{1+\square},$$

dont la solution *générale* est donnée par les formules

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \frac{2-\lambda^2}{2+\lambda^2}, \quad \cos\theta = \frac{4\lambda^2}{\lambda^4+4};$$

il faut égaler à une quantité indéterminée $1-\mu^2$ l'expression

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{4-\lambda^4}{4\lambda^2};$$

d'où l'équation

$$\frac{4-\lambda^4}{4\lambda^2} = 1-\mu^2;$$

elle s'écrit encore

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 - 4 = (2\mu\lambda)^2 .$$

Le problème étudié se ramène donc à l'équation

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 - 4 = \square,$$

qui admet pour solution $\lambda = \infty$, $\lambda = 1$ (arithmotriangle 3, 4, 5), $\lambda = \frac{5}{2}$; à cette dernière solution correspond un arithmotriangle pythagorique de côtés 400, 561 et 689, pour lequel

$$\cos\theta = \frac{1}{1+\left(\frac{17}{20}\right)^2} = \frac{400}{689},$$

$$-\operatorname{tang}\theta = \frac{561}{400} = 1 - \left(\frac{31}{20}\right)^2;$$

c'est donc actuellement le supplément d'un des angles aigus de l'arithmotriangle dont la tangente trigonométrique est de la forme spécifiée dans l'énoncé du problème.

En posant alors

$$\lambda^4 + 4\lambda^2 - 4 = \left(\lambda^2 - 2x + \frac{2}{3}\right)^2,$$

le problème est ramené à l'étude d'une fonction $\wp$ de Weierstrass d'invariants

$$g_2 = -\frac{8}{3} \quad \text{et} \quad g_3 = -\frac{80}{27}.$$

Arithmotriangles pythagoriques dont les trois côtés sont sommes de deux carrés.

78. — Le théorème de Fermat. — L'importance des nombres sommes de deux carrés[1] est assez grande ; elle est surtout due aux belles recherches qui ont été faites autour d'un théorème célèbre de *Fermat*[2]. C'est à l'occasion du problème de la détermination du moindre nombre qui soit autant de fois qu'on voudra et non plus la somme de deux carrés, problème proposé par Frénicle, dans une lettre adressée le 6 septembre 1641 à Fermat, que ce dernier énonça le théorème suivant : *Si un nombre* p *compris dans la forme* $4n + 1$ *est premier ou composé de facteurs premiers de cette forme,* p *est la somme de deux carrés.* En remarquant que les facteurs puissances de 2 n'altèrent point cette propriété, en vertu de l'identité

$$2(b^2 + c^2) = (b + c)^2 + (b - c)^2,$$

il est possible de présenter ce théorème de Fermat sous la forme générale et précise qui suit :

---

[1] Initialement considérés par Diophante (II, 8, 9 et 10), puis par Viète (Zeteticorum libri, IV, 2, 3).

[2] *Œuvres de Fermat*, t. I, p. 293 ; t. II, p. 213, 221, 403 et 432 ; t. III, p. 243, 315. — S. Réalis : Scolies pour un théorème de Fermat, *Nouvelles Annales de Mathématiques* (3), t. 4, 1885, p. 367-372. — Le théorème de Fermat a été démontré par Euler (*Nouveaux commentaires de Pétersbourg*, t. IV, p. 3 et t. V, p. 3), Legendre et Smith. Edouard Lucas en a donné une très curieuse démonstration géométrique par les *satins carrés*.

Si un nombre entier n'a que des facteurs 2^n *ou premiers de la forme* $4k + 1$, *il est la somme de deux carrés.*

Le théorème s'étend immédiatement aux nombres rationnels ; en remarquant avec Euler que *les diviseurs d'un nombre somme de deux carrés jouissent de la même propriété*, et en remplaçant l'équation

$$\frac{A}{B} = \square + \square \cdot$$

par l'équation équivalente

$$AB = \square + \square \cdot$$

on obtient le théorème général suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un nombre entier ou fractionnaire soit somme de deux carrés est que cet entier ou les deux termes entiers de la fraction n'aient que des facteurs des formes 2^n *et* $4k + 1$.

79. — Le problème des arithmotriangles pythagoriques a cotés sommes de deux carrés. — Les équations arithmotrigonométriques

$$\sin\theta = \square\ , \quad \cos\theta = \square\ , \quad \operatorname{tang}\theta = \square\ ,$$

étant toutes trois séparément impossibles, *il n'existe aucun arithmotriangle pythagorique ayant plus d'un côté carré parfait.* Comme, parmi les nombres non carrés, les plus simples sous le point de vue de la constitution par sommes de carrés, sont les sommes de deux carrés, je me suis naturellement posé la question suivante : *Existe-t-il des arithmotriangles pythagoriques dont les trois côtés sont simultanément sommes de deux carrés ?*

La réponse à cette question est affirmative : il existe une infinité de solutions, telles que celle qui correspond aux trois côtés

$$\begin{aligned} 9 &= \phantom{2^2 + {}} 3^2\ , \\ 40 &= 2^2 + 6^2\ , \\ 41 &= 4^2 + 5^2\ . \end{aligned}$$

Dans cet exemple, la plus petite des cathètes est mesurée par le nombre 9. D'une manière générale, puisque l'hypo-

ténuse d'un arithmotriangle pythagorique ne peut jamais être mesurée par un nombre multiple de 3, puisque, au contraire, l'un des côtés est toujours mesuré par un multiple de 3 [1], et puisque, enfin, ce nombre 3 ne saurait être somme de deux carrés, comme étant de la forme $4k - 1$, une première propriété des arithmotriangles pythagoriques spécialement étudiés ici est que :

Dans tout arithmotriangle pythagorique dont les trois côtés sont simultanément sommes de deux carrés, l'une des deux cathètes est mesurée par un nombre divisible par 9 (ou par une puissance paire de 3). Il en est de même des mesures de la hauteur relative à l'hypoténuse et de l'aire du triangle.

D'autre part, comme conséquences de la propriété d'invariance par multiplication entre eux des nombres sommes de deux carrés, il est évident que :

L'aire (qui ne peut jamais être un carré parfait) *et la hauteur relative à l'hypoténuse d'un arithmotriangle pythagorique dont les côtés sont tous trois sommes de deux carrés sont aussi mesurées par des nombres de cette nature.*

Ces propriétés générales établies, j'aborde la recherche même de ces triangles.

80. — L'équation $\cos\theta = \square + \square$. Soit $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = x$; puisque le dénominateur $1 + x^2$ de la fraction rationnelle exprimant $\cos\theta$, en fonction de x, est une somme de deux carrés, il faut et il suffit qu'il en soit de même du numérateur $1 - x^2$. Posant

$$1 - x^2 = y^2 + z^2 ,$$

on ramène le problème à l'étude de l'arithmosphère d'équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1 ;$$

si x, y et z sont alors les coordonnées d'un arithmopoint quelconque de cette arithmosphère, l'expression de $\cos\theta$ est :

$$\cos\theta = \left(\frac{xz + y}{1 + x^2}\right)^2 + \left(\frac{yz - x}{1 + x^2}\right)^2 .$$

[1] Ces deux théorèmes sont dus à Frénicle (*loc. cit.*, p. 77 et 76 respectivement).

Telle est l'élégante solution du problème. Il suffit alors d'exprimer, conformément au paragraphe 8, les trois coordonnées x, y et z en fonction de deux paramètres pour avoir une expression de $\cos\theta$.

L'équation $\sin\theta = \square + \square$ n'est pas différente de la précédente. Pour la résoudre directement, il suffit d'observer que la solution générale consiste à poser :

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \alpha^2 + \beta^2 .$$

α et β étant deux nombres rationnels quelconques.

81. — Pour revenir au problème posé, il suffit d'observer que, par similitude, on peut rendre l'hypoténuse carré parfait ou somme de deux carrés parfaits. Le problème se traduit donc par les deux équations simultanées :

$$\sin\theta = \square + \square \qquad \text{et} \qquad \cos\theta = \square + \square .$$

La première de ces équations est résolue par

$$t = \operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \alpha^2 + \beta^2 ;$$

la seconde équation donne alors la condition

$$1 - t^2 = \square + \square ,$$

ou

$$1 = (\alpha^2 + \beta^2)^2 + \gamma^2 + \delta^2 .$$

Nous devons ainsi considérer l'arithmosphère de rayon rationnel et choisir parmi son infinité double d'arithmopoints ceux qui ont une coordonnée somme de deux carrés. Les formules de représentation impropre étant

$$x = \frac{(1-u^2)(1-v^2)}{(1+u^2)(1+v^2)}, \qquad y = 2v\cdot\frac{1-u^2}{(1+u^2)(1+v^2)}, \qquad z = \frac{2u}{1+u^2},$$

un choix est tout indiqué, en raison de la grande simplicité de l'expression de z ; il suffira de prendre pour u une somme de deux carrés. D'où le théorème définitif :

Une famille d'arithmotriangles pythagoriques dont les trois

côtés sont simultanément sommes de deux carrés est caractérisée et définie par l'équation

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \frac{2(\lambda^2 + \mu^2)}{1 + (\lambda^2 + \mu^2)^2},$$

qui exprime la tangente trigonométrique de l'un des angles aigus en fonction de deux nombres rationnels arbitraires λ et μ.

Pour $\lambda = 1$, $\mu = 1$, on obtient $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \frac{4}{5}$ et, par suite,

$$\sin\theta = \frac{40}{41} = \left(\frac{32}{41}\right)^2 + \left(\frac{24}{41}\right)^2,$$

$$\cos\theta = \frac{9}{41} = \left(\frac{12}{41}\right)^2 + \left(\frac{15}{41}\right)^2,$$

$$\operatorname{tang}\theta = \frac{40}{9} = \quad 2^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2;$$

cette solution correspond précisément au triangle dont les côtés ont été initialement donnés à titre d'exemple.

Pour $\lambda = 1$, $\mu = 2$, il vient de même $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{5}{13}$, $\sin\theta = \frac{65}{97}$, $\cos\theta = \frac{72}{97}$, $\operatorname{tg}\theta = \frac{65}{72}$; l'arithmotriangle pythagorique correspondant a pour côtés

$$65 = 1^2 + 8^2,$$

$$72 = 6^2 + 6^2,$$

$$97 = 4^2 + 9^2.$$

Une autre famille étendue de solutions particulières est donnée par l'expression de l'ordonnée y

$$y = 2\nu \cdot \frac{1 - u^2}{(1 + u^2)(1 + \nu^2)};$$

il suffit manifestement de poser

$$\nu(1 - u^2) = \lambda^2 + \mu^2$$

pour obtenir (en remplaçant u par ν pour raison d'élégance dans l'aspect de la formule)

$$\operatorname{tang}\frac{\theta}{2} = \frac{2(\lambda^2 + \mu^2)}{(1 + \nu^2)\left[1 + \left(\frac{\lambda^2 + \mu^2}{1 - \nu^2}\right)^2\right]}$$

une expression de $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$ en fonction de trois indéterminées rationnelles λ, μ et ν.

Pour $\nu = 0$ cette famille se réduit à la précédente. Nous aurons donc obtenu une solution particulière triplement indéterminée.

Dans ces conditions, l'étude du problème dans toute sa généralité est abordable. Pour obtenir la solution générale, il est indispensable d'avoir recours aux formules

$$x = \frac{2\xi}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \qquad y = \frac{2\eta}{\xi^2 + \eta^2 + 1}, \qquad z = \frac{\xi^2 + \eta^2 - 1}{\xi^2 + \eta^2 + 1},$$

de la représentation propre de l'arithmosphère de rayon rationnel ; la question se traduit par une équation

$$(x^2 + y^2)(\xi^2 + \eta^2) + x^2 + y^2 - \xi^2 - \eta^2 + 1 = 0$$

du quatrième degré en x, y, ξ et η. Pour éviter l'introduction de notions d'hypergéométrie, il suffit de prendre l'une de ces indéterminées η pour paramètre et les trois autres pour coordonnées dans l'espace à trois dimensions (x, y, ξ) ; le problème se rattache donc à l'étude arithmotrigonométrique d'un faisceau de surfaces du quatrième degré.

Il est aussi avantageux de ramener cette même question à l'étude d'une ∞^2 de quartiques planes[1]. Si y et η sont pris

---

[1] Cette dernière considération peut être présentée sous une autre forme. La question est équivalente à la recherche de deux des arithmopoints d'une arithmohyperbole équilatère, représentée par l'équation

$$xy = x + y + 1,$$

qui ont des coordonnées simultanément sommes de deux carrés telles que les suivantes :

$$x = 9, \qquad y = \frac{5}{4}.$$

$$x = 17, \qquad y = \frac{9}{8},$$

$$x = 129, \qquad y = \frac{65}{4}, \qquad \text{etc.}$$

L'arithmogéométrie apparaît de plus en plus comme capable de provoquer des recherches sur des questions originales ressortissant de la théorie des nombres. Ici, par exemple, se pose une question, que je n'ai pas étudiée mais qui, de prime abord, semble avoir quelque intérêt : *Etant donnée une équation* $\Gamma(x_1, \ldots x_n) = 0$ *à deux ou plusieurs indéterminées, rechercher celles de ses solutions qui sont formées par des nombres* $x_1 \ldots x_n$ *tous sommes de deux carrés.* C'est une sorte d'extension de l'équation

$$Ax^4 + Bx^2 + C = y^2,$$

qui traduit le problème de la détermination des arithmopoints d'une parabole $y = Ax^2 + Bx + C$ à coordonnées exprimées par deux carrés parfaits, et d'une manière générale des équations $f(x_1^2, x_2^2, \ldots x_n^2) = 0$.

pour paramètres, et si x et ξ sont pris pour coordonnées dans un certain plan, cette quartique est la projection d'une biquadratique gauche, intersection du paraboloïde, représenté dans un espace (x, ξ, ζ) par l'équation

$$x\xi = \zeta ,$$

et d'une quadrique rapportée à ses axes :

$$(\eta^2 + 1)x^2 + (y^2 - 1)\xi^2 + \zeta^2 = \eta^2 - y^2 - 1 - y^2\eta^2 .$$

82. — L'ÉQUATION $\operatorname{tang}\theta = \square + \square$. Avant de passer à une nouvelle question, quelques lignes s'imposent au sujet de l'équation $\operatorname{tang}\theta = \square + \square$, ou de l'équation équivalente $\operatorname{cotang}\theta = \square + \square$.

Cette équation arithmotrigonométrique se traduit algébriquement sous la forme

$$\frac{x^2 - 1}{2x} = \square + \square ,$$

c'est-à-dire encore :

$$x^2 - 1 = x(y^2 + z^2) ;$$

cette dernière équation représente, dans l'espace ordinaire, une surface du troisième degré (voir paragraphe 36) sur laquelle existent tous les arithmopoints qui correspondent aux solutions des équations *simultanées* $\sin\theta = \square + \square$ et $\cos\theta = \square + \square$. De sorte que la solution de l'équation $\operatorname{tang}\theta = \square + \square$ dépend de celle du problème qui vient d'être traité dans les paragraphes précédents.

L'arithmotrigonométrie et les arithmotriangles héroniens.

83. — APPLICATION DE LA NOTION D'ARITHMODISTANCE. J'ai souvent utilisé dans les considérations antérieures la notion d'arithmodistance et introduit le *problème des arithmodistances*, soit pour créer de nouveaux types d'équations indéterminées, soit pour rattacher à une idée générale certaines équations particulières.

En se bornant au cas de l'arithmocourbe plane (C), dont

l'arithmopoint M est repéré par ses coordonnées x et y et d'un arithmopoint fixe A de coordonnées a, b, le problème des arithmodistances pour cet arithmopoint A et l'arithmocourbe (C) est résolu par l'équation générale (paragraphe 17)

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = \square .$$

Pour les développements qui vont suivre et qui ont toujours pour objet la constitution de l'arithmotrigonométrie, il est avantageux d'observer que cette même équation est entièrement équivalente à une équation arithmotrigonométrique d'une espèce spéciale, que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{y - b}{x - a} = \operatorname{tang} \theta ,$$

dans laquelle θ est un azimut tel que $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}$ est un nombre rationnel. Cette même équation a d'ailleurs une signification précise, puisqu'elle se présente tout naturellement lorsque le problème des arithmodistances est posé sous la forme suivante.

Soient un arithmopoint connu A *et une arithmocourbe* (C) *dont l'arithmopoint courant* M *est repéré par un paramètre rationnel* t. *Quels sont ceux des arithmopoints* M *de l'arithmocourbe imposée* (C) *qui définissent avec l'arithmopoint donné* A *des droites arithmodirigées ?*

Cette remarque est féconde en ce sens qu'un grand nombre de cas spéciaux du problème des arithmodistances se laissent traduire par des équations arithmotrigonométriques souvent simples et, souvent aussi, de formes remarquables. Il en est notamment ainsi lorsque la courbe imposée (C) est paramétriquement représentée par l'intermédiaire de fonctions trigonométriques, comme pour l'ellipse.

Pour l'ellipse, dis-je, dans le cas de la représentation au moyen des demi-axes α et β supposés rationnels et de l'anomalie excentrique φ, supposée telle que $\operatorname{tang} \frac{\varphi}{2}$ soit un paramètre rationnel, il résulte des expressions des coordonnées

$$x = \alpha \cos \varphi , \qquad y = \beta \sin \varphi .$$

que le problème des arithmodistances pour cette arithmoellipse et un arithmopoint général de son plan se traduit par l'équation

$$\frac{\beta \sin \varphi - b}{\alpha \cos \varphi - a} = \operatorname{tang} \theta \ ;$$

trois paramètres arbitraires, les rapports des quatre nombres rationnels a, b, α et β, assurent à cette équation arithmotrigonométrique une assez grande généralité. Elle contient en effet comme cas particulier deux de ceux qui vont faire l'objet de considérations spéciales (paragraphe 86) et auxquelles conduit la détermination de certaines espèces d'arithmotriangles héroniens :

$$\frac{\sin \varphi}{\operatorname{tang} \theta} = \text{const.} \ .$$

$$\frac{\operatorname{tang} \varphi}{\operatorname{tang} \theta} = \text{const.} \ .$$

84. — Le problème des triangles télémétriques m'a tout naturellement amené aux paragraphes 67 et 68 à rechercher s'il existait ou non des arithmotriangles héroniens dont deux côtés soient dans un rapport donné *a priori*.

Proposons-nous d'une manière générale de rechercher *tous les arithmotriangles héroniens dont les côtés* a, b, c *satisfont à une condition donnée :*

$$f(a, b, c) = 0 \ .$$

D'après les formules du paragraphe 10, il faut donc déterminer trois nombres rationnels R, x, et y, satisfaisant aux inégalités

$$\mathrm{R} > 0 \ , \qquad \frac{1}{\sqrt{3}} > z > 0 \ , \qquad \sqrt{1 + z^2} - z > y > z \ ,$$

et reliés entre eux par la relation :

$$f\left[4\mathrm{R}\frac{(y + z)(1 - yz)}{(1 + y^2)(1 + z^2)} \ , \quad 4\mathrm{R} \cdot \frac{y}{1 + y^2} \ , \quad 4\mathrm{R} \cdot \frac{z}{1 + z^2}\right] = 0 \ .$$

Cette dernière équation représente, dans un système de coordonnées y, z et R, une certaine surface. D'où il résulte

que le *problème considéré de détermination d'arithmotriangles héroniens est équivalent à l'étude arithmogéométrique d'une surface de l'espace ordinaire.*

Il n'est guère possible de s'étendre davantage sur un problème aussi général ; pour aller plus loin, il est nécessaire de le particulariser.

Parmi les cas particuliers remarquables, il convient de signaler en première ligne celui d'une condition homogène. Lorsque la relation imposée

$$f(a\,,\ b\,,\ c) = 0$$

est homogène, le problème général, susceptible d'être associé à l'étude d'une surface, dégénère en un *problème d'arithmogéométrie autour d'une courbe plane.* Les coordonnées d'un certain plan étant x et z, cette courbe est celle que représente l'équation

$$f[(y+z)(1-yz)\ ,\ \ y(1+z^2)\ ,\ \ z(1+y^2)] = 0\ .$$

85. — Dans ce même cas d'une relation homogène entre les côtés de l'arithmotriangle héronien, cette relation imposée peut être écrite sous la forme :

$$f(\sin A\ ,\ \ \sin B\ ,\ \ \sin C) = 0\ ;$$

des cas particuliers intéressants s'obtiennent en se bornant à des équations entre sin B et sin C, par exemple.

C'est ainsi que, si la condition imposée est une relation homographique entre sin B et sin C, soit

$$\alpha \sin B\,.\,\sin C + 2\beta \sin B + 2\gamma \sin C + 4\delta = 0\ ,$$

cette condition se traduit par l'équation

$$\alpha yz + \beta y(1+z^2) + \gamma z(1+y^2) + \delta(1+y^2)(1+z^2) = 0\ ,$$

représentative d'une quartique plane. Cette courbe est la projection sur le plan Oyz de la biquadratique gauche, intersection du paraboloïde hyperbolique d'équation

$$yz - x = 0\ ,$$

avec une quadrique d'équation :

$$\delta(x^2+y^2+z^2) + x(\gamma y + \beta z) + \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0\ .$$

Le cas ($\alpha = 0$, $\delta = 0$), c'est-à-dire celui de l'équation arithmotrigonométrique

$$\frac{\sin C}{\sin B} = n ,$$

est précisément celui qui a fait l'objet des considérations du paragraphe 68. Le problème dépend de l'équation

$$y^4 + 2ky^2 + 1 = \square .$$

étudiée par L. Euler, A. Genocchi et Ed. Lucas (cf. § 51).

86. — Soit une équation du type précédent

$$y^4 + 2ky^2 + 1 = \square ;$$

elle peut être mise sous les deux formes suivantes :

$$(y^2 + 1)^2 + 2(k - 1)y^2 = \square .$$
$$(y^2 - 1)^2 + 2(k + 1)y^2 = \square ;$$

dans le cas où $2(k - 1)$ est un carré parfait, soit

$$2(k - 1) = 4\omega^2 ,$$

l'expression

$$\frac{2\omega y}{1 + y^2}$$

peut être égalée à la tangente d'un arc θ tel que $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$ soit rationnel. Si donc on pose

$$y = \operatorname{tang}\frac{\Theta}{2} ,$$

on a

$$\omega . \sin \Theta = \operatorname{tang} \theta ;$$

réciproquement, l'équation précédente dans laquelle ω est un nombre rationnel et Θ et θ deux arcs tels que $\operatorname{tang}\frac{\Theta}{2}$ et $\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}$ soient rationnels est réductible à une équation

$$y^4 + 2ky^2 + 1 = \square .$$

Si d'autre part $2(1 - k)$ est un carré, soit $4\omega^2$, l'expression $\frac{2\omega y}{1 + y^2}$ peut être égalée à un sinus d'un arc θ ; on est ainsi

conduit à une équation

$$\omega \,.\, \sin \Theta = \sin \theta \ ;$$

c'est précisément ce qui se produit au paragraphe 68.

Considérons de même l'équation

$$(y^2 - 4)^2 + 2(k + 1)y^2 = \square \ .$$

Lorsque $2(k + 1)$ est de la forme $-4\omega^2$, l'expression $\frac{2\omega y}{1 - y^2}$, c'est-à-dire $\omega \operatorname{tang} \Theta$ est égale à un sinus et l'on retombe sur une équation

$$\omega \operatorname{tang} \Theta = \sin \theta$$

déjà traitée.

Enfin lorsque $2(k + 1)$ est un carré $4\omega^2$, l'équation n'est autre que

$$\omega \operatorname{tang} \Theta = \operatorname{tang} \theta \ .$$

Celle-ci n'est d'ailleurs pas essentiellement distincte de l'équation

$$\omega \sin \Theta = \sin \theta \ ;$$

cette dernière équation devient, en effet,

$$\omega' \operatorname{tang} \Theta' = \operatorname{tang} \theta' \ ,$$

en posant

$$\Theta' = \frac{\Theta + \theta}{2} \ , \qquad \theta' = \frac{\Theta - \theta}{2} \ , \qquad \omega' = \frac{1 - \omega}{1 + \omega} \ .$$

En résumé, *les équations arithmotrigonométriques*

$$\frac{\sin \Theta}{\sin \theta} = n \ ,$$

$$\frac{\sin \Theta}{\operatorname{tang} \theta} = n \ ,$$

$$\frac{\operatorname{tang} \Theta}{\operatorname{tang} \theta} = n \ ,$$

dans lesquelles n, $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}$ *et* $\operatorname{tang} \frac{\Theta}{2}$ *sont trois nombres rationnels dont le premier est imposé, sont respectivement équivalentes à trois équations eulériennes du type*

$$x^4 + 2kx^2 + 1 = \square \ .$$

87. — Parmi les équations de cette espèce se trouve l'équation

$$x^4 + 14x^2 + 1 = \square$$

qui mérite une mention spéciale, car elle intervient dans l'étude du problème des arithmotriangles télémétriques.

Reprenons, en effet, l'équation trouvée au paragraphe 67 de la quartique plane dont l'étude arithmotrigonométrique est équivalente à l'étude des arithmotriangles télémétriques généraux :

$$(x^2 - y^2)(x^2 - 2y^2) = x^2 + 2y^2 .$$

La condition de rationalité en x^2 de cette équation bicarrée en x est précisément exprimée par l'équation

$$y^4 + 14y^2 + 1 = \square ;$$

en l'écrivant sous la forme

$$(y^2 - 1)^2 + (4y)^2 = \square ,$$

et en posant $y = \operatorname{tang}\frac{\Theta}{2}$, elle équivaut à l'équation arithmotrigonométrique

$$\operatorname{tang} 0 = 2 \operatorname{tang} \Theta .$$

L'équation considérée admet des solutions banales évidentes : $y = 0$, 1 et l'∞ ; elle n'admet pas d'autre solution rationnelle. L'impossibilité de cette équation particulière a été primitivement établie par L. Euler en 1780[1]. Par suite,

Il n'existe aucun triangle télémétrique dont les trois côtés soient rationnels.

88. — Je profite de l'occasion qui m'est offerte pour indiquer une transformation intéressante de ce type d'équation. L. Euler considère l'équation particulière

$$x^4 + 14x^2 + 1 = \square ,$$

---

[1] Cette impossibilité de l'équation

$$x^4 + 14x^2 + 1 = \square$$

est établie à la fin de la pièce *De binis formulis speciei* $x^2 + my^2$ *et* $x^2 + ny^2$ *inter se concordibus et discordibus*, datée de 1780 [*Commentationes arithmeticæ*, t. 2, pp. 406-413] et rappelée (p. 492) au début de celles des deux pièces du même titre : *De casibus quibus hanc formulam* $x^4 + kx^2y^2 + y^4$ *ad quadratum reducere licet* qui est datée de 1782 (t. 2, p. 492).

L'impossibilité de cette équation particulière est rappelée dans le travail déjà cité de A. Genocchi (*C. R.*, t. 78, p. 435).

en même temps que l'équation également impossible

$$x^4 - x^2 + 1 = \square \ ;$$

toutes deux se présentent, en effet, suivant l'ordre que l'on adopte dans l'étude du système des deux équations

$$x^2 + y^2 = \square \qquad x^2 + 4y^2 = \square \ .$$

Euler établit l'impossibilité de toutes ces équations ainsi que de celles qui peuvent en être déduites par transformation : « Denique etiam formulæ biquadraticæ, quæ se obtu-« lerunt, sunt impossibiles. Ita cum ex theoremate sit « $p^4 - p^2q^2 + q^4 = \square$ impossibilis, impossibilis quoque « erit hæc forma $p^4 + 14p^2q^2 + q^4 = \square$, hincque etiam « plures aliæ formulæ, quæ per transformationem hinc for-« mari possunt. » Il ne semble point qu'il ait aperçu la possibilité de transformer l'une en l'autre par une transformation simple ces deux équations

$$x^4 + 14x^2 + 1 = \square \ . \qquad x^4 - x^2 + 1 = \square \ .$$

Cette transformation n'est autre que la transformation homographique

$$x = \frac{1 - x'}{1 + x'} \ .$$

Soit généralement, en effet, une équation

$$x^4 + 2kx^2 + 1 = \square \ ;$$

la transformation ci-dessus lui fait correspondre l'équation

$$x^4 + 2k'x^2 + 1 = \square \ ,$$

et la correspondance est réciproque. Entre les nombres k et k' existe la correspondance involutive

$$(k + 1)(k' + 1) \mp 4 = 0 \ ;$$

tout particulièrement pour $k = +7$, on obtient $k' = -\frac{1}{2}$.

89. — Arithmotriangles héroniens dont la somme des carrés de deux cotés est un carré. — Il s'agit de rechercher tous les arithmotriangles héroniens, généralisant les

arithmotriangles pythagoriques, tels que la somme des carrés de deux côtés, b et c par exemple, soit un carré :

$$b^2 + c^2 = \square .$$

On a donc

$$\sin^2 B + \sin^2 C = \square ,$$

c'est-à-dire encore

$$\left(\frac{1 + y^2}{y}\right)^2 + \left(\frac{1 + z^2}{z}\right)^2 = \square .$$

Cette dernière équation a été rencontrée par L. Euler[1] qui en a donné, en 1773, la solution

$$y = \frac{4t}{t^2 - 1} , \quad z = \frac{3t^2 + 1}{t(t^2 + 3)} ,$$

en fonction d'un paramètre rationnel t quelconque.

90. — Qu'il me soit permis, à ce sujet, de placer ici quelques observations sur les *Commentationes arithmeticæ*.

Déjà en maintes occasions, j'ai mentionné le nom d'Euler parmi ceux des géomètres qui ont étudié certaines figures simples sous le point de vue arithmogéométrique. Les questions d'analyse indéterminée traitées dans les admirables *Commentationes arithmeticæ*, dont la lecture est facile et captivante, sont de deux espèces. Les unes sont de nature géométrique : triangles héroniens, triangles à médianes rationnelles, triangles rectangles dont l'hypoténuse est un carré parfait ainsi que la somme des cathètes, parallélépipèdes rectangles dont les arêtes et les diagonales des faces sont commensurables, etc.

A côté de ces questions essentiellement arithmogéométriques, résolues totalement ou partiellement par des considérations purement arithmétiques, se placent des questions de pure analyse indéterminée, telles que l'étude de l'équation

$$x^4 + kx^2 + 1 = \square ,$$

dont il a été question ci-dessus (aux paragraphes 51 et 71 notamment). Rien dans l'œuvre d'Euler ne permet de détermi-

[1] Commentationes arithmeticæ, Miscellanea analytica, 15 novembre 1773, tomus posterior, Petropoli, 1849, pp. 44-52. Le problème ci-dessus considéré est traité aux pp. 46-47.

ner l'origine de ces questions : les a-t-il considérées comme de simples généralisations de l'équation de BRAHMAGUPTA-FERMAT

$$ax^2 + bx + c = \square ,$$

ou les a-t-il rencontrées à l'occasion d'études relatives à des problèmes géométriques du genre précédent, problèmes auxquels il n'a pas cru devoir faire allusion dans sa rédaction définitive ? Il semble difficile de solutionner cette question d'origine, car il insiste fréquemment sur le caractère analytique de ces recherches qui *constituent un prolongement de l'analyse diophantine.*

Il semble pourtant difficile d'attribuer une origine de ce genre à des équations telles que celle,

$$\left(\frac{x^2+1}{x}\right)^2 + \left(\frac{y^2+1}{y}\right)^2 = \square ,$$

de la pièce du 15 novembre 1773. Elle est peut-être née de l'étude d'une figure géométrique dont il ne reste pas trace dans le mémoire d'EULER. Il est fort possible que la généralisation des triangles pythagoriques dont je viens de rattacher l'étude à cette curieuse équation ait été envisagée par le même géomètre qui consacrait plusieurs mémoires aux équations

$$b^2 + c^2 - 2a^2 = \square$$

des arithmotriangles à médianes rationnelles (voir § 98) et aux équations

$$b^2 + c^2 - a^2 = \square , \text{ etc.}$$

(voir § 100) dont la liaison avec les précédentes est évidente. Il en est de même des équations du système

$$x^2 + y^2 = \square ,$$
$$x^2 + 4y^2 = \square ,$$

dont il vient d'être question à propos des arithmotriangles télémétriques (voir § 88) et qui sont manifestement celles qui traduisent analytiquement le problème des arithmotriangles pythagoriques à deux médianes rationnelles (voir § 99).

Le problème des arithmodistances pour un arithmotriangle donné.

91. — Les côtés d'un triangle étant mesurés rationnellement, s'il existe dans le plan du triangle un seul point dont les trois distances aux côtés soient rationnelles, ce triangle est de toute nécessité un arithmotriangle héronien.

Si, conformément aux conclusions du paragraphe 20, l'arithmotriangle héronien est défini par trois arithmodirigées quelconques du plan, tout arithmopoint du plan est alors à des distances rationnelles des côtés du triangle.

Voilà donc un problème d'arithmogéométrie simplement et complètement résolu. Il y a lieu de se poser d'une manière analogue le problème suivant que j'appellerai par la suite *problème des arithmodistances pour un arithmotriangle :*

Etant donné un arithmotriangle quelconque, c'est-à-dire un triangle à côtés commensurables, déterminer les points de son plan qui sont situés à des distances rationnelles de ses trois sommets.

92. — Le quadrilatère rationnel. — Ce problème important doit être rattaché au problème du *quadrilatère rationnel*, c'est-à-dire du quadrilatère à côtés et à diagonales commensurables. Dans le cas actuel, trois sommets du quadrilatère rationnel sont imposés.

Le premier quadrilatère rationnel considéré fut celui de *Brahmagupta* (paragraphe 30) : ce quadrilatère rationnel est inscriptible dans un cercle.

L'étude du quadrilatère rationnel le plus général semble avoir été faite pour la première fois en 1848, par E.-E. Kummer[1] qui a démontré que :

Dans tout quadrilatère à côtés et à diagonales rationnels les diagonales se coupent en parties rationnelles.

Ce résultat essentiel pour la théorie des quadrilatères ra-

---

[1] E.-E. Kummer, Ueber die Vierecke deren Seiten und Diagonalen rational sind, *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Crelle), 37e B., 1848, S. 1-20.

tionnels avait d'ailleurs été déjà signalé par L.-N.-M. Carnot[1] dès 1803 ; le géomètre français forme les expressions des segments des diagonales et il insiste sur le fait que chacun des quatre segments des diagonales s'obtient par une équation du premier degré. Il en est de même, ajoute Carnot, des segments formés sur les côtés par les prolongements d'autres côtés.

La théorie des quadrilatères rationnels, fondée sur le théorème précédent, a été ramenée par Kummer à l'étude d'une équation

$$\left[\alpha x^2 - 2c(\alpha + \gamma)x - \alpha k^2\right]^2 + 4k^2\gamma^2 x^2 = \square ,$$

dans laquelle α, γ, c, k sont des constantes, et par suite aux fonctions elliptiques, comme application d'un mémoire de Jacobi[2] sur les équations

$$a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = \square .$$

93. — Ces résultats relatifs aux quadrilatères rationnels rappelés, je reprends l'étude du problème des arithmodistances aux sommets d'un quadrilatère et vais réduire ce problème aux fonctions elliptiques par une voie plus géométrique.

Si a, b et c sont les côtés de l'arithmotriangle ABC et si x, y et z sont les distances aux trois sommets respectifs A, B et C d'un point M quelconque du plan, ces six longueurs sont liées par la relation

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 & x^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^2 & y^2 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 & z^2 \\ 1 & x^2 & y^2 & z^2 & 0 \end{vmatrix} = 0 ,$$

ou encore après développement du déterminant :

$$\begin{gathered} a^2(x^2 - y^2)(x^2 - z^2) + b^2(y^2 - z^2)(y^2 - x^2) + c^2(z^2 - x^2)(z^2 - y^2) \\ + a^2(a^2 - b^2 - c^2)x^2 + b^2(b^2 - c^2 - a^2)y^2 + c^2(c^2 - a^2 - b^2)z^2 \\ + a^2b^2c^2 = 0 . \end{gathered}$$

---

[1] *Géométrie de position*, Paris, 1803, p. 391-393 (non citée par Kummer).

[2] Jacobi. De usu theoriæ integralium ellipticorum et abelianorum in Analysi Diophantea. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 13e B, 1835, S. 353-355.

Cette condition, nécessaire et suffisante pour que quatre points dont les distances mutuelles sont données, soient situés dans un même plan[1], montre que le problème posé est *équivalent à l'étude arithmogéométrique d'une surface du quatrième degré.*

Avant de pousser plus loin l'étude du problème dans toute sa généralité, il convient de mettre en évidence les solutions particulières dont la connaissance sera ensuite précieuse, puisqu'elle assurera aux biquadratiques gauches génératrices de cette surface l'existence d'arithmopoints particuliers.

94. — Le problème des arithmodistances pour un arithmotriangle quelconque admet une infinité de solutions particulières qu'il est possible de déterminer simplement. *Ce problème est, en effet, résoluble dans le cas le plus général sur le périmètre du triangle.*

Soient a, b, c les côtés du triangle ABC et un point M de l'un des côtés, BC par exemple, situé à des distances rationnelles

$$\mathrm{BM} = \lambda \ ,$$
$$\mathrm{CM} = \lambda - a \ ,$$

des sommets; λ étant un nombre algébrique quelconque, tous les cas possibles de figure correspondent à ces formules. Le point M sera une solution particulière du problème des arithmodistances si sa distance au point A est rationnelle; celle-ci est fournie par la relation de Stewart :

$$c^2 . \mathrm{MC} + b^2 . \mathrm{BM} - a . \overline{\mathrm{AM}}^2 = a . \mathrm{BM} . \mathrm{CM}$$

qui se traduit algébriquement par l'équation

$$b^2\lambda + c^2(a - \lambda) - a\lambda(a - \lambda) = a . \overline{\mathrm{AM}}^2 \ ,$$

c'est-à-dire une équation de Brahmagupta-Fermat du second degré :

$$c^2 + \frac{b^2 - a^2 - c^2}{a}\lambda + \lambda^2 = \overline{\mathrm{AM}}^2 \ .$$

---

[1] Cette relation doit être connue depuis fort longtemps. Elle est formée dans la *Géométrie de position* de Carnot (1803, p. 387-389), rappelée par Fönstemann (Umkehrung des Ptolomäischen Satzes, *Journal de Crelle*, 13e tome, 1835, p. 233-236) d'après l'édition allemande de Schumacker de l'ouvrage précédent et formée encore par Salmon (*Traité de Géométrie analytique à trois dimensions*, 1882, p. 50-51).

Elle admet trois solutions $\lambda = \infty$, $\lambda = 0$ (point B), $\lambda = a$ (point C) connues *a priori;* elle est donc résoluble et sa solution générale en fonction d'un paramètre est :

$$\lambda = \frac{c^2 - t^2}{\frac{a^2 + c^2 - b^2}{a} + 2t} .$$

95. — *Le problème des arithmodistances pour un arithmotriangle quelconque est de même toujours résoluble sur la circonférence du cercle circonscrit au triangle.*

Soient, en effet, x, y et z les distances d'un point M de cette circonférence aux sommets ABC de l'arithmotriangle. Les deux théorèmes de Ptolémée relatifs au quadrilatère inscriptible ABCM se traduisent par les relations

$$cz = ax + by ,$$
$$\frac{c}{z} = \frac{bx + ay}{xy + ab} ;$$

par multiplication membre à membre de ces deux relations, on obtient

$$c^2 = \frac{(ax + by)(bx + ay)}{xy + ab} ,$$

c'est-à-dire

$$x^2 + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{ab} xy + z^2 = c^2 ,$$

ou encore

$$x^2 + 2\cos A \,.\, xy + y^2 = c^2 .$$

Si x et y sont regardées comme des coordonnées ordinaires, cette dernière équation est celle d'une ellipse passant par un certain nombre d'arithmopoints simples : $(x = \pm c,\ y = 0)$, $(x = 0,\ y = \pm c)$, $(x = \pm a,\ y = \mp b)$, $(x = \pm b,\ y = \mp a)$. Il en résulte que cette ellipse est une arithmoconique et que, par suite, x et y peuvent être exprimés rationnellement en fonction d'un paramètre rationnel arbitraire ; la formule

$$cz = ax + by$$

donne ensuite la troisième distance. Telle est la solution simple et complète du problème sur la circonférence circonscrite.

96. — Les résultats qui précèdent sont d'ailleurs liés entre eux d'une manière très simple. Soit tout d'abord une solution D du problème des arithmodistances sur la circonférence circonscrite au triangle ABC. Les segments AB, BC, CA, AD, BD, CD sont, par définition, mesurés par des nombres rationnels. Si E est alors le point de concours des diagonales, AD et BC pour fixer les idées, du quadrilatère inscriptible ABCD, les divers triangles semblables de la figure fournissent des relations qui permettent d'évaluer très simplement les segments de diagonales et de vérifier, pour ce quadrilatère inscriptible, le théorème de Carnot-Kummer. De toute solution du problème des arithmodistances sur la circonférence inscrite au triangle, les alignements avec les sommets A, B et C permettent donc de déduire trois nouvelles solutions situées sur le périmètre du triangle.

Réciproquement d'ailleurs, les mêmes relations simples prouvent que, d'une solution E située sur le périmètre du triangle, il est possible, par alignement avec l'un des sommets, d'en déduire une autre solution D située sur la circonférence circonscrite.

97. — A quels points de la surface du quatrième degré correspondent les solutions particulières dont il vient d'être question ?

Soit tout d'abord une solution sur le côté BC. Les coordonnées x, y, z satisfont alors à l'une des équations

$$\pm y \pm z = a ,$$

correspondant aux trois segments formés par les points B et C sur la droite illimitée qui porte le côté BC et à l'équation qui traduit le théorème de Stewart ; cette dernière est du second degré en x, y et z. Il en résulte qu'aux côtés du triangle correspondent trois coniques de la surface du quatrième ordre et les coniques symétriques de celles-ci par rapport aux plans coordonnés.

Ce sont des arithmoconiques d'après le résultat du paragraphe 95. Il en est de même des courbes qui correspondent aux trois arcs AB, BC et CA de la circonférence circonscrite, d'après les relations qui traduisent les deux théorèmes de Ptolémée.

La solution du problème général des arithmodistances aux sommets d'un arithmotriangle résulte alors des considérations qui précèdent. Soit, en effet, une droite issue d'un sommet, A par exemple, et contenant les deux solutions particulières mais dépendant d'un paramètre arbitraire. D sur le cercle circonscrit et E sur le côté BC. Sur cette droite ADE le problème des arithmodistances s'exprime par les deux équations :

$$\begin{cases} y^2 = b^2 + x^2 - 2bx \cos \beta , \\ z^2 = c^2 + x^2 - 2cx \cos \gamma , \end{cases}$$

β et γ étant les angles de la droite ADE avec les deux côtés partant du sommet A ; les cosinus de ces angles sont rationnels puisque les côtés des triangles ABE et ACE sont rationnels. Les deux équations qui précèdent représentent deux cylindres du second ordre et, par suite, sur la droite considérée ADE, le problème des arithmodistances aux sommets de ABC se rattache à l'étude d'une biquadratique gauche. Cette biquadratique gauche engendre évidemment la surface du quatrième degré, lorsque ADE pivote autour de A.

Sur la surface du quatrième degré attachée au problème des arithmodistances aux sommets d'un triangle, il existe donc une triple infinité (à un paramètre) de biquadratiques gauches. Chacune de ces biquadratiques gauches admet des arithmopoints communs, situés sur les arithmoconiques de la surface.

Arithmotriangles à médianes rationnelles.

98. — Arithmotriangles a médianes rationnelles. D'une manière générale, le centre de gravité de l'aire d'un arithmotriangle n'est pas une solution particulière du problème des arithmodistances attaché a ce triangle, car les médianes ne sont pas généralement mesurées rationnellement. Le difficile problème qui consiste à déterminer les triangles dont les côtés et les médianes sont rationnellement mesurés a été l'objet de toute une série de Mémoires de L. Euler :

a) *Solutio problematis de inveniendo triangulo in quo rectæ ex singulis angulis latera opposita bisecantes sint rationales*

(1772), [Leonhardi Euleri Commentationes arithmeticæ collectæ, tomus prior, Petropoli, 1849, pp. 507-515].

b) *Investigatio trianguli, in quo distantiæ angulorum ab ejus centro gravitatis rationaliter exprimantur* (1778) [ibid., tomus posterior, Petropoli, 1849, pp. 294-301].

c) *Solutio facilior problematis Diophantei circa triangulum, in quo rectæ ex angulis latera opposita bisecantes rationaliter exprimantur* (1779) [ibid., tomus posterior, pp. 362-365].

d) *Problème de géométrie, résolu par l'analyse de Diophante* (1782) [ibid., tomus posterior, pp. 488-491].

Comme solutions simples, Euler donne dans ces divers mémoires les suivantes :

$a = 68$	$b = 87$	$c = 85$	$m_a = 158$	$m_b = 127$	$m_c = 131$
159	325	314	619	377	404
477	277	446	569	861	640

a, b, c étant les côtés et m_a, m_b, m_c les médianes des triangles considérés.

e) Il faut en outre mentionner un fragment relatif à ces mêmes triangles : *Fragmenta commentationis cujusdam majoris, de invenienda relatione inter latera triangulorum quorum area rationaliter exprimi possit* (ibid., tomus posterior, pp. 648-651). La pièce débute par quelques considérations sur les triangles que nous nommons actuellement les arithmotriangles héroniens (pp. 648-649) ; puis Euler étudie, au titre de problème analogue, celui des arithmotriangles à médianes rationnelles (pp. 649-650) : « quod autem illo difficilius est judicandum quoniam non generaliter solvi patitur ».

Ce problème consiste donc à résoudre le système suivant de trois équations

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = \square ,$$
$$2(c^2 + a^2) - b^2 = \square ,$$
$$2(a^2 + b^2) - c^2 = \square .$$

J'observerai que le problème qui consiste à déterminer un arithmotriangle (a, b, c) admettant une médiane rationnelle

(sans se préoccuper de la nature des deux autres) est résoluble de la manière suivante. L'équation du problème

$$2(b^2 + c^2) - a^2 = \square \ .$$

mise sous la forme

$$2(b^2 + c^2) = a^2 + \square \ .$$

est susceptible d'être mise sous la nouvelle forme

$$(b + c)^2 + (b - c)^2 = a^2 + \square \ ;$$

il résulte de la théorie de l'arithmocercle que cette dernière équation admet pour solution générale

$$a = (b + c) \cos \alpha + (b - c) \sin \alpha \ ;$$

b et c restent arbitraires, a est déterminé par cette équation, dans laquelle α est un arc tel que $\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$ est rationnel (je ne discute pas les conditions d'existence du triangle).

Il résulte de la remarque qui précède que, dans tout arithmotriangle à médianes rationnelles, les trois côtés a, b, c sont liés entre eux par trois relations linéaires et homogènes

$$\begin{aligned} a &= (b + c) \cos \alpha + (b - c) \sin \alpha \ , \\ b &= (c + a) \cos \beta + (c - a) \sin \beta \ , \\ c &= (a + b) \cos \gamma + (a - b) \sin \gamma \ , \end{aligned}$$

dans lesquelles $\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2}$, $\operatorname{tang} \frac{\beta}{2}$, $\operatorname{tang} \frac{\gamma}{2}$ sont trois nombres rationnels algébriques

$$\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = x \ , \qquad \operatorname{tang} \frac{\beta}{2} = y \ , \qquad \operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} = z \ ;$$

ces trois nombres sont assujettis à vérifier certaines inégalités assurant l'existence effective du triangle et une relation de compatibilité que je retiendrai seule :

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos \alpha + \sin \alpha & \cos \alpha - \sin \alpha \\ \cos \beta - \sin \beta & -1 & \cos \beta + \sin \beta \\ \cos \gamma + \sin \gamma & \cos \gamma - \sin \gamma & -1 \end{vmatrix} = 0 \ .$$

En posant, pour abréger l'écriture

$$2X = x^2 - 1 \ , \qquad 2Y = y^2 - 1 \ , \qquad 2Z = z^2 - 1 \ ,$$

cette condition prend la forme :

$$\begin{vmatrix} X+1 & X-x & X+x \\ Y+y & Y+1 & Y-y \\ Z-z & Z+z & Z+1 \end{vmatrix} = 0 \ ;$$

par développement du déterminant, cette équation se réduit finalement à celle

$$\begin{aligned} 3xyz(x+y+z) + x(y^2-z^2) + y(z^2-x^2) + z(x^2-y^2) \\ + x^2 + y^2 + z^2 - yz - zx - xy = 1 \ , \end{aligned}$$

d'une surface algébrique du quatrième ordre dépourvue de ligne double.

Il y a, d'après ce qui précède, équivalence entre le problème d'Euler et l'étude arithmogéométrique de la surface précédente. A tout arithmotriangle à médianes simultanément rationnelles correspondent des arithmopoints de la surface, puisque les équations en α, β, γ sont du second degré en x, en y et en z. Inversement à tout arithmopoint de la surface correspond une solution (a, b, c) définie à un même facteur près, dont l'existence correspond à une similitude arbitraire des triangles solutions.

Quant à l'étude arithmogéométrique de la surface mise en évidence, elle est immédiate, si l'on observe que c'est une surface du quatrième degré, admettant d'ailleurs quatre séries de sections planes simples ($x =$ const., $y =$ const., $z =$ const., $x + y + z =$ const.) qui sont des cubiques planes. De tout arithmopoint connu *a priori* ou par un procédé quelconque, se déduisent donc immédiatement quatre cubiques non complanes douées d'arithmopoints.

99. — Il est intéressant de noter en passant que *dans tout arithmotriangle pythagorique la médiane relative à l'hypoténuse est seule rationnelle.* Cette question n'est point traitée

dans les *Commentationes arithmeticæ*, mais elle conduit à l'étude des équations simultanées

$$x^2 + y^2 = \square ,$$
$$x^2 + 4y^2 = \square ,$$

entre les cathètes d'un triangle, ces équations exprimant respectivement que le triangle est rectangle et que l'une des médianes relatives à l'une des cathètes est rationnelle. Ce système impossible a été considéré par Euler, dans le supplément de la pièce du 5 juin 1780, citée au paragraphe 87, à l'occasion de l'inexistence d'arithmotriangles télémétriques.

100. — Le problème traité par Euler dans son Mémoire qui a pour titre *Recherches sur le problème de trois nombres carrés tels que la somme de deux quelconques, moins le troisième, fasse un nombre carré* (Leonhardi Euleri, Commentationes arithmeitcæ collectæ, tomus posterior, Petropoli, 1849, pp. 603-616) se rattache manifestement par analogie au problème des arithmotriangles à médianes rationnelles. Les équations sont ici

$$b^2 + c^2 - a^2 = \square = p^2 ,$$
$$c^2 + a^2 - b^2 = \square = q^2 ,$$
$$a^2 + b^2 - c^2 = \square = r^2 ;$$

Euler en signale toute une série de solutions particulières, telles que

	I	II	III	IV	V
$a =$	241	397	425	595	493
$b =$	269	593	373	769	797
$c =$	149	707	205	965	937

auxquelles correspondent respectivement les nombres :

	I	II	III	IV	V
$p =$	191	833	23	1081	1127
$q =$	89	553	289	833	697
$r =$	329	97	527	119	289 .

Ici encore, en posant

$$a = b \cos \alpha + c \sin \alpha ,$$
$$b = c \cos \beta + a \sin \beta ,$$
$$c = a \cos \gamma + b \sin \gamma ,$$

avec $\operatorname{tang} \frac{\alpha}{2} = x$, $\operatorname{tang} \frac{\beta}{2} = y$, $\operatorname{tang} \frac{\gamma}{2} = z$ le problème se ramène à l'étude arithmogéométrique d'une surface dont le premier membre de l'équation est le développement du déterminant exprimant la compatibilité entre les relations qui précèdent :

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \beta & -1 & \cos \beta \\ \cos \gamma & \sin \gamma & -1 \end{vmatrix} = 0 ;$$

cette surface est représentée par l'équation du sixième degré :

$$x^2 y^2 z^2 + xyz(x + y + z) - 4xyz - (x - y)(y - z)(z - x)$$
$$+ x^2 + y^2 + z^2 - x - y - z = 0 .$$

Quoique le degré de cette surface soit aussi élevé, il se trouve qu'en raison de la nature de sa courbe à l'infini, une grande simplification se produit ici. Les sections par les plans parallèles à l'un quelconque des plans coordonnés sont, en effet, des quartiques planes. En outre, une telle quartique se présente manifestement comme étant la projection d'une biquadratique gauche. Si l'on considère, en effet, la quartique située dans le plan de cote z_0 et si l'on pose

$$xy = t ,$$

la quartique considérée n'est autre que la projection de la biquadratique gauche, intersection du paraboloïde hyperbolique représenté par cette dernière équation en x, y et t par une autre quadrique dont l'équation est moins simple. De la connaissance d'une solution particulière du problème il est donc possible de déduire une infinité de nouvelles solutions, comme application de la théorie des fonctions elliptiques.

(*A suivre*)

NOTE SUR LA GÉOMÉTRIE DU TRIANGLE ET DU TÉTRAÈDRE

PAR

M.-Fr. Daniëls (Fribourg, Suisse).

Nous développons dans cette note quelques théorèmes bien simples, échappés à ce qu'il paraît à l'attention des géomètres qui se sont occupés de la géométrie du triangle et du tétraèdre.

1. — *Lorsque aux droites sphériques ou grands cercles* $p_i (i = 1, 2, 3)$ *qui relient un point quelconque* $P(\mathfrak{r}_0)$ *de la surface sphérique aux sommets* $A_i(\mathfrak{r}_i)$ *d'un triangle sphérique on élève en* P *même des normales* q_i, *ces nouvelles droites sphériques coupent les côtés correspondants du triangle en trois points* Q_i *qui sont collinéaires.*

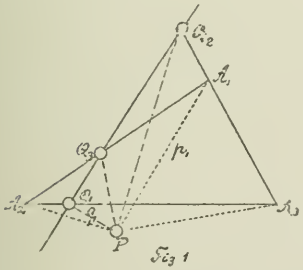


Fig 1

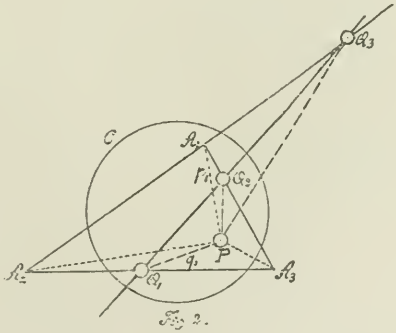


Fig 2.

On peut remplacer la surface sphérique par un plan (fig. 1), et les normales q_i par des droites conjuguées aux p_i par rapport à une conique C sphérique ou plane (fig. 2).

Ce théorème est une conséquence immédiate de l'identité vectorielle :

$$V\mathfrak{l}_1 . \mathfrak{r} . \mathfrak{r} . \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 + V\mathfrak{l}_2 . \mathfrak{r} . \mathfrak{r} . \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 + V\mathfrak{l}_3 . \mathfrak{r} . \mathfrak{r} . \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 \equiv 0$$

où, pour plus de simplicité, les virgules remplacent encore des V, signes de la multiplication vectorielle ou externe. En effet, nous trouvons, si les P_i sont les vecteurs des côtés du triangle, successivement pour le premier sommet A_1, pour la droite p_1, pour la normale q_1 passant par P, et pour son point d'intersection Q_1 avec le premier côté les vecteurs suivants[1] :

$$A_1 \equiv V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 \ , \quad p_1 \equiv V\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 \ , \quad q_1 \equiv V\mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3$$

$$Q_1 \equiv V\mathfrak{l}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 \ .$$

Ce dernier point[2] donnant avec les deux autres qui s'en déduisent par permutation cyclique des indices une somme qui est identiquement nulle, les trois points Q_i sont bien collinéaires, c. q. f. d.

2. — *Lorsque aux droites* p_i *qui relient un point quelconque de l'espace* P *aux sommets* A_i *d'un triangle plan, on construit au point* P *même des plans normaux* π_i, *ces nouveaux plans coupent les côtés correspondants du triangle en trois points* Q_i *qui sont collinéaires.*

On peut remplacer les plans normaux π_i par des plans conjugués aux droites p_i par rapport à une quadrique.

Pour démontrer ce théorème on peut se servir avec avantage des méthodes de Grassmann. En effet, on a successivement pour la droite p_1, pour la droite conjuguée p_1', pour le plan π_1 passant par cette dernière droite et le point P, enfin pour l'intersection Q_1 de ce plan avec le premier côté du triangle

$$p_1 \equiv [A_1P] \ , \quad p_1' \equiv | \, [A_1P] \ , \quad \pi_1 \equiv [P \ \ | \, A_1P]$$

$$Q_1 \equiv [A_2A_3 \ \ P \ | \, A_1P] = (A_3P \mid A_1P)A_2 - (A_2P \mid A_1P)A_3 \ .$$

Or ce dernier point, donnant avec les deux autres, qu'on en déduit par permutation cyclique une somme qui est iden-

---

[1] Voir *l'Enseignement Mathématique*, VII, n° 3 : *Les coordonnées projectives sur la sphère* ou *Essai de géométrie sphérique*, Fribourg 1907.

[2] En développant on trouve

$$V\mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{l}_3)\mathfrak{l}_2 - (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{l}_2)\mathfrak{l}_3 \ ; \quad V\mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{l}_3) \ \ V\mathfrak{r}\mathfrak{l}_2 - (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{l}_2)V\mathfrak{r}\mathfrak{l}_3$$

$$V\mathfrak{l}_1, \mathfrak{r}, \mathfrak{r}, \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = [(\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{l}_3)(\mathfrak{l}_1\cdot\mathfrak{l}_2) - (\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{l}_2)(\mathfrak{l}_1\cdot\mathfrak{l}_3)]\mathfrak{r} + (\mathfrak{l}_1\cdot\mathfrak{r})(\mathfrak{l}_2\cdot\mathfrak{r}\cdot\mathfrak{r}_3 - (\mathfrak{l}_1\cdot\mathfrak{r})(\mathfrak{l}_3\cdot\mathfrak{r})\mathfrak{r}_2 \ .$$

tiquement nulle, les trois points Q_i sont bien collinéaires. C. q. f. d.

On arrive à une autre démonstration de ce théorème, dont le premier constitue, au moins pour le plan, un cas spécial, en prenant le point P comme centre d'une sphère et en considérant avec le triangle sphérique produit par les droites PA_i le trialatère polaire produit par les plans π_i. Nous nous proposons de revenir dans une note ultérieure sur certains théorèmes similaires, où le point est remplacé par une droite quelconque ou un plan quelconque.

3. — *Lorsqu'aux droites* p_i *qui relient un point quelconque* P *aux sommets* A_i ($i = 1, 2, 3, 4$) *d'un tétraèdre, on construit au point* P *même les plans normaux* π_i, *ces nouveaux plans coupent les faces correspondantes du tétraèdre selon quatre droites* q_i, *génératrices d'un hyperboloïde.*

Au lieu des plans normaux π_i on peut prendre des plans conjugués aux droites p_i par rapport à une quadrique.

Ici encore les méthodes de Grassmann fournissent une démonstration bien simple. On trouve, en effet, successivement pour la droite p_1, pour la droite conjuguée p'_1, pour le plan π_1 et pour son intersection q_1 avec la première face du tétraèdre :

$$p_1 \equiv [A_1 P] \ , \quad p'_1 \equiv | [A_1 P] \ , \quad \pi_1 \equiv [P \mid A_1 P]$$

$$q_1 \equiv [A_2 A_3 A_4 \ P \mid A_1 P] \ .$$

Or cette droite et les trois autres qui s'en déduisent par permutation cyclique des indices peuvent s'écrire :

$$\begin{aligned}
&(A_1 P \mid A_2 P)[A_3 A_4] + (A_1 P \mid A_3 P)[A_4 A_2] + (A_1 P \mid A_4 P)[A_2 A_3] \\
&- (A_2 P \mid A_3 P)[A_4 A_1] - (A_2 P \mid A_4 P)[A_1 A_3] - (A_2 P \mid A_1 P)[A_3 A_4] \\
&(A_3 P \mid A_4 P)[A_1 A_2] + (A_3 P \mid A_1 P)[A_2 A_4] + (A_3 P \mid A_2 P)[A_4 A_1] \\
&- (A_4 P \mid A_1 P)[A_2 A_3] - (A_4 P \mid A_2 P)[A_3 A_1] - (A_4 P \mid A_3 P)[A_1 A_2] \ .
\end{aligned}$$

Leur somme est nulle ; les quatre droites sont donc des génératrices d'un hyperboloïde.

Fribourg, le 30 septembre 1917.

SUR UNE GÉNÉRALISATION DU THÉORÈME DE STEINER-HABICH CONCERNANT LES ROULETTES ET LES PODAIRES APPLIQUÉE AUX ORBIFORMES D'EULER

PAR

L. Braude (Bierstadt).

---

1. — On connaît le théorème du géomètre suisse Steiner[1] sur les roulettes à base rectiligne (R) et les podaires Π, théorème demandant l'égalité des arcs correspondants de ces deux courbes dérivées d'une courbe plane (Γ). Nous avons généralisé ce théorème dans notre thèse[2] en faisant rouler une courbe Γ dont l'équation intrinsèque est

$$(\Gamma) \qquad R = f(s) \ , \tag{1}$$

sur la courbe à *courbure proportionnelle* :

$$(\Gamma_1) \qquad R' = \mu \, . \, f(s) \tag{2}$$

μ étant constant. L'arc de la podaire de Γ ou de la roulette à base rectiligne étant[3]

$$\sigma = \int \frac{\rho}{R} ds \ , \tag{3}$$

celui de la roulette de Γ sur Γ_1 :

$$\sigma' = \int \rho \left[\frac{1}{R} \pm \frac{1}{R'} \right] ds = \frac{1 \pm \mu}{\mu} \int \frac{\rho}{R} ds \tag{4}$$

on reconnaît bien facilement cette généralisation.

---

[1] J. Steiner, *Journal de Crelle*, 21, 1840, p. 101. Voir aussi H. Wieleitner, *Spez. ebene Kurven*, Coll. Schubert, p. 308.

[2] L. Braude, *Ueber einige Verallgemeinerungen des Begriffs der Mannheimschen Kurve*, Heidelberg, 1911, p. 38.

[3] H. Wieleitner, *loc. cit.* p. 182 ; voir aussi notre petit opuscule : *Les coordonnées intrinsèques, théorie et application*, coll. Scientia, Gauthier-Villars, Paris 1914, p. 82.

2. D'après Habich[1] on peut faire rouler la roulette à base rectiligne (Φ) sur la podaire (Π) de (Γ) de sorte que la base passe toujours par le pôle de Π ; par inversion du roulement, le pôle de Π parcourt la base droite de (Φ) ; enfin, en faisant rouler Π ou (Φ) sur une courbe quelconque (Γ_1), la roulette du pôle de (Π) est identique à l'enveloppe de la base de (Φ). Nous y mentionnons encore la variation de ce théorème, en regardant (Φ) et (Π) comme courbe de Mannheim ou comme radiale d'une autre courbe (C_1) ; cette variation fut trouvée presque en même temps par M. G.-B. Santangelo[2] et par moi.

3. — Dans un article[3] donné aux *Monatsh. d. M. u. Ph.*, nous avons généralisé le théorème de Habich, en faisant rouler une courbe (Γ) sur un nombre quelconque de courbes planes (B_1), (B_2), ... (B_n), pour avoir comme roulette d'un point P fixe sur le plan de Γ les courbes (Φ_1), (Φ_2), ... (Φ_n). De même, on peut engendrer cette famille de courbes (Φ_k) comme enveloppes d'une courbe (Ψ) fixe sur le plan de (Γ) : la courbe (Ψ) touche son enveloppe toujours aux points, dont la normale passe par le centre de courbure de (Γ), correspondant au point de contact P de (Γ) et de (B_k). De là il résulte que les coordonnées de ces points au système (tangente, normale) de (B_k) sont toujours les mêmes, indépendants de la courbe (B_k) elle-même ; enfin nous trouvons notre généralisation :

Quand on fait rouler les courbes (B_k) *sur une courbe quelconque* C, *on aura toujours la même enveloppe*

$$E[C\,;\ B_k(\Psi,\ \Gamma)]$$

de la courbe Φ_k.

Exemples : a). La roulette du centre d'une circonférence roulant sur la courbe (B) est une courbe parallèle ; de là il résulte : *Quand on fait rouler une courbe* (B) *sur une courbe* (C), *l'enveloppe d'une courbe parallèle au profil générateur*

---

[1] Voir Wieleitner, *loc. cit.*, p. 310 ; L. Braude, *loc. cit.*, note 3, p. 89-91.

[2] G. B. Santangelo, *Sulla curva di Mannheim*, etc. *Rend. Circ. Mat. Palermo XXIX*, 1910 ; voir de même notre thèse, p. 44.

[3] *Ueber eine Verallgemeinerung des Steiner-Habichschen Satzes über Roll und Fusspunktkurven*, Monatshefte d. Math. u. Phys. 1918.

est une courbe parallèle à la base ; de ce théorème, on connaît bien les cas où (B) est une droite ou un point[1].

b) De même, on trouve[6] : *Quand on fait rouler une courbe* (B) *sur une courbe* (C), *l'enveloppe d'une développante de* (B) *est une développante de* (C).

c) La roulette du pôle d'une spirale logarithmique

$$R = s \operatorname{tg} \alpha$$

est la développoïde (α) d'une développante de la base curviligne[2]; de là, il résulte : *Quand on fait rouler une courbe* (B) *sur la courbe* (C), *l'enveloppe d'une développoïde* (α) *d'une développante* (B^1) *de* (B) *est la développoïde* (α), *d'une développante de* (C).

d) Entre la courbe de Mannheim, la radiale et l'arcuïde, il y a la contenance suivante[3] : *Quand on fait rouler la radiale sur la courbe de Mannheim de sorte que la roulette du pôle est la base rectiligne* (*axe des* x), *on aura comme enveloppe d'une droite fixe menée par le pôle de la radiale une arcuïde ;* la variation de la droite correspond à une transformation traitée d'une manière approfondie par M. E. Kœstlin[4]. Mais quand on fait rouler la radiale de (Γ) sur la développée intermédiaire d'une courbe à courbure proportionnelle (Γ_1) rectifiable par les mêmes arcs, on aura[5] comme enveloppe d'une droite menée par le pôle une causticoïde de Γ' ; de là il résulte : *Quand on fait rouler sur la développée intermédiaire de* (Γ) *la courbe de Mannheim d'une courbe à courbure proportionnelle, l'enveloppe d'une arcuïde est une causticoïde* de la courbe (Γ). Par exemple, on peut faire rouler la spirale logarithmique, représentant la base curviligne de l'arcuïde dont l'équation intrinsèque[6] est

$$R = ce^{m\varphi} \cos n\varphi \qquad (C) \ , \tag{5}$$

[1] H. Wieleitner, *loc. cit.* p. 186.

[2] Pour la base circulaire, voir H. Wieleitner, p. 322 ; pour la base générale voir notre thèse, p. 46 ; L. Braude, *loc. cit.* 3, p. 92.

[3] L. Braude, Enseign. Math., XVI, 1914, p. 360 ; *loc. cit.* 3, p. 97.

[4] H. Wieleitner, *loc. cit.*, p. 384 et suiv.

[5] L. Braude, *loc. cit.* 3, p. 40 (12). L. Braude. *Sur quelques généralisations d'une transformation de M. E. Kœstlin*, Annales Acad. Porto, IX, 1914, *loc. cit.* 3, p. 17.

[6] L. Braude, *Sur quelques généralisations d'une transformation de M. E. Kœstlin*, Ann. Acad. Porto, IX, 1914 ; *loc. cit.* 3, p. 17.

sur une autre spirale, pour engendrer une courbe du même type comme enveloppe de (C).

4. — Appliquons ce théorème aux orbiformes d'Euler, courbes définies par le grand géomètre à l'aide des deux propriétés *que chaque normale est en même temps binormale, de sorte que la corde comprise entre ces deux points soit toujours constante,* propriétés supposées d'abord comme caractéristique pour la circonférence seule. On aura par exemple une telle courbe en faisant rouler une cardioïde à l'extérieur d'une hypocycloïde à un nombre impair de rebroussements réels. En supposant comme base l'hypocycloïde tricuspidale (de Steiner) :

$$R = a \cos 3\varphi \ , \tag{6}$$

l'équation intrinsèque de l'orbiforme est

$$R = \frac{a}{3}(1 + \cos 3\varphi) \ . \tag{7}$$

Quand on fait rouler une telle orbiforme sur une courbe quelconque (Γ), l'enveloppe de l'orbiforme est une courbe parallèle à (Γ). Soit Γ par exemple la développante d'une circonférence ; alors l'enveloppe est une courbe parallèle, c'est-à-dire congruente à la base.

Faisons maintenant rouler une orbiforme sur une autre orbiforme ; alors l'enveloppe est toujours une orbiforme si les deux courbes roulent à courbure opposée ; quand elles roulent en même courbure on aura des orbiformes seulement en évitant l'intervalle pourvu de rebroussements.

Supposons enfin les deux orbiformes congruentes entre elles ; *alors on aura, au cas du même sens de courbure, la base elle-même comme enveloppe.* La position initiale est sans aucune influence sur la nature de l'enveloppe ; naturellement, au dernier cas il faut éviter que les deux courbes se touchent complètement, autrement il n'y a aucun roulement. L'une des deux orbiformes peut être une circonférence ; mais quand on a deux circonférences congruentes en même sens de courbure, on peut les faire glisser l'une sur l'autre, ce qui est impossible aux autres orbiformes.

NOTE SUR LES PERMUTATIONS

(Définitions, classifications et transformations)

PAR

A. Aubry (Dijon).

---

1. — Peut-on déterminer une permutation par la connaissance des positions, les unes par rapport aux autres, des diverses lettres, toutes différentes, qui la composent ?

1° Indiquons par la *duade cb* le fait que, dans la permutation, la lettre *c* est placée à gauche de *b*. La première lettre de la duade est la *prime*, la seconde l'*ultime*.

Si les deux lettres *c* et *b* se suivent immédiatement dans la permutation, la duade est dite *immédiate*. Elle est *médiate* dans le cas contraire.

2° Si une même lettre est plus d'une fois prime ou ultime, les duades ne sont pas toutes immédiates. Ainsi *ab* et *ac* ne peuvent être toutes deux immédiates ; en outre on ne sait si on a *bc* ou *cb* : les relations *ab*, *ac* ne peuvent donner que des renseignements redondants ou incomplets.

3° L'existence des duades *ab*, *bc*, *cd* ... *ef*, *fg* entraîne celle de la duade *ag*.

Une duade médiate est la résultante de plusieurs duades médiates ou immédiates. Une duade immédiate ne peut se remplacer par d'autres duades.

4° Appelons *chaîne* une suite de duades dont la prime de chacune est identique à l'ultime de la précédente. La chaîne *ab*, *bc*, *cd* s'écrira par abréviation : chaîne *abcd*.

Les deux couples *ab*, *ba* ne peuvent coexister ; en général, une chaîne ne peut commencer et finir par la même lettre. Outre *ab* et *ba*, on citera les chaînes absurdes

ac, *be*, *ca*, *db* : chaîne *aca*,

ce, *df*, *bc*, *ab*, *ea* : chaîne *abcea*.

5° Si une chaîne de $n - 1$ duades contient n lettres, ces duades

sont immédiates. Soit la chaîne $abc \ldots de$ et $\alpha, \beta, \ldots \gamma, \ldots \delta$, le nombre des lettres existant entre a et b, entre b et c, ... entre d et e ; on a :

$$1 + (\alpha + \beta + \ldots + \delta) + (n - 2) + 1 = n \,, \quad \text{d'où} \quad \alpha + \ldots + \delta = 0 \,;$$

ce dernier résultat ne peut avoir lieu que si $\alpha = \beta = \ldots \delta = 0$. Ainsi la permutation correspondante n'est autre que $abc \ldots de$.

6° Ainsi une permutation de n lettres est nécessairement et suffisamment déterminée par $n - 1$ duades dont toutes les primes sont différentes et se retrouvent sauf une, dans les ultimes, lesquelles par suite contiennent une lettre qui ne se retrouve pas dans les primes. Par exemple les duades de, af, cb, ea, bd déterminent la chaîne $cbdeaf$.

7° Si ces conditions ne sont pas toutes remplies, la permutation ne peut généralement pas être déterminée. Ainsi les duades ae, ba, dc, df, ef fournissent la chaîne $baef$, d'où, à cause de df, les quatre formules possibles

$$dbaef \,, \quad bdaef \,, \quad badef \,, \quad baedf \,,$$

dans lesquelles c doit se placer en respectant la condition dc, ce qui donne $5 + 4 + 3 + 2 = 14$ solutions.

2. — Cette définition de la permutation en suggère une autre demandant également $n - 1$ conditions et consistant dans l'indication des nombres de lettres contenues entre les termes des diverses duades données.

I. Ainsi les duades ab, cd, ef, avec cette indication que les deux premières *encadrent*[1] respectivement quatre et deux lettres, déterminent la permutation $acefdb$.

II. Les duades ab, cd, ef encadrant respectivement une, deux et trois lettres, déterminent-elles une permutation ? On pourrait employer l'analyse indéterminée, comme au n° 1, 5°. Mais la recherche directe est plus courte. On a les dispositions

$$a * b \,, \quad c ** d \,, \quad e *** f \,,$$

les astérisques désignant des lettres inconnues. On verra aisément qu'il ne peut y avoir que les deux solutions $eacbfd$, $ceadbf$.

III. Plus généralement on peut se demander quelles conditions doivent remplir les nombres $\alpha, \beta, \ldots \delta$ pour que la formule $a_\alpha b_\beta c \ldots d_\delta e$ représente une permutation des lettres $abc \ldots de$ ($\alpha, \beta, \ldots \delta$ désignent les nombres de lettres existant entre a et b, etc.).

---

[1] On veut dire par là qu'il y a quatre lettres entre a et b et deux entre c et d.

Considérons le groupe $a_\alpha b_\beta c$; il y a entre a et c :

$\alpha + \beta + 1$ lettres si α et β sont positifs, ou si α est positif et β négatif avec $\alpha + \beta < 0$.

$\alpha + \beta - 1$ » » » négatifs, » » » » $\alpha + \beta > 0$.[2]

On peut tirer de là successivement toutes les lettres de la permutation.

IV. Mais on arrivera bien plus aisément au but en mettant la formule sous une autre forme, où chaque lettre est surmontée d'un nombre indiquant sa distance à la lettre a. La formule *ebdgafc*, qui s'écrirait $a_{-2} b_4 c_{-3} d_{-1} e_4 f_{-1} g$, s'écrirait ainsi

$$\overset{0}{a}\ \overset{-3}{b}\ \overset{2}{c}\ \overset{-2}{d}\ \overset{4}{e}\ \overset{1}{f}\ \overset{-1}{g}$$

Cette expression montre immédiatement que la première lettre est a et la dernière e ; que toutes les places sont occupées et qu'il n'y a pas de lettres doublées ; que les voisines de d, par exemple, sont b et g, etc. On arrivera de la manière qui suit à la transformation indiquée :

$$a_{-2} b = \overset{0}{a}\ \overset{-3}{b}\ , \quad b_4 c = \overset{0}{b}\ \overset{5}{c} = \overset{-3}{b}\ \overset{2}{c}\ , \quad c_{-3} d = \overset{0}{c}\ \overset{-4}{d} = \overset{2}{c}\ \overset{-2}{d}\ , \ldots$$

3. — La question suivante proposée dans le t. IV de la *Nouv. Corresp. Math.* et à laquelle il ne semble pas avoir été répondu, pose une nouvelle définition des permutations.

Déterminer une permutation des n premiers entiers, sachant combien il y a avant 1 de nombres plus grands que lui, combien avant 2 plus grands que lui, etc. (Brux.)

Représentons la permutation 6513274 par la formule [2323100], indiquant qu'il y a deux chiffres avant 1 et plus grands que lui, etc. Les permutations 1234567 et 7654321 s'écriront ainsi [0000000] [et 6543210.]

Appelons en général $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu, \nu$ les nombres des termes précédant 1, 2, 3, ... n et qui leur sont supérieurs. α peut recevoir toutes les valeurs entières de 0 à $n - 1$; β, toutes celles de 0 à $n - 2$; γ, toutes celles de 0 à $n - 3$; ... μ, les deux valeurs 0 et 1 ; ν, la valeur unique 0. De la sorte, les n valeurs de α *associées* aux $n - 1$ valeurs de β, ... aux deux valeurs de μ et à l'unique valeur de ν, donnent bien $n!$ formules de forme $[\alpha \ldots \nu]$, en nombre égal à celui des permutations des nombres 1, 2, ... n. Toutes ces associations sont évidemment distinctes, de même que les permutations des n premiers entiers ; et comme elles sont en même nombre de part et d'autre, elles se correspondent de manière à se

[2] Quant au cas $a_\alpha b_{-\alpha} c$, il est évidemment impossible.

définir mutuellement. Cette propriété a été démontrée autrement par J. Bourget (*N. A.* 1871.)

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une formule $[\alpha\beta \ldots \nu]$ représente une permutation sont ainsi :

$$0 \leqq \alpha \leqq n-1\ ,\quad 0 \leqq \beta \leqq n-2.\ \ldots\ 0 \leqq \mu \leqq 1\ ,\quad 0 = \nu\ .$$

Le rang de 1 est $\alpha + 1$;

celui de 2 est $\beta + 1$ si $\alpha > \beta$, et $\beta + 2$ si $\alpha \leqq \beta$;

..... 3 ... $\gamma + 1$ si $\alpha > \gamma$ et $\beta > \gamma$; $\beta + 2$ si $\alpha \leqq \gamma$ ou $\beta \leqq \gamma$;

$\gamma + 3$ si $\alpha \leqq \gamma$ et $\beta \leqq \gamma$;

. . . . . .

Soit la formule [012343210] ; on l'assimilera à la formule générale $[\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\zeta\mu\theta\iota]$. Le rang de 1 est $\alpha + 1 = 0 + 1 = 1$; le rang de 2 est $\beta + 2 = 1 + 2 = 3$, puisque $\alpha < 3$; ... le rang de 6 est $\zeta + 5 = 3 + 5 = 8$, puisque les quatre nombres $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sont $\leqq \zeta$ et que $\varepsilon > 5$; le rang de 7 est $\mu + 4 = 2 + 4 = 6$, puisque α, β, γ sont $\leqq \mu$; le rang de 8 est $\theta + 3 = 1 + 3 = 4$, puisque α et β sont $\leqq 2$; le rang de 9 est $\iota + 2 = 0 + 2$, puisque $\alpha \leqq \iota$. On trouve ainsi la permutation 192837465.

4. — *Voisinages.* Les questions de ce genre se voient pour la première fois chez Frenicle (*Abr. des Comb.* 1693), qui se propose de trouver le nombre de permutations des huit premières lettres, telles que b, c, d ne soient jamais ensemble, et celles où deux lettres données ne se trouvent ni au commencement ni à la fin. Les problèmes qui suivent donneront une idée de cette théorie.

I. Il n'est pas possible de déterminer une liste de permutations de $2n$ lettres telles que chacune soit à côté de toutes les autres et une fois seulement. Il y a, en effet, $C_{n,2}$ voisinages à réaliser, et comme chaque permutation donne $n - 1$ voisinages, il faut envisager $\frac{n}{2}$ permutations, ce qui montre d'abord que n doit être pair ; mais les voisinages de a par exemple sont au nombre de $n - 1$ et demandent par conséquent $n - 1$ permutations. — Ed. Lucas (*Récr.* II, 175) indique à tort ce problème comme possible.

II. Le nombre de manières d'assembler n majuscules et n minuscules de manière qu'il n'y ait pas deux majuscules ou deux minuscules consécutives est $2\,(n\,!)^2$ (Ed. Lucas).

III. Trouver le nombre de manières dont n hommes et leurs femmes peuvent se placer sur une ligne, de manière qu'aucun homme ne soit auprès de sa femme (Ed. Lucas). Ce problème n'a pas encore été résolu.

5. — *Rappel de diverses propriétés des permutations.* I. Toute permutation de n lettres $ab \ldots kl$ a sa *retournée* $lk \ldots ba$. Elle donne naissance à $n - 1$ permutations *tournantes*.

II. Le nombre des permutations de n lettres est égal à $n!$

III. Le plus souvent, les lettres représentent des nombres; dans ce cas, une permutation quelconque $ab \ldots l$ a sa *complémentaire* $(s - a)(s - b) \ldots (s - l)$, s désignant la somme $a + b + \ldots + l$. Ainsi la somme de tous les nombres de neuf chiffres s'obtient en multipliant par $\frac{1}{2}9!$ la somme des deux nombres 123456789 et 987654321. Ce problème est d'origine indienne.

IV. Une permutation *symétrique* est celle où deux lettres symétriquement placées dans l'ordre naturel, le sont également dans cette permutation. Pour $2n$ ou $2n + 1$ lettres, le nombre de ces permutations est $n!2^n$ (Ed. Lucas).

V. *Figuration des permutations.* M. Laisant a remarqué qu'on peut représenter les permutations par les trajets d'un point A à un point N, en passant par un point B réuni à A par une ligne, un point C réuni à B par deux lignes, etc.

Ed. Lucas les figure sur des *échiquiers* par des jetons dont les emplacements sont définis au moyen de coordonnées cartésiennes: la permutation 3142, par exemple, étant figurée par des jetons placés aux points $1 - 3$, $2 - 1$, $3 - 4$, $4 - 2$. Il examine ces figurations suivant diverses conditions de symétrie.

La recherche du nombre des permutations où il n'y a qu'une lettre dans chaque rangée, dans chaque colonne et dans chaque parallèle aux diagonales de l'échiquier, constitue le célèbre *problème des reines*, résolu seulement pour les onze premiers échiquiers. (Voir Ed. Lucas, *l. cit.*, Rouse-Ball, *Récr.* et Ahrens, *Math. Unt. u. Spiel.* 1910.)

VI. *Abaques.* On appelle ainsi un échiquier dont les n^2 cases contiennent n fois la série des n premiers entiers. On en a un exemple dans les *carrés latins*[1], où chaque rangée, comme chaque colonne, contient une permutation de ces n nombres.

On en a un encore plus remarquable dans le *carré d'Euler*[2] formé de n^2 jetons de n couleurs et de n valeurs différentes et tellement placés que chaque couleur et chaque valeur se trouvent représentées dans les n rangées et les n colonnes. Bachet avait déjà donné celui de 4^2 jetons; Euler a commencé l'étude générale de ces carrés et a soupçonné l'impossibilité de celui de 6^2, ce qui

---

[1] Ainsi nommés par Euler dans son célèbre mémoire de Vlissingen, mais connus avant lui. G. Tarry les appelle *permutations carrées*: il en prévoyait la généralisation en permutations *cubiques, quartiques*, etc. On a aussi appelé permutations des 2me, 3me, ... ordres, les nombres $(n!)!$, $((n!)!)!$, etc. ainsi que les suivants $n!! = 1!\,2! \ldots n!$, $n!!! = 1!!\,2!! \ldots$

[2] Appelés *carrés symboliques* par M. Barbette. On les appelle aussi *carrés des* n^2 *officiers* (de n armes différentes et de n grades différents. Euler, *loc. cit.*).

a été vérifié par G. Tarry. M. Barbette a poussé très loin l'étude de ces carrés. (*Carrés magiques*, Liége, 1912.)

Le carré ci-dessous est dû à Euler ; il donne en outre dans chacune des *diagonales complètes*[1] la collection des cinq couleurs et des cinq valeurs.

$$\begin{array}{ccccc} 1_1 & 2_5 & 3_4 & 4_3 & 5_2 \\ 3_3 & 4_2 & 5_1 & 1_5 & 2_4 \\ 5_5 & 1_4 & 2_3 & 3_2 & 4_1 \\ 2_2 & 3_1 & 4_5 & 5_4 & 1_3 \\ 4_4 & 5_3 & 1_2 & 2_1 & 3_5 \end{array}$$

On peut d'ailleurs, par la méthode des *constellations* de G. Tarry, trouver une foule de collections semblables : supposons le carré indéfiniment reproduit à droite et au-dessous et découpons dans un carton cinq ouvertures correspondant aux termes 2_2, 5_3, 3_4, 1_5 et 4_1, par exemple, qui renferment la collection ; dans chacune des positions sur le carré indéfini, on verra une collection semblable.

D'un carré d'Euler on déduit aisément un carré magique en considérant les termes du premier comme étant écrits dans la base n.

A signaler encore la *table de division* (mod. n) où le terme (x, y) est $\equiv x(x, y)$ et la *table de multiplication* (mod. n) définie par la relation $(x, y) \equiv xy$. (Voir les *Fonc. arith.* de G. Arnoux.)

VII. *Permutations réciproques.* Jacobi a appelé ainsi les permutations telles que le $\alpha^{\text{ème}}$ terme de la première étant β, le $\beta^{\text{ème}}$ de la seconde est α. Cette considération est due à Euler (*l. cit.*).

Le nombre des permutations qui sont leurs propres réciproques est donné par la récurrence

$$u_1 = 1\,,\ u_2 = 2\,,\ u_k = u_{k-1} + (k-1)\,u_{k-2}\,.$$

VIII. Le nombre total des manières dont on peut effectuer le produit de n nombres différents est

$$\frac{(2n-3)!\,2^{n-1}}{2.4.6\ldots(2n-4)}\,. \qquad \text{(Catalan).}$$

IX. On appelle *inversion* le cas d'une duade qui n'est pas écrite dans l'ordre naturel : ainsi la permutation *bdac* comporte les trois inversions *ba*, *da*, *dc*. Une permutation est de première ou de seconde classe selon qu'elle présente un nombre pair ou un nombre impair d'inversions. Les deux théorèmes suivants sont le fondement de la théorie des *déterminants*.

[1] Telle que 5_5, 4_2, 3_4, 2_1, 1_3.

Une permutation quelconque change de classe si on échange deux lettres. Les deux classes renferment un même nombre de permutations. (Bezout.)

X. Déterminer les permutations telles que, pour f et g quelconques, la différence de la $f^{\text{ème}}$ et de la $g^{\text{ème}}$ ne soit pas égale à $f - g$, en valeur absolue. Question identique au problème des reines (V).

XI. Rangeons les permutations de n lettres dans l'ordre où on les trouve successivement. Quelle est la $k^{\text{ème}}$? Quel est le rang d'une permutation donnée ? (J. Bourget, *l. cit.*)

XII. *Permutations discordantes.* Le nombre des permutations où aucune lettre n'est à sa place est donné par la formule suivante, due à Laplace, mais entrevue par Euler :

$$n! - C_{n,1}(n-1)! + C_{n,2}(n-2)! - \ldots$$

XIII. Les 2^{n+1} premiers entiers — de même que les $2^n(2k+1)$ — peuvent se partager en deux suites donnant une égalité au $n^{\text{ème}}$ degré. (G. Tarry.)

XIV. Le nombre des permutations de n lettres présentant k inversions est égal au coefficient de x^k dans le produit

$$(1+x)(1+x+x^2)(1+x+x^2+x^3)\ldots \qquad \text{(O. Rodrigues.)}$$

XV. Trouver le nombre des dispositions rectilignes d'un jeu de domino rangé suivant les règles du jeu (Reiss.) Aux doubles près, cette question revient à la recherche du nombre de manières de tracer d'un seul trait un heptagone et ses diagonales (Laisant). (Voir Ed. Lucas. *op. cit.* II et IV.)

XVI. *Problème de Kirkman.* Voir dans les *Récr.* d'Ed. Lucas et de Rouse-Ball la solution de divers cas simples de ce problème, qui dans toute sa généralité consiste à disposer mn lettres en groupes de n, de manière que chaque lettre ne soit qu'une seule fois en présence de chacune des autres. (Voir aussi *Encycl. des sc. math.* I, 1, p. 79.)

XVII. *Problème du cavalier.* Il s'agit de faire parcourir au cavalier toutes les cases de l'échiquier, en suivant la règle du jeu. (Voir Ed. Lucas, Rouse-Ball et Ahrens, *op. cit.*)

6. — *Transformations des permutations. Echanges.* La transformation la plus simple consiste dans l'*échange* de deux lettres données ; on représente cette opération par la notation (a, b) laquelle indique que a prend la place de b et b, celle de a.

Par exemple *dgefabc* se transforme en *abcdefg* par les échanges (a, d), (b, g), (c, e), (d, f), (e, f) et (f, g), que pour abréger on désignera en disant qu'on fait subir à *dgefabc* l'*opération* $(a, d)(b, g)(c, e)(d, f)(e, f)(f, g)$.

Cinq hommes et leurs femmes sont disposés dans l'ordre

ABCDE*abcde* ; leur faire échanger leurs places de manière que chaque mari soit à côté de sa femme. On trouvera les solutions par l'analyse indéterminée ; l'une d'elles s'indique par l'opération $(a, \mathrm{B})(c, \mathrm{D})(d, \mathrm{E})(d, b)$. On voit que d change deux fois ; on remarquera aussi que l'ordre des échanges (a, B) et (c, D) est indifférent, ce qui tient à ce qu'ils n'ont pas de lettres communes ; mais il n'en est pas de même des deux autres qui donnent des résultats différents si on exécute d'abord (d, b).

Il faut ainsi toujours effectuer les échanges dans l'ordre indiqué.

A remarquer également que l'opération (a,b) est la même que (b,a) et que l'opération (a,b) faite deux fois laisse la permutation inchangée.

7. — *Déplacements.* Pour faire venir a entre h et d dans *hdgefabc*, on peut effectuer l'opération $(a, f)(a, e)(a, g)(a, d)$, ce qui revient à retirer a et repousser d'un rang l'ensemble des lettres d, g, e, f, et mettre a à l'endroit laissé libre. On appellera *déplacement* cette opération ; la formule qui la représente sera donnée plus loin.

Etant donné la permutation ABC*abc*$\alpha\beta\gamma$, la transformer par déplacements sur deux lettres à la fois, en une autre où les A soient ensemble, de même que les B et les C. On exécute les déplacements sur BCa, sur $bc\alpha$, sur BCα, $bc\beta$ et Cβb, toujours vers la gauche : on a alors A$a\alpha$B$b\beta$C$c\gamma$.

8. — *Transformations diverses.* Le nombre des permutations de n lettres étant limité, si par une certaine transformation la permutation P_0 devient P_1, puis si, par une transformation identique, celle-ci devient P_2, et ainsi de suite, il arrivéra qu'on retombera sur une transformée P_k identique à une permutation déjà trouvée P_h. On aura ainsi :

$$\mathrm{P}_{k-1} = \mathrm{P}_{h-1}, \ \mathrm{P}_{k-2} = \mathrm{P}_{h-2}, \ldots \mathrm{P}_{k-h} = \mathrm{P}_0 .$$

Ainsi la permutation proposée fournit un certain nombre $k - h$ de transformées revenant périodiquement. Il est commode d'écrire ces $k - h$ permutations les unes sous les autres en un tableau synoptique.

I. Transformons, à l'aide de la formule $x \equiv 2k + 3 \pmod{7}$, les termes de la permutation $k = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$; puis, de la même manière, ceux de la transformée $y \equiv 2x + 3 = 2^2k + 6 + 3$, puis $z \equiv 2y + 3 = 2^3k + 12 + 6 + 3$, et ainsi de suite ; on aura :

$$\begin{array}{l} k = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \\ x = 5\ 7\ 2\ 4\ 6\ 1\ 3 \\ y = 6\ 3\ 7\ 4\ 1\ 5\ 2 \\ z = 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \end{array}$$

La période comprend trois permutations.

II. La transformation d'Euler indiquée au n° 5, VII, donne une période de deux permutations.

III. D'un paquet de jetons 1, 2, 3, ... n, on met le premier sous le dernier, on élimine le deuxième, on met le troisième sous le paquet, puis le quatrième sur celui qui a déjà été retiré, et ainsi de suite. Quelle sera la permutation obtenue par les éliminations successivement effectuées ? (Ribi.)

Soit $n = 10$. Après dix opérations, on aura éliminé 2, 4, 6, 8, 10 et il restera 1, 3, 5, 7, 9 ; après quatre opérations sur ces derniers on éliminera 3, 7, et il restera 9, 1, 5 ; après deux opérations sur ces derniers on élimine 1 et il reste 5, 9 ; on élimine 9 et il reste 5, qu'on élimine. On a ainsi la permutation 2, 4, 6, 8, 10, 3, 7, 1, 9, 5. (Voir Barbette, *Piles merv.*, 1912.)

IV. *Sextines.* Mettons la dernière lettre d'une permutation avant la première ; l'avant-dernière immédiatement avant la deuxième, l'antépénultième immédiatement avant la troisième, et ainsi de suite ; nous aurons la sextine de cette permutation. Agissons de même sur cette sextine, puis sur ce second résultat et ainsi de suite ; nous retrouverons la proposée après un nombre k d'opérations dépendant du nombre n des lettres. Voici la valeur de k pour les seize premières valeurs de n :

$n =$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$k =$	1	2	3	3	5	6	4	4	9	6	11	10	9	14	5	15

(Prompt.)

V. *Battements de Monge*[1]. Soit un paquet de n cartes ; mettons la deuxième sur la première, la quatrième sur la deuxième, la sixième sur la quatrième et ainsi de suite ; on aura une transformation qu'on pourra représenter par

$$n\,,\ n-2\,,\ n-4\,,\ldots\ 4\,,\ 2\,,\ 1\,,\ 3\,,\ 5\,,\ \ldots\ n-3\,,\ n-1\,,$$

ou

$$n-1\,,\ n-3\,,\ \ldots\ 4\,,\ 2\,,\ 1\,,\ 3\,,\ \ldots\ n-1\,,\ n\,,$$

selon que n est pair ou impair.

Selon que h est pair ou impair, la $h^{\text{ème}}$ carte devient, si n est pair,

$$\text{la } \left(\frac{n+2-h}{2}\right)^{\text{ème}} \text{ ou la } \left(\frac{n+1+h}{2}\right)^{\text{ème}}. \qquad (\alpha)$$

Pour n impair, on ajoutera $n - \frac{1}{2}$ aux nombres (α).

[1] En réalité cette manière de battre les cartes se voit déjà chez Bachet.

Opérons de la même manière sur cette transformée, puis sur la deuxième transformée, et ainsi de suite ; nous retrouverons la proposée après un nombre k d'opérations qui sera

$$\begin{array}{lcccccccccccc} \text{pour } n = & 2 & 4 & 6 & 8 & 10 & 12 & 14 & 16 & 18 & 20 & 50 & 52 & 2^l \\ k = & 2 & 3 & 6 & 4 & 6 & 10 & 14 & 5 & 18 & 20 & 50 & 12 & l+1 \,. \end{array}$$

Sans écrire les diverses permutations, on calculera aisément les emplacements successivement occupés par une même carte. Ainsi, à l'aide des formules (α), on verra que, pour $n = 8$, la première carte devient la cinquième, la septième, la huitième et la première ; — que, si n est de la forme $6x + 4$, la $(2x + 2)^{\text{ème}}$ occupera constamment le même rang ; — que si n est de la forme $10x + 2$, les $(2x + 1)^{\text{ème}}$ et $(6x + 2)^{\text{ème}}$ échangent leurs places alternativement.

9. *Substitutions.* Cauchy a édifié une vaste et importante théorie, dont les préliminaires, qu'on traitera d'après lui, appartiennent au sujet du présent article, et où le grand analyste envisage les transformations des permutations en général comme un nouveau calcul ayant ses règles et ses notations propres. La figuration d'une telle transformation s'appelle une *substitution*. La transformation de *abcdefghi* en *cdifebhga*, par exemple, se représentera ainsi :

$$\begin{pmatrix} abcdefghi \\ cdifebhga \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad (a\,,\ c\,,\ i)(b\,,\ d\,,\ f)(h\,,\ g)(e)\ . \qquad (\alpha)$$

Cette dernière notation est la généralisation de celle des échanges : elle indique que a se change en c, c en i, i en a ; b en d, d en f, f en b ; h en g, g en h ; e ne changeant pas de place. La première notation a ce désavantage de ne présenter qu'implicitement la substitution, objet de l'étude, et d'en présenter explicitement, au contraire, une simple application arbitraire ; aussi elle n'est guère utilisée que pour faciliter l'écriture de la seconde. Ainsi $\begin{pmatrix} abcdef \\ fedcba \end{pmatrix}$ fait voir immédiatement que la substitution $(a, f)(b, e)(c, d)$ change *abcdef* en sa retournée *fedcba*, et $\begin{pmatrix} abcdef \\ bcdefa \end{pmatrix}$, que $(a\,,\ b\,,\ c\,,\ d\,,\ e\,,\ f)$ change la même permutation en sa première tournante *bcdefa*.

Dans le premier exemple, la substitution se compose de quatre *cycles*, ou si l'on veut, de trois, le cycle (e) pouvant en effet être supprimé de la formule, comme inutile. Quand, comme dans le second exemple, il y a plusieurs cycles contenant chacun un même nombre de lettres, la substitution est dite *régulière*. Quand il n'y a qu'un cycle, comme dans le troisième exemple, elle est dite *circulaire*.

Autres exemples : La substitution (a, b, c) appliquée à *cdba* change celle-ci en *adcb*. La substitution permettant de passer de *dbeac* à *adbec*, ou de *ceadfb* à *cbeafd* est $(d, a, e, b)(c)(f)$, ou simplement (a, e, b, d).

Une substitution ne peut se décomposer en cycles que d'une seule manière; et une même lettre ne peut se trouver dans deux cycles. D'ailleurs les cycles peuvent s'écrire dans un ordre quelconque, et dans un cycle donné on peut mettre la première une lettre quelconque.

La substitution $\begin{pmatrix} cdifebhga \\ abcdefghi \end{pmatrix} = (a, i, c)(b, f, d)(h, g)(e)$, qui transforme *cdifebhga* en *abcdefghi* est dite l'*inverse* de la substitution (α), parce qu'elle permet de passer de la transformée *cdi* ... *a* à l'aide de (α) à la permutation primitive *abc* ... *i*. L'inverse de (α) s'écrit en *renversant* les lettres dans les cycles de (α).

10. — On appelle *application* de la substitution S à la permutation P, ce que celle-ci devient quand on fait subir aux lettres qui la forment les modifications indiquées par S : ainsi l'application de $(a, b)(c, d)$ à *abcd* est *badc*.

On appelle *produit* de deux substitutions $S = (a, b, c, d)$, $S' = (a, c, b, d)$, et on note

$$SS' = (a, b, c, d).(a, c, b, d)\ ^{1}$$

la substitution (a, d, c) qui, appliquée à une permutation déterminée, donnerait la même transformée qu'en y appliquant d'abord la substitution S, puis au résultat la substitution S'. Ainsi le produit $SS' = (a, d, c)$ est la substitution qu'on trouve en changeant

a en *b*	(1re substitution),	puis	*b* en *d*	(2me substitution)
d en *a*	»	»	*a* en *c*	»
c en *d*	»	»	*d* en *a*	»
b en *c*	»	»	*c* en *b*	»

De là, la notion du produit $SS'S''$ ... de plusieurs substitutions ; — de la *puissance* S^k d'une substitution S ; — de la puissance $S^0 = 1$, ou *substitution-unité*, qui laisse sans changement la permutation et pourrait s'écrire $(a)(b)(c)$ ... La substitution inverse S^{-1} est ainsi celle qui, multipliée par S donne la substitution-unité : par exemple, comme on a :

$$(a, c, d, b, e).(a, e, b, d, c) = (a)(c)(d)(b) = S^0,$$

---

[1] Le point, indice de multiplication, n'est pas indispensable ; on ne peut confondre un produit de deux substitutions circulaires avec une substitution formée de deux cycles, car, dans ce dernier cas, les deux cycles n'ont pas de lettres communes.

les deux facteurs du premier membre sont les inverses l'un de l'autre.

Si S permet de passer de la permutation P à la permutation Q, on pourra la représenter par $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, de sorte que son inverse S^{-1} sera représentée par $\begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}$.

11. — On donnera ici, d'après Cauchy, les périodes des puissances de diverses substitutions :

$(a, b), (a)(b) = 1$ [1] . $(a, b, c), (a, c, b), (a)(b)(c) = 1$,

$(a, b, c, d), (a, c)(b, d), (a, d, c, b), 1$.

$(a, b, c, d, e), (a, c, e, b, d), (a, d, b, e, c), (a, e, d, c, b), 1$.

$(a, b, c, d, e, f), (a, c, e)(b, d, f), (a, d)(b, e)(c, f),$
$(a, e, c)(b, d, f), (a, f, e, d, c, b), 1$.

$(a, b, c)(d, e), (a, c, b)(d, e), (a, b, c), (a, c, b)(d, e), 1$.

$(a, b, c, d)(e, f), (a, c)(b, d), (a, d, c, b)(e, f), 1$.

Les puissances d'une substitution sont visiblement périodiques, puisque le nombre des formes qu'elles peuvent avoir est limité ; il est même aisé de voir que la période d'une substitution circulaire comprend un nombre de termes égal à celui des lettres, ce qu'on vérifiera en remarquant que, pour cinq lettres, par exemple, les puissances sont :

$$\begin{pmatrix} abcde \\ abcde \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcde \\ bcdea \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcde \\ cdeab \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcde \\ deabc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcde \\ eabcd \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abcde \\ abcde \end{pmatrix}, \ldots$$

Si une substitution circulaire a n lettres, on a ainsi $S^n = 1$, d'où $S^{n-1}S = 1$; donc S^{n-1} est l'inverse de S. En général S^{n-k} est l'inverse de S^k : la deuxième partie de la période se déduit donc de la première en renversant les termes des substitutions de celles-ci.

A remarquer en outre, d'une part, que toute substitution régulière est une puissance d'une certaine substitution circulaire, par exemple :

$$a, b, \ldots l)(a', b', \ldots l')(a'', b'', \ldots l'') = (a, a', a'', b, b', b'', \ldots l, l', l'')^3 ;$$

ensuite qu'une puissance de substitution circulaire n'est elle-même circulaire que si l'exposant est premier avec le nombre des lettres, en particulier si ce dernier est premier.

---

[1] La substitution (a, b) est sa propre inverse, c'est-à-dire que $(a, b)^2 = 1$, ce qu'on a vu déjà au n° 6

On remarquera que la puissance d'une substitution non circulaire est le produit des puissances de ses différents cycles.

12. — Sans changer le résultat, on peut, dans un produit de substitutions, $SS'S''$ ... effectuer les multiplications à mesure qu'elles se présentent ou les grouper comme ci-dessous :

$$SS'S''S''' \ldots = S(S'S'')S''' \ldots = SS'(S''S''') \ldots$$

Mais, et c'est en quoi cette opération diffère de la multiplication ordinaire, on ne peut, dans le calcul, changer l'ordre des opérations [1]. Les substitutions SS' et $S'S$ sont en général différentes ; dans le cas tout à fait exceptionnel où les deux produits sont identiques, les substitutions sont dites *échangeables ;* on en a des exemples simples : dans le cas où aucune lettre de S ne se retrouve pas dans S' et réciproquement, par exemple :

$$(a, b).(c, d) = (c, d).(a, b) .$$

et, dans le produit de puissances d'une même substitution, comme

$$S^2S^3 = SS(SSS) = (SSS)(SS) = S^3S^2 .$$

Voici encore un exemple de Cauchy : soient

$$S = (a, b, c, d)(e, f, g, h) , \quad S' = (a, c, e, g)(b, f, d, h) ,$$

on aura :

$$SS' = S'S = (a, f)(b, g)(c, h)(d, e) .$$

Ainsi étant donné deux expressions équivalentes d'une substitution, $R = S$, on peut multiplier les deux membres par une même substitution T, mais, dans les deux cas, *à droite* ou *à gauche*. Ainsi on aura :

$$TR = TS \quad \text{et} \quad RT = ST ,$$

mais non

$$TR = ST \quad \text{ni} \quad RT = TS .$$

13. — De $RS = T$ et $RS' = T$, on tire, en multipliant à gauche par R^{-1},

$$S = R^{-1}T = S' .$$

Donc les produits d'une substitution par deux autres sont distincts et les produits d'une substitution par celles d'un même nombre de lettres les reproduisent toutes.

En outre le nombre de substitutions de n lettres est $n!$ puisque c'est celui des substitutions qui peuvent changer une permutation en toutes les autres.

---

[1] On dit, dans ce cas, que la multiplication n'est pas *commutative*.

14. — I. Si les substitutions S et T sont échangeables avec R, il en est de même de leur produit. En effet des relations $SR = RS$ et $TR = RT$, on tire

$$(ST)R = S(TR) = S(RT) = (SR)T = (RS)T = R(ST) .$$

II. Si en outre $UR = RU$, on a $(STU)R = R(STU)$. Et ainsi de suite.

III. Soient les relations $RS = T$, $SR = U$, on aura :

$$TR = RU, \quad T^2R = RSRSR = RU^2, \ \ldots, \ T^kR = RU^k \ ;$$

donc l'une des relations $T^k = 1$, $U^k = 1$ entraîne l'autre.

15. — Les produits $TS = U$ et $ST = V$ donnent des substitutions semblables. Considérons une permutation quelconque P, des lettres a, b, c, ... en nombre au moins égal à celui des lettres de U, et appelons Q la permutation qui s'en déduit quand on lui fait subir cette substitution. On a : $U = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$.

Supposons que a', b', c', ... représentent ces mêmes lettres dans un ordre différent, et soient P' et Q' ce que deviennent P et Q quand on y accentue les lettres ; la substitution $\begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix}$ sera évidemment semblable à U. Or la substitution qui change P en P' change aussi Q en Q' : appelons-là T ; on aura :

$$T = \begin{pmatrix} P \\ P' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix}, \quad \text{d'où} \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} P' \\ P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q' \\ Q \end{pmatrix} .$$

On tire de là

$$\begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P' \\ P \end{pmatrix}\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q \\ Q' \end{pmatrix}^{1} = T^{-1}UT = T^{-1}(TS)T = ST = V .$$

Cette substitution V est donc semblable à U [2].

---

[1] On veut dire par là que la substitution $\begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix}$ revient à substituer la permutation P à P', puis Q à P, enfin Q' à Q.

[2] Cette ingénieuse démonstration de CAUCHY peut être présentée ainsi d'après M. JORDAN. Eliminons S ; il vient $V = T^{-1}UT$; soit $(a, b, c, \ldots)$ un des cycles de U ; si l'application de T à la permutation $abc\ldots$ la transforme en $a'b'c'\ldots$, celle de T^{-1} change $a'b'c'\ldots$ en $abc\ldots$ et par conséquent celle de V à $a'b'c'\ldots$ la transforme successivement en $abc\ldots$, en $bc\ldots a$ et $b'c'\ldots a'$: on peut donc poser :

$$V = \begin{pmatrix} a'b'c'\ldots \\ b'c'\ldots a' \end{pmatrix} = (a', b', c', \ldots) .$$

V est donc le résultat de l'application de T à U.

Exemples : pour

$S = (a, b)$, $T = (b, c)$, on a : $U = (a, c, b)$, $V = (a, b, c)$;

$S = (a, b, c, d)$, $T = (a, c)$, on a : $U = (a, b)(c, d)$, $V = (a, d)(b, c)$;

$S = (a, b, c, d)$, $T = (a, b)$, on a : $U = (b, c, d)$, $V = (a, c, d)$;

$S = (a, b, c, d, e, f)$, $T = (b, c, d, e)$, on a : $U = (a, c, e, f)(b, d)$,

$V = (a, b, d, f)(c, e)$.

Cor. I. La substitution $T^{-1}UT$, semblable à U, s'obtient en effectuant la substitution T dans les cycles de U. En effet, cette opération[1] équivaut à l'accentuation des lettres dont il est parlé plus haut.

II. Si $TU = UT$, on a : $U = T^{-1}UT$. Ainsi, pour que T et U soient échangeables, il faut et il suffit que U ne change pas quand on lui applique T.

III. Si la substitution V est semblable à $U = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$, il existe une substitution T telle que $TU = VT$, et par suite toute substitution semblable à U est de la forme $T^{-1}UT$. En effet l'expression $\begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix}$ représente toute substitution semblable à U : on peut donc la supposer égale à V.

(A suivre.)

---

[1] Cette transformation d'une substitution est analogue à l'application d'une substitution à une permutation, — et par suite on peut la désigner sous le nom d'*application* de la substitution T à la substitution U.

L'ÉQUATION DE FERMAT

$$a^{p-1} = pk_p(a) + 1 \ .$$

PAR

H. E. Hansen (Copenhague).

Fermat a donné cette équation, d'où il résulte que, si pour p on choisit un nombre premier et pour a un nombre entier non divisible par p, on aura toujours un nombre entier comme valeur de $k_p(a)$. Jusqu'ici on n'a pas su déterminer ce nombre comme fonction entière et rationnelle de a et de p[1].

C'est d'une telle détermination qu'il s'agit ici.

Pour $a > p$, on peut poser $a = pn + x$, en admettant $n = 1, 2, 3 \ldots$, $x = 1, 2, 3 \ldots (p-1)$.

Alors on a

$$k_p(a) = \frac{(pn)^{p-1} + \frac{p-1}{1}(pn)^{p-2}.x + \frac{(p-1)(p-2)}{1.2}(pn)^{p-3}.x^2 + \ldots + \frac{p-1}{1}(pn)x^{p-2}}{p} + \frac{x^{p-1}-1}{p} \ . \qquad \text{(A)}$$

Le *premier* terme du second membre de cette équation sera entier et la valeur ainsi que la forme en sont déterminées pour les données p, n et x; il s'ensuit que seulement il importe de déterminer le *second* terme, c'est-à-dire d'examiner de plus près l'équation

$$a^{p-1} = pk_p(a) + 1$$

pour $a = 1, 2, 3 \ldots (p-1)$.

---

[1] Ceci n'est pas tout à fait exact : Plana (*Mém. de l'Ac. des Sc. de Turin*, 1859) a donné la formule suivante, où s_n est mis pour $1^n + 2^n + 3^n + \ldots + (a-1)^n$,

$$\frac{a^{p-1}-1}{p} = \frac{1}{pa}(s_1 + C_{p-1,2}\, s_2 + C_{p-1,3}\, s_3 + \ldots) \ ;$$

en outre, Lagrange, dans son calcul des développements de $(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1)$; et Jacobi, dans sa recherche des valeurs de p qui donnent $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^2}$, se sont occupés de sujets analogues. N. D. L. R.

Quand p est un nombre premier — et seulement dans ce cas[1] — de $a^{p-1} = pk + 1$, par une division $p - 1$ fois réitérée avec a, on peut former les équations :

$$
\begin{aligned}
a^{p-2} &= pk_1 + r_1 \\
a^{p-3} &= pk_2 + r_2 \\
&\cdots\cdots \\
a^{p-\alpha-1} &= pk_\alpha + r_\alpha \\
a^{p-\alpha-2} &= pk_{\alpha+1} + r_{\alpha+1} \\
&\cdots\cdots \\
a^2 &= pk_{p-3} + r_{p-3} \\
a &= pk_{p-2} + r_{p-2} \\
1 &= pk_{p-1} + 1
\end{aligned}
$$

où l'on a k_α égal à $ak_{\alpha+1}$ plus un nombre ω, déterminé par le *plus petit* multiple ωp qui, additionné à r_α, donne une somme qui — à son tour — divisée par a, donne le quotient entier $r_{\alpha+1}$.

Il est ainsi évident que si dans

$$a^{p-\alpha-1} = pk_\alpha + r_\alpha$$

on met $k_\alpha = ak_{\alpha+1} + \omega$, on aura

$$a^{p-\alpha-1} = pak_{\alpha+1} + \omega p + r_\alpha \,.$$

ou, après division par a,

$$a^{p-\alpha-2} = pk_{\alpha+1} + \frac{\omega p + r_\alpha}{a} = pk_{\alpha+1} + r_{\alpha+1} \,.$$

Dans tout cela nous n'avons encore rien dit sur les valeurs des $k, \ldots k_\alpha, k_{\alpha+1} \ldots k_{p-1}$; celles-ci pourraient bien être des fractions, et au surplus négatives, et telles seraient justement leurs valeurs, si, dans la dernière équation de la précédente suite, on ne trouvait pas $r_{p-1} = 1$.

Comme cela se trouvera toujours, on peut exprimer ce fait dans une : *loi pour les nombres premiers* — comme suit :

Partant de l'unité et d'un nombre premier, p, *on peut, en ajou-*

---

[1] Même observation. Ainsi $2^{37.73-1} \equiv 1 \pmod{37.73}$. Voir Ed. Lucas (*Th. des* n, p. 422). N. D. L. R.

tant à 1 *un multiple de* p (ωp), *obtenir un nombre divisible par* a $<$ p. *Au quotient ainsi produit, il faut additionner un nouveau multiple de* p $(\omega_1 p)$, $-\omega_1$ *éventuellement étant* 0 —, *puis diviser la somme par* a *pour avoir un nouveau quotient. Avec celui-ci, on agit comme avec le précédent, etc. Ayant ainsi fait* p $-$ 1 *divisions, le dernier quotient obtenu sera toujours* 1.

La dernière équation de la suite donnée plus haut ayant ainsi la forme décrite, il est aisé de voir qu'il faut qu'on ait $k_{p-1} = 0$; et, à l'aide de nos substitutions, pour k_x, on trouvera successivement les valeurs de k_{p-2}, k_{p-3} ... et enfin celle de $k(\mathrm{o} : k_p(a))$ comme fonctions entières et rationnelles de a.

A proprement dire, le problème posé ainsi peut être regardé comme résolu, mais nous ne manquerons pas de donner plusieurs exemples afin d'illustrer ce que nous avons dit.

Premièrement nous allons montrer en détail le traitement du cas $p = 7$, $a = 3$. Les résultats peuvent être rangés en quatre colonnes, dont (I) indique les $p - 1$ divisions par a, récemment décrite; (II) la suite des équations qui, pour le cas spécial, correspond avec la suite commune donnée au commencement; (III) indique les substitutions pour k, k_1 ... k_{p-1}, de même adaptées au cas spécial; et (IV), enfin, de bas en haut, successivement les valeurs trouvées pour k_6, k_5 ... k_1, la dernière donnant finalement $k(\mathrm{o} : k_7(3))$.

(I)	(II)	(III)	(IV)
$\frac{1 + 2.7}{3} = 5$	$3^5 = 7k_1 + 5$	$k = 3k_1 + 2$	$k = 3^4.1 + 3^2.2 + 3 + 2$
$\frac{5 + 1.7}{3} = 4$	$3^4 = 7k_2 + 4$	$k_1 = 3k_2 + 1$	$k_1 = 3^3.1 + 3.2 + 1$
$\frac{4 + 2.7}{3} = 6$	$3^3 = 7k_3 + 6$	$k_2 = 3k_3 + 2$	$k_2 = 3^2.1 + 2$
$\frac{6 + 0.7}{3} = 2$	$3^2 = 7k_4 + 2$	$k_3 = 3k_4$	$k_3 = 3.1$
$\frac{2 + 1.7}{3} = 3$	$3 = 7k_5 + 3$	$k_4 = 3k_5 + 1$	$k_4 = 1$
$\frac{3 + 0.7}{3} = 1$	$1 = 7k_6 + 1$	$k_5 = 3k_6$	$k_5 = 0$

(donc $k_6 = 0$).

Cependant, comme ce n'est que l'expression pour $k(k_p(a))$ qu'on cherche, le résultat peut être trouvé bien plus simplement en

cherchant seulement les nombres qui dans (I) paraissent comme facteurs de 7 et dans (III) comme les quantités qu'il faut additionner à $3k_x(ak_x)$. En fin de compte, on peut garder la désignation a pour 3. La détermination de $k_7(3)$ alors peut être réglée ainsi :

1	5	4	6	2	3	1
2.7	1.7	2.7	0.7	1.7	0.7	—

On commence par écrire 1 en tête de la ligne supérieure, puis on cherche le *plus petit* multiple de 7 qui, additionné à 1, donne une somme divisible par 3. On écrit ce multiple sous 1, dans la seconde ligne, pendant que le quotient trouvé, 5, sera écrit à droite de 1 dans la première ligne. Maintenant on se comporte avec 5 comme auparavant avec 1, etc. — Le petit trait horizontal à la fin de la seconde ligne fait rappeler qu'on a $k_{p-1} = 0$.

A l'aide des facteurs de 7, de la seconde ligne, qui — comme il a été dit — seraient additionnés au produit $a \times$ le k précédent, on a successivement :

$$k_5 = a.0 + 0 = 0 \ , \quad k_4 = a.0 + 1 = 1 \ , \quad k_3 = a.1 + 0 = a \ ,$$
$$k_2 = a.a + 2 \ , \quad k_1 = a^3 + 2a + 1 \ , \quad k = a^4 + 2a^2 + a + 2 \ .$$

Nous donnerons encore les résultats pour toutes les équations $a^{p-1} = pk_p(a) + 1$ correspondant aux nombres premiers 5, 7, 1 et 13, $(a < p)$.

$$p = 5 \ .$$

$a = 2$,

1	3	4	2	1
1.5	1.5	0.5	0.5	—

$$k_3 = 0 \ , \quad k_2 = 0 \ , \quad k_1 = 1 \ , \quad k = k_p(a) = a + 1 \ .$$

$a = 3$,

1	2	4	3	1
1.5	2.5	1.5	0.5	—

$$k_3 = 0 \ , \quad k_2 = 1 \ , \quad k_1 = a + 2 \ , \quad k = k_p(a) = a^2 + 2a + 1 \ .$$

$a = 4$,

1	4	1	4	1
3.5	0.5	3.5	0.5	—

$$k_3 = 0 \ , \quad k_2 = 3 \ , \quad k_1 = 3a \ , \quad k = k_p(a) = 3a^2 + 3 \ .$$

Le trait au-dessus de 4 et 1 désigne une *periode* des quotients obtenus.

$$p = 7 .$$

$$a = 2 , \quad \begin{array}{c|cccccc|} 1 & \overline{4 \quad 2 \quad 1} & 4 & 2 & 1 \\ 1.7 & 0.7 & 0.7 & 1.7 & 0.7 & 0.7 & — \end{array}$$

$$k_5 = 0_1 , \quad k_4 = 0 , \quad k_3 = 1 , \quad k_2 = a , \quad k_1 = a^2 , \quad k = k_p(a) = a^3 + 1 .$$

$$a = 3 , \quad \begin{array}{c|cccccc|} 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \\ 2.7 & 1.7 & 2.7 & 0.7 & 1.7 & 0.7 & — \end{array}$$

$$k_5 = 0 , \quad k_4 = 1 , \quad k_3 = a , \quad k_2 = a^2 + 2 , \quad k_1 = a^3 + 2a + 1 ,$$

$$k_p(a) = a^4 + 2a^2 + a + 2 .$$

$$a = 4 , \quad \begin{array}{c|cccccc|} 1 & \overline{2 \quad 4 \quad 1} & 2 & 4 & 1 \\ 1.7 & 2.7 & 0.7 & 1.7 & 2.7 & 0.7 & — \end{array}$$

$$k_p(a) = 2a^4 + a^3 + 2a + 1 .$$

$$a = 5 , \quad \begin{array}{c|cccccc|} 1 & 3 & 2 & 6 & 4 & 5 & 1 \\ 2.7 & 1.7 & 4.7 & 2.7 & 3.7 & 0.7 & — \end{array}$$

$$k_p(a) = 3a^4 + 2a^3 + 4a^2 + a + 2 .$$

$$a = 6 , \quad \begin{array}{c|cccccc|} 1 & \overline{6 \quad 1} & 6 & 1 & 6 & 1 \\ 5.7 & 0.7 & 5.7 & 0.7 & 5.7 & 0.7 & — \end{array}$$

$$k_p(a) = 5a^4 + 5a^2 + 5 .$$

Par avance il était à présumer que les facteurs premiers de $p - 1$ allaient jouer un rôle considérable à l'égard de la forme des fonctions $k_p(a)$. En effet, il en est ainsi, car, de ce qui précède, on voit que de la solution de $p - 1$ se déduit l'apparition des *périodes* qui, à leur tour, donnent leur empreinte particulière à la forme du $k_p(a)$. Ainsi on voit, par exemple, dans ce qui précède, que pour $p - 1 = 6$ on peut avoir 2 périodes à 3 quotients ou 3 périodes à 2 quotients. Mais, d'un autre côté, on voit que la solubilité de $p - 1$ n'a aucune importance réelle. Ainsi pour $p - 1 = 6$ les valeurs 3 et 5 pour a n'admettent pas de périodes.

Pour $p = 11$ et 13 nous donnerons seulement les expressions pour $k_p(a)$:

$$p = 11 .$$

$$\begin{aligned}
a &= 2 , & k_p(a) &= a^6 + a^4 + a^3 + a^2 + 1 , \\
a &= 3 , & \text{»} &= 2a^7 + a^6 + a^5 + 2a^2 + a + 1 , \\
a &= 4 , & \text{»} &= a^8 + a^7 + 3a^6 + a^5 + a^3 + a^2 + 3a + 1 , \\
a &= 5 , & \text{»} &= 2a^8 + a^7 + a^6 + 4a^5 + 2a^3 + a^2 + a + 4 , \\
a &= 6 , & \text{»} &= 3a^8 + a^7 + 3a^6 + 4a^5 + 5a^4 + 2a^3 + 4a^2 + 2a + 1 , \\
a &= 7 , & \text{»} &= 4a^8 + 3a^7 + a^6 + a^5 + 6a^4 + 2a^3 + 3a^2 + 5a + 5 , \\
a &= 8 , & \text{»} &= 5a^8 + 6a^7 + 4a^6 + 2a^5 + 7a^4 + 2a^3 + a^2 + 3a + 5 , \\
a &= 9 , & \text{»} &= 7a^8 + 3a^7 + 2a^6 + 4a^5 + 7a^3 + 3a^2 + 2a + 4 , \\
a &= 10 , & \text{»} &= 9a^8 + 9a^6 + 9a^4 + 9a^2 + 9 .
\end{aligned}$$

$$p = 13 .$$

$$\begin{aligned}
a &= 2 , & k_p(a) &= a^8 + a^5 + a^4 + a^3 + a + 1 , \\
a &= 3 , & \text{»} &= 2a^9 + 2a^6 + 2a^3 + 2 , \\
a &= 4 , & \text{»} &= a^{10} + 3a^8 + 2a^7 + 3a^6 + a^4 + 3a^2 + 2a + 3 , \\
a &= 5 , & \text{»} &= a^{10} + 4a^9 + 3a^8 + a^6 + 4a^5 + 3a^4 + a^2 + 4a + 3 , \\
a &= 6 , & \text{»} &= 2a^{10} + 4a^9 + 3a^8 + 4a^7 + 5a^5 + 3a^4 + a^3 + 2a^2 + a + 5 . \\
a &= 7 , & \text{»} &= 3a^{10} + 5a^9 + 2a^8 + 4a^7 + 5a^6 + 6a^5 + 3a^4 + a^3 + 4a^2 \\
& & & \quad + 2a + 1 . \\
a &= 8 , & \text{»} &= 4a^{10} + 7a^9 + 3a^8 + 4a^6 + 7a^5 + 3a^4 + 4a^2 + 7a + 3 , \\
a &= 9 , & \text{»} &= 6a^{10} + 2a^9 + 6a^7 + 2a^6 + 6a^4 + 2a^3 + 6a + 2 , \\
a &= 10 , & \text{»} &= 7a^{10} + 6a^9 + 9a^8 + 2a^7 + 3a^6 + 7a^4 + 6a^3 + 9a^2 + 2a + 3 . \\
a &= 11 , & \text{»} &= 9a^{10} + 3a^9 + 4a^8 + 2a^7 + 5a^6 + 10a^5 + a^4 + 7a^3 + 6a^2 \\
& & & \quad + 8a + 5 . \\
a &= 12 , & \text{»} &= 11a^{10} + 11a^8 + 11a^6 + 11a^4 + 11a^2 + 11 .
\end{aligned}$$

En fin de compte, il faut donner une couple d'exemples correspondant au cas $a > p$. Nous choisissons $p = 5$, $a = 5.1 + 3$, $5.2 + 3$ et $5.3 + 3$. Dans la précédente équation (A) nous aurons $x = 3$, $p = 5$ et n égal à 1, 2 ou 3, ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
k_5(8) &= 5^3 + 4.5^2.3 + 6.5.3^2 + 4.3^3 + 3^2 + 2.3 + 1 , \\
k_5(13) &= 5^3.2^4 + 4.5^2.2^3.3 + 6.5.2^2.3^2 + 4.2.3^3 + 3^2 + 2.3 + 1 , \\
k_5(18) &= 5^3.3^4 + 4.5^2.3^4 + 6.5.3^4 + 4.3^4 + 3^2 + 2.3 + 1 .
\end{aligned}$$

Pour peu qu'on ait pensé trouver quelque relation entre le problème traité ici et celui d'*Abel*, il sera à supposer que le précédent renseignement exclura cette idée.

Finalement, il faut observer qu'en ce qui précède on ne trouvera pas le problème résolu généralement, c'est-à-dire pour des

valeurs quelconques de p et a. Aussi n'avons-nous pas démontré par induction que ce qui a lieu pour quelques valeurs de p et a serait aussi le cas pour des valeurs plus considérables.

A mon avis le cas traité est exceptionnel, et ne permet pas ces preuves ordinaires. En vérité, il me semble suffire que nous soyons à même d'éprouver l'exactitude de la loi que nous venons d'énoncer pour autant de nombres premiers que nous voulons, et de savoir que, dans autant de cas, notre exposition sera juste.

Copenhague, le 1er juillet 1916.

SUR UNE TRANSFORMATION PROJECTIVE CONDUISANT A QUELQUES PROPRIÉTÉS MÉTRIQUES

PAR

F. Gonseth (Zurich).

I

1. — Dans un plan non-euclidien, nous allons supposer que la conique absolue soit réciproque de celle du plan euclidien, c'est-à-dire qu'elle se réduise à deux droites. Nous examinerons ensuite la métrique de ce plan avec un œil euclidien.

Aux notions *d'angle de deux droites,* de *distance d'un point à une droite,* et *de distance de deux points* vont correspondre les notions au sens non-euclidien de distance de deux points, de distance d'une droite à un point, et d'angle de deux droites.

2. — Supposons que la conique absolue de ce plan soit formée des deux droites isotropes de l'origine

$$x^2 + y^2 = 0 \ .$$

Pour passer des premières notions précitées aux secondes, il suffit de remplacer dans les formules usuelles les coordonnées (x, y) d'un point, par celles (u, v) d'une droite ; et l'équation des points cycliques

$$u^2 + v^2 = 0$$

par celle des droites isotropes de l'origine

$$x^2 + y^2 = 0 \ .$$

3. — Le plan non-euclidien à étudier se déduit du plan euclidien par une simple *polarité* suivant le cercle imaginaire

$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

ou par une *antipolarité* suivant le cercle de rayon unité. Le centre de ce cercle sera dit aussi *centre de la transformation.*

4. — *La distance* non-euclidienne de deux points P_1, P_2 est évidemment égale à *l'angle* des rayons OP_1 et OP_2.

La distance D d'une droite d, de coordonnées (u, v) à un point $P(x . y)$ est donnée par la formule suivante :

$$D = \frac{ux + vy + 1}{(x^2 + y^2)^{1/2}} = \frac{ux + vy + 1}{(u^2 + v^2)^{1/2}} \cdot \frac{(u^2 + v^2)^{1/2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}} .$$

Cette distance est donc égale au quotient de la distance euclidienne δ de P à d, par le produit des distances euclidiennes r de O à P, et p de O à d.

$$D = \frac{\delta}{r . p} .$$

L'angle Φ de deux droites d_1, d_2, de coordonnées (u_1, u_2) et (v_1, v_2) (correspondant à la distance de deux points du plan euclidien) s'obtient comme suit :

Soit R le point d'intersection de d_1 et d_2 ; une perpendiculaire en O sur OR les coupe en M_1 et M_2.

Or :

$$\overline{OR} = \frac{\sqrt{(v_1 - v_2)^2 + (u_1 - u_2)^2}}{u_1 v_2 - u_2 v_1} ,$$

$$\operatorname{tg} \widehat{ORM_1} = \frac{u_1 v_2 - v_1 u_2}{u_1^2 + v_1^2 - u_1 u_2 - v_1 v_2} .$$

D'où il résulte :

$$\Phi = \frac{1}{OM_1} - \frac{1}{OM_2} .$$

II

5. — Nous appliquons tout d'abord cette transformation au cas le plus simple possible ; les propriétés les plus connues des coniques vont se trouver être les transformées de propriétés immédiates du cercle.

Un cercle, C, passe par les points cycliques ; sa courbe correspondante sera donc une conique γ touchant les isotropes du point O ; une conique dont O est par conséquent un foyer. O ayant été

choisi arbitrairement dans le plan du cercle, sa *directrice* sera la correspondante du *centre* de C ; le *second foyer* de γ sera le transformé de l'*axe radical* de C et du cercle-point O.

6. — Nous écrivons maintenant, en face l'un de l'autre, quelques énoncés correspondants, dont l'identité est démontrée par ce qui précède :

a) Les droites projetant deux points fixes d'un cercle depuis un point variable de ce dernier, forment un angle constant.	*a')* Les droites projetant depuis le foyer d'une conique les points où deux tangentes fixes de celle-ci sont coupées par une tangente mobile, forment un angle constant.
b) Les tangentes d'un cercle sont également éloignées du centre.	*b')* Le rapport des distances d'un point d'une conique à un foyer et à la directrice correspondante est un nombre constant.
c) Les points d'un cercle sont également éloignés du centre.	*c')* D étant le point où une tangente à une conique coupe une directrice, O le foyer correspondant : et la perpendiculaire en O sur OD coupant la tangente en M_1, et la directrice en M_2 : $$\frac{1}{OM_1} - \frac{1}{OM_2}$$ est une constante.
d) O est un point arbitraire ; M un point mobile sur un cercle c ; et P le pied de la perpendiculaire abaissée de P sur l'axe radical de c et du cercle point O ; $$\frac{\overline{OM}^2}{MP} = \text{constante}.$$	*d')* Le produit des distances des foyers d'une conique à une tangente variable est une constante.

7. — La transformation que nous étudions fait correspondre à la géométrie des *cercles*, celle des *coniques ayant un foyer commun*. Tous les énoncés de la première se transporteront dans la seconde, aussitôt qu'auront été donnés les équivalents de l'*angle* de deux cercles ; et de la *puissance* d'un point par rapport à un cercle.

Deux coniques qui ont un foyer commun possèdent encore deux tangentes communes. Soient T_1 et T_2 ; T_1' et T_2' les points de con-

tact sur chacune d'elles : *les angles* T_1OT_2 *et* $T_1'OT_2'$ *sont égaux et correspondent à l'angle de deux cercles.*

Soit a une droite arbitraire, et P un point de cette droite ; ayant mené les tangentes de P à une conique γ, dont O est un foyer ; ayant enfin mené en O la perpendiculaire à OP, qui coupe a en M, et les tangentes en M_1 et M_2 ; l'expression

$$\pi = \left(\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM_1}\right)\left(\frac{1}{OM} - \frac{1}{OM_2}\right)$$

est *constante* quel que soit P sur a, et *correspond à la puissance d'un point par rapport à un cercle.*

Transformons par exemple le théorème suivant dû à M. Faure[1] : *Les cercles harmoniquement circonscrits à une conique en coupent orthogonalement le cercle orthoptique.*

Soit O un point arbitraire, qui sera comme plus haut le centre de la transformation ; et γ une conique quelconque. Soit c la transformée de γ ; les droites qui la coupent en deux points R_1 et R_2 tels que l'angle $R_1\widehat{O}R_2$ soit droit enveloppent une courbe qui est évidemment la correspondante du cercle orthoptique de γ. C'est une conique dont O est un foyer, et suivant laquelle O a la même polaire que suivant c. Convenons de la nommer la *conique orthoptique de* c, *par rapport à* O. Convenons de plus de dire que deux coniques de même foyer O sont orthogonales lorsque l'angle T_1OT_2, dont il est question plus haut, est droit. L'énoncé de Faure devient alors le suivant :

Toutes les coniques dont O *est un foyer et qui sont harmoniquement inscrites à une conique* c, *sont orthogonales à la conique orthoptique de* c, *par rapport à* O.

8. — Un faisceau de *coniques homofocales* est transformé dans le faisceau *ponctuel* déterminé par une conique arbitraire et par le cercle-point O.

Dans ce faisceau se trouvent, en plus du cercle-point O, deux paires de droites ; l'une est réelle ; les deux droites qui la composent seront dites les *directrices* du point O.

Les propriétés suivantes sont la traduction de propriétés correspondantes des coniques homofocales.

Une droite d *est coupée par les courbes de ce faisceau en des couples de points qui forment une involution ; les points doubles de celle-ci sont les points de contact des deux courbes du faisceau qui touchent* d ; *cette involution est projetée depuis* O *par les rayons d'une involution symétrique.*

L'énoncé a') devient :

---

[1] Faure, *Nouvelles Annales*, t. XIX, p. 234.

Ayant choisi deux points fixes sur une conique, et les ayant projetés depuis un point mobile, soient N_1 *et* N_2, *les points où les rayons projetants coupent l'une et l'autre directrices du point* O ; *l'angle* N_1ON_2 *est constant,*

et l'énoncé *d'*) par exemple :

Le produit $\frac{\rho}{d_1} \cdot \frac{\rho}{d_2}$ *(où* ρ *est la distance d'un point arbitraire de la courbe au point* O ; d_1 *et* d_2 *les distances aux directrices de* O), *est une constante.*

Si O est un foyer, ses directrices coïncident ; et l'on retrouve l'énoncé *b'*).

9. — Plus généralement, transformons l'ensemble des courbes de $n^{\text{ième}}$ classe ayant les mêmes foyers qu'une courbe donnée Γ_n. Les courbes transformées sont du $n^{\text{ième}}$ ordre et forment un système linéaire ponctuel. Parmi elles se trouve une courbe comprenant n droites réelles. Ces n droites seront les *n directrices réelles* du point O, suivant C_n, la transformée de Γ_n.

Et les deux énoncés suivants de Laguerre :

Les n *tangentes menées à* Γ_n *depuis un point quelconque ont même orientation que le groupe des* n *droites allant aux foyers réels de* Γ_n ; et

Les mn *tangentes communes à deux courbes* Γ_m *et* Γ_n *ont même orientation que le groupe des* mn *droites joignant tous les foyers réels de* Γ_m *à tous les foyers réels de* Γ_n

prennent la forme suivante :

Les n *points d'intersection d'une droite arbitraire avec une courbe* C_n *d'une part, et les* n *directrices d'un point quelconque* O *d'autre part sont projetées depuis* O *par deux groupes de rayons ayant même orientation.*

Les mn *points d'intersection de deux courbes* C_m *et* C_n *sont projetées depuis un point arbitraire* O *suivant* mn *droites ayant même orientation que le groupe des* mn *droites projetant les* mn *intersections de toutes les directrices du point* O *suivant* C_m *avec toutes les directrices du même point suivant* C_n.

On pourrait aisément multiplier les exemples. En règle générale toute propriété métrique se transforme en une nouvelle, d'essence plus générale, si le centre de la transformation ne prend pas quelque position spéciale.

III

10. — On peut opérer une transformation semblable dans l'espace. L'espace transformé peut être considéré comme *non-euclidien*, avec la *quadrique absolue*

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0 .$$

On le déduit de l'espace euclidien par *polarité* suivant la sphère imaginaire

$$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0 ,$$

ou par *antipolarité* suivant une sphère de rayon unité.

11. — On vérifiera que les notions habituelles sont à remplacer comme suit :

L'angle de deux plans par *l'angle des rayons* projetant les points transformés depuis le centre O de la transformation.

La *distance* D *d'un point à un plan* par le quotient de la distance δ du plan transformé π au point transformé P par le produit de la distance ϱ de O à P, et de la distance p de O à π

$$D = \frac{\delta}{\varrho \cdot p} .$$

La distance de deux points par l'expression

$$\frac{1}{OM_1} - \frac{1}{OM_2} ,$$

où les points M_1 et M_2 sont définis comme suit : Soient π_1 et π_2 les deux plans transformés, et r leur droite d'intersection ; la perpendiculaire en O sur le plan (O, r) coupe π_1 en M_1 et π_2 en M_2.

La plus courte distance de deux droites par

$$\frac{1}{ON_1} - \frac{1}{ON_2} ,$$

où les points N_1 et N_2 sont les intersections des droites transformées avec leur transversale commune passant par O.

L'angle de deux droites, enfin, par *l'angle des plans* projetant les transformées depuis O.

12. — Transformons, par exemple, un faisceau de quadriques homofocales. Ceci nous conduira à décrire une quadrique, *telle qu'on la voit depuis un point arbitraire,* O. Mettons encore en regard les propriétés en question et celles auxquelles elles correspondent :

Le lieu des sommets des cônes de révolution tangents à une quadrique F se compose de trois coniques, les focales de la quadrique.	Les plans qui coupent une quadrique Φ suivant des coniques telles qu'elles soient projetées depuis un point O par des cônes de révolution enveloppent trois cônes que nous nommerons les *cônes focaux du point* O.
Deux de ces focales sont tou-	Deux de ces cônes sont tou-

jours réelles, la troisième est imaginaire.	jours réels, le troisième est imaginaire.
Les plans de ces coniques sont les plans principaux de la quadrique F.	Le point O est le sommet d'un trièdre trirectangle conjugué à la quadrique Φ. Les sommets de ces cônes sont à l'intersection des arêtes de ce trièdre avec le plan polaire de O.
Les focales réelles d'un ellipsoïde ou d'un hyperboloïde sont une ellipse et une hyperbole.	Si le point O est à l'extérieur ou à l'intérieur de Φ, il se trouve à l'intérieur de l'un et à l'extérieur de l'autre cône réel.
Les focales réelles d'un paraboloïde sont deux paraboles.	Si O est sur Φ, les deux cônes passent par ce point.

Une *section circulaire* de F est transformée en un cône tangent à Φ dont un *axe* passe par O. Par conséquent le lieu des sommets de pareils cônes se compose de six droites passant par O, dont il serait facile de préciser la position et les conditions de réalité. En particulier, les plans tangents à Φ aux points où ces droites coupent cette quadrique seront les *plans ombilicaux* du point O. On a encore

Toutes les quadriques ayant mêmes focales forment un faisceau homofocal.	Toutes les quadriques suivant lesquelles les cônes focaux du point O sont les mêmes que suivant Φ, forment un faisceau ponctuel, défini par la quadrique Φ, et par la sphère point O.
Les focales sont aussi le lieu des ombilics des quadriques homofocales.	Les cônes focaux de O sont aussi l'enveloppe des plans ombilicaux du même point pour les quadriques du faisceau qui vient d'être défini.

Jusqu'ici ne sont guère intervenues que des relations d'*angles* (à côté de propriétés polaires) qu'on retrouverait par une transformation du même système homofocal par polarité suivant une sphère arbitraire de centre O. Pour introduire d'autres grandeurs, partons des énoncés suivants dus à Reye[1], en même temps qu'à d'autres auteurs[2].

Un ensemble de points pesants (de masses positives ou négatives) étant donné, les plans pour lesquels le moment quadratique (d'inertie) de cet ensemble est une constante donnée, enveloppent

---

[1] Reye, *Journal für Mathem.*, 72 (1870).
[2] Par exemple Binet, *Journal de l'École polyt.*, 16.

une quadrique : lorsque la constante varie, la quadrique décrit un faisceau homofocal. Soit F, en particulier, la quadrique correspondant à la valeur O. On peut remplacer tout le système pesant par quatre masses disposées aux sommets d'un tétraèdre polaire arbitraire de F.

Si la masse qu'on veut disposer en un de ces sommets est donnée d'avance, ce dernier peut être choisi arbitrairement sur une quadrique F′, ayant même cône asymptotique que F.

Il suffira de remplacer partout la distance d'un point du système pesant à un plan arbitraire par l'expression $\frac{\delta}{\rho \cdot p}$, où les lettres ont la signification donnée au n° 11.

Par commodité nommons *moment relatif au point* O, d'un point pesant à un plan, ou d'un plan massif à un point, l'expression ainsi transformée des moments habituels. Les p sont d'ailleurs dans ce cas des constantes. Les énoncés cités deviennent alors :

Un ensemble de plans massifs étant donné (de masses positives ou négatives), le lieu des points pour lesquels le moment, quadratique et relatif au point O, du système est une constante, est une quadrique Φ. Lorsque la constante varie, la quadrique décrit un faisceau ponctuel, contenant la sphère point O. On peut remplacer le système de plans massifs par quatre plans massifs, formant un tétraèdre polaire, d'ailleurs arbitraire, de Φ.

Si la masse d'un de ces quatre plans est donnée d'avance, il peut être choisi quelconque, parmi les plans tangents à une certaine quadrique qui touche Φ en tous les points de contact de ses tangentes menées de O.

13. — Comme dernière application enfin, considérons deux surfaces, l'une de $n^{\text{ième}}$ ordre F_n, l'autre de $n^{\text{ième}}$ classe Φ_n, qui soient *apolaires*. Nous définirons, avec Reye[1], la surface Φ_n comme suit : Elle est l'enveloppe des plans pour lesquels la somme des moments du $n^{\text{ième}}$ ordre d'un système de points pesants est nulle ; cet ensemble de points est un *système définissant de* Φ_n. F_n sera déterminée, semblablement, par un système de plans massifs. Et maintenant l'énoncé suivant[2] est juste :

F_n *et* Φ_n *sont apolaires quand le moment mixte de tout système définissant* F_n, *par rapport à tout système définissant* Φ_n, *est nul.* (Le moment mixte d'un point P de masse m et d'un plan π de masse μ, δ étant la distance P à π, vaut naturellement $m \mu \delta^n$.

Ces définitions et ce dernier énoncé valent encore lorsque δ est partout remplacé par $\frac{\delta}{\rho \cdot p}$, c'est-à-dire *lorsque les moments habituels sont remplacés par les moments relatifs à un point arbitraire.*

---

[1] Reye, *Journ. für Mathem.*, 78 (1874).

[2] Cet énoncé ne se trouve pas dans le travail cité de Reye. Il en est une conséquence assez naturelle.

14. — *Remarque.* Nous avons supposé la conique absolue de notre plan non-euclidien formée des deux droites isotropes du point O; et dans l'espace la quadrique absolue était le cône isotrope de ce même point. On aurait pu naturellement faire toute autre supposition : par exemple la conique se composera de deux droites rectangulaires par O. Au lieu de trouver les propriétés des foyers des coniques, on en trouvera d'autres qui vaudront pour tout point des coniques orthoptiques de ces dernières. Et dans l'espace la sphère orthoptique d'une quadrique s'introduira, si l'absolu est un cône équilatère.

Les propriétés trouvées sont moins simples que celles qui sont décrites plus haut et d'ailleurs faciles à établir.

SUR LA FONCTION RÉSISTANCE $F(v)$ DE LA BALISTIQUE

PAR

G. Tiercy (Genève).

---

1. — On sait que le problème physique, qui consiste à chercher la trajectoire d'un projectile pesant dans l'atmosphère terrestre, est hérissé de difficultés; si on le considère tel qu'il se présente, dans toute sa compléxité, il est inabordable dans l'état actuel de la science.

Même en le simplifiant par l'abandon des termes secondaires des perturbations dues à l'atmosphère ou au projectile lui-même, c'est-à-dire même en ne considérant que le problème balistique principal[1], on se heurte d'emblée à une difficulté considérable provenant de l'ignorance complète, où l'on se trouve, de la forme analytique de la fonction « résistance » de l'air.

L'étude théorique des lois de cette résistance est extrêmement en retard, comparée à leur étude expérimentale; cette dernière a été poussée très loin par les artilleurs, car il leur était nécessaire de connaître les valeurs numériques de la résistance atmosphérique; leurs expériences ont révélé les trois lois suivantes :

---

[1] Mouvement dans un milieu résistant, homogène, immobile, d'un point matériel pesant soumis à l'action : 1° de la gravité, force toujours constante et parallèle, 2° de la résistance de l'air, force toujours tangentielle.

I. La résistance de l'air est proportionnelle à la densité de l'air ;

II. Elle est proportionnelle à la section droite du projectile ;

III. Pour des projectiles de même section et de formes peu différentes, elle peut être représentée par la formule $k\mathrm{F}(v)$, où k est un coefficient constant.

On pourra donc écrire la force « résistance », en kilogrammes, comme suit :

$$\text{Résist.} = \delta \cdot \frac{\pi \mathrm{D}^2}{4} \cdot i\mathrm{F}(v) ,$$

où l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta = \text{poids du m}^3 \text{ d'air en kilogrammes (ce nombre est proportionnel à la densité) ;} \\ \mathrm{D} = \text{diamètre du projectile (en mètres) ;} \\ i = \text{indice caractéristique du projectile.} \end{array} \right.$$

Ou bien, en supposant que le facteur $\left(g\frac{\pi}{4}\right)$ entre dans $\mathrm{F}(v)$, on écrira pour l'accélération due à la résistance :

$$\gamma = c\mathrm{F}(v) ,$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} c = i\delta\frac{\mathrm{D}^2}{p} , \\ p = mg = \text{poids du projectile en kgr.} \end{array} \right.$$

c est le coefficient balistique du projectile.

Actuellement, pour établir la solution du problème, on laisse à la résistance la forme générale $\mathrm{F}(v)$ dans les équations différentielles du mouvement ; et on conserve cette indétermination de la fonction $\mathrm{F}(v)$ jusqu'aux formules finales. On considère que la solution doit pouvoir s'appliquer à toute fonction résistance ; il suffit alors, pour l'application, d'utiliser les données de l'expérience. Remarquons que c'est aux colonels italiens Saint Robert et Siacci que revient le mérite d'avoir montré cette voie aux balisticiens.

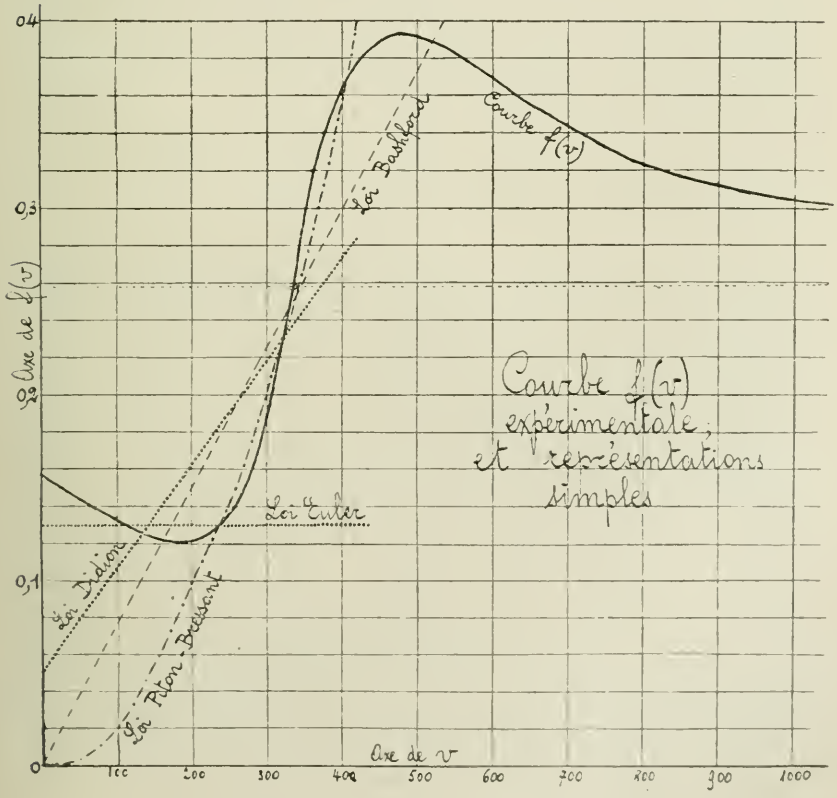
2. — Lorsqu'il s'agit d'enseignement et qu'on veut présenter à des élèves le problème du projectile dans l'air, il est de coutume de leur imposer une loi simple de résistance (Av^2, Bv^3, etc.) ; on leur dit qu'elle est assez satisfaisante, mais on ne leur indique pas pourquoi. Il me paraît opportun d'éviter cette lacune ; et c'est si simple, si l'on veut bien se référer à l'ensemble des résultats expérimentaux obtenus ces dernières années ! Non pas que je prétende faire résoudre, par des étudiants débutants, le problème analytique contenant la fonction F indéterminée ; ce problème est trop compliqué pour eux ; il s'agit bien plutôt de leur apprendre à résoudre les équations du mouvement d'un corps dans des cas simples ; et c'est pourquoi l'on choisit les résistances $\mathrm{F} = Av^2$,

$F = Bv^3$, etc. ; mais je prétends qu'il importe de leur montrer très nettement, en se basant sur les expériences actuelles, dans quelles limites ces hypothèses simples sont acceptables, et pourquoi les diverses fonctions « résistance » tour à tour adoptées dans l'histoire de la balistique ont pu l'être d'une manière satisfaisante. Il est nécessaire que ces débutants, à qui l'on présente un problème si actuel et si capital, aient compris la portée des hypothèses dont ils se servent dans leurs calculs.

3. — Il serait fort malcommode d'étudier graphiquement la fonction $F(v)$ elle-même, car elle augmente très rapidement avec la vitesse v. On est donc amené à étudier le rapport de $F(v)$ à une fonction simple (par exemple : v, v^2, v^3, etc.). Le plus souvent, on étudie le rapport :

$$f(v) = \frac{F(v)}{v^2}.$$

Cette fonction $f(v)$ est inconnue analytiquement, comme $F(v)$; mais on a pu, grâce à des milliers d'expériences, dessiner sa forme (projectiles ogivaux).



C'est en examinant cette courbe qu'on saisira la portée des hypothèses faites autrefois sur $F(v)$; on comprendra l'ordre d'apparition de ces hypothèses successives, et les raisons de leur abandon.

a) Lorsque les vitesses des projectiles (bombes) étaient très faibles, variant de 75 à 250 m. environ, on avait adopté, en se basant sur les travaux de Newton, la loi carrée :

$$F(v) = Av^2 ,$$

où A était une constante convenablement choisie. On en déduit :

$$f(v) = A .$$

C'est sur cette loi qu'Euler a établi la première théorie balistique. On constatera sur le dessin que, dans les limites indiquées (75 à 250 m.), cette « loi d'Euler » s'éloigne peu de la vraie courbe $f(v)$. La loi quadratique pour $F(v)$ était donc satisfaisante (fin du XVIIIe siècle).

b) Plus tard, vers 1850, on utilisa des vitesses plus grandes, variant de 100 à 350 m. Le général Didion constata que la loi quadratique de $F(v)$ ne correspondait plus aux résultats expérimentaux, la résistance augmentant plus vite que ne l'indiquait cette loi. Il adopta la formule :

$$F(v) = av^2 + bv^3$$

(voir son *Traité de balistique,* 1860). On en tire :

$$f(v) = a + bv .$$

On voit sur le dessin que cette droite, inclinée sur l'axe des v, s'éloigne peu de la courbe vraie $f(v)$ dans le domaine s'étendant de $v = 100$ à $v = 350$. La formule de Didion était donc satisfaisante à l'époque indiquée.

c) Mais, l'artillerie se perfectionnant, les vitesses atteignirent bientôt des valeurs de 400 à 500 m. (vers 1870). La loi de Didion devint insuffisante ; de $v = 350$ à $v = 500$, elle s'éloigne trop des résultats de l'expérience. Le balisticien Bashford (*Treatise on the motion of projectiles,* 1873) choisit alors la loi cubique :

$$F(v) = hv^3 ;$$

elle donne :

$$f(v) = hv .$$

On voit que cette droite passe par l'origine des axes du dessin ; de $v = 100$ m. à $v = 500$ m., elle remplace d'une manière satisfaisante la courbe $f(v)$.

d) Plus tard encore, dans le dernier quart du XIXe siècle, Piton-

Bressant remplaça la loi de Bashford par la loi biquadratique :

$$F(v) = kv^4 ;$$

(Piton-Bressant, *Mélanges*, 1892). Cette formule suit de plus près l'augmentation très rapide de la résistance entre $v = 250$ m. et $v = 450$ m.

On constatera sur le graphique que cette loi de $F(v)$, qui donne :

$$f(v) = kv^2 ,$$

remplaçant ainsi la vraie courbe $f(v)$ par une parabole d'axe verticale et de sommet O, s'éloigne fort peu des données expérimentales pour v comprise entre 200 et 450 m.

D'ailleurs, il se trouve que cette loi biquadratique de $F(v)$, adoptée dans les équations du problème, permet une intégration assez simple.

e) Actuellement, les vitesses sont beaucoup plus considérables ; aucune des lois approchées indiquées ci-dessus pour $F(v)$ n'est valable pour v supérieure à 500 m. Le graphique le montre très nettement. On comprend dès lors pourquoi ces formes simples ont dû être abandonnées dès qu'il s'est agi de canons donnant des vitesses initiales de 600, 700, 800 m. ou plus. On peut, il est vrai, pour les grandes vitesses, adopter pour $F(v)$ une forme linéaire :

$$F(v) = a - bv ;$$

elle correspond à une forme hyperbolique de $f(v)$:

$$f(v) = \frac{a - bv}{v^2} ,$$

loi relativement satisfaisante pour les grandes valeurs de v.

4. — Il résulte des considérations précédentes que, si l'on veut absolument utiliser une représentation simple de loi « résistance », on sera conduit à une décomposition de la loi en « tranches » ; et les formules qu'on obtiendra ne seront valables qu'entre certaines limites ; la théorie obtenue n'aura aucune généralité, et l'application en sera parfois fort malaisée. C'est pourquoi les balisticiens actuels, suivant les traces de « de Saint-Robert » et de « Siacci », conservent la fonction $F(v)$, sous forme indéterminée, jusque dans les formules d'application.

Remarquons en terminant que les lois simples de résistance (résistance monômes) ne sont pas complètement abandonnées ; on les utilise encore dans certains cas ; par exemple dans le tir des mortiers, où les vitesses restent faibles.

Pour des renseignements plus complets sur les facteurs numériques du problème, nous renvoyons le lecteur au remarquable traité de Cranz.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Sur la définition géométrique de la « Fenêtre de Viviani ».

Dans les cours de géométrie, on présente généralement la courbe de Viviani comme intersection de deux surfaces de révolution : une sphère de rayon r, et un cylindre de rayon $\left(\frac{r}{2}\right)$ tangent intérieurement à la sphère; c'est la définition géométrique la plus simple.

Remarquons que la courbe peut être dessinée sur une infinité de surfaces de révolution du deuxième degré, issues d'une combinaison linéaire de la sphère et du cylindre primitifs.

Soit (s) la sphère, dont le centre est à l'origine :

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 \; ; \qquad (s)$$

et soit (c) le cylindre tangent intérieurement, de rayon $\left(\frac{r}{2}\right)$, et d'axe parallèle à l'axe des z :

$$x^2 + y^2 - rx = 0 \; . \qquad (c)$$

Les coordonnées d'un point quelconque de la courbe satisferont à toute équation résultant de la combinaison suivante :

$$(c) + (s) . [f(x, y, z)] = 0 \; ,$$

où $f(x, y, z)$ est une fonction quelconque, finie tout le long de la courbe.

Un cas particulièrement intéressant est celui où la fonction $f(x, y, z)$ se réduit à une constante k :

$$(c) + k(s) = 0 \; . \qquad (1)$$

On obtient l'équation :

$$x^2 + y^2 - rx + k(x^2 + y^2 + z^2 - r^2) = 0 \; , \qquad (2)$$

qu'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{\left[x - \frac{r}{2(1+k)}\right]^2}{\left[\frac{r(1+2k)}{2(1+k)}\right]^2} + \frac{y^2}{\left[\frac{r(1+2k)}{2(1+k)}\right]^2} + \frac{z^2}{\left[\frac{r(1+2k)}{2(1+k)}\right]^2 \cdot \frac{1+k}{k}} = 1 . \qquad (3)$$

Sauf dans les cas où le discriminant de cette équation est nul, cette quadrique (3) est visiblement une surface de révolution, dont le centre est sur l'axe des x, à une distance de l'origine égale à :

$$\xi = \frac{r}{2(1+k)} .$$

Donc : *Toutes les quadriques à discriminant non nul qui contiennent la courbe de Viviani sont des quadriques de révolution, issues de la combinaison* (1). Les demi-axes sont les valeurs :

$$A_1 = \frac{r(1+2k)}{2(1+k)} ; \qquad A_2 = \frac{r(1+2k)}{2(1+k)} \cdot \sqrt{\frac{1+k}{k}} = \frac{r(1+2k)}{2\sqrt{k(1+k)}} .$$

On en tire :

$$A_1^2(k+1) = kA_2^2 , \qquad k = \frac{A_1^2}{A_1^2 - A_2^2} ;$$

et portant cette valeur de k dans l'expression de A_1, on obtient :

$$r(A_1^2 + A_2^2) = 2A_1A_2^2 ; \qquad (4)$$

c'est là la condition que doivent vérifier les axes d'une quadrique de révolution, dont l'axe de rotation est celui des z, pour que cette quadrique contienne la courbe envisagée. On voit immédiatement, d'après (4), qu'il faut écarter les hyperboloïdes à deux nappes.

On remarquera d'ailleurs que les trois valeurs de k qui annulent le discriminant sont :

$$k = -1 , \qquad k = -\frac{1}{2} , \qquad k = 0 ;$$

elles correspondent respectivement à un cylindre parabolique, à un cône de révolution dont l'axe est la génératrice du cylindre (c) tangente à la sphère (s), et au cylindre (c) lui-même.

On établira aisément le tableau suivant :

k	Axe A_1 dans le plan xy	Axe A_2 de rotation	
$k = -\infty$	r	r	Sphère (équation s).
$-\infty < k < -1$	$r < A_1 < \infty$	$r < A_2 < \infty$	Ellipsoïde aplati ($A_2 < A_1$).
$k = -1$	∞	∞	Cylindre parabolique $z^2 + rx - r^2 = 0$.
$-1 < k < -\frac{1}{2}$	$\infty > A_1 > 0$	imaginaire	Hyperboloïde à 1 nappe.
$k = -\frac{1}{2}$	0	0	Cône de révolution.
$-\frac{1}{2} < k < 0$	$0 < A_1 < \frac{r}{2}$	imaginaire	Hyperboloïde à 1 nappe.
$k = 0$	$\frac{r}{2}$	∞	Cylindre (équation c).
$0 < k < \infty$	$\frac{r}{2} < A_1 < r$	$\infty > A_2 > r$	Ellipsoïde allongé ($A_2 > A_1$).
$k = +\infty$	r	r	Sphère s.

Et l'on voit que, dans cette famille de quadriques contenant la courbe en question, le cas de ($k = -1$) seul ne correspond pas à une surface de révolution.

G. Tiercy (Genève).

Sur l'équation $x^2 - Ay^2 = 1$.

L'étude de l'équation

$$x^2 - Ay^2 = +1 \qquad (1)$$

a déjà passionné plus de trois cents auteurs, et l'on connaît les Tables de Legendre, Biekmore et Whitford ! [1]

La recherche pratique de la solution minima était faite jusqu'à présent sur les fractions continues, ce qui demande en général beaucoup de soins et de temps.

J'ai maintenant complètement établi une méthode nouvelle, donnant à l'aide de mes procédés mécaniques et même parfois à simple vue une valeur très petite pour une inconnue auxiliaire,

[1] Ce dernier volume a été annoncé dans l'*E. M.* en 1912 par M. A. Aubry.

qui, dans les cas les plus défavorables, est toujours inférieure à la racine carrée de l'inconnue classique.

J'utilise simplement les équations

$$z^2 - At^2 = \pm 4 . \pm 2 , - 1 \qquad (2)$$

en égalant, suivant les cas, A et t à des formes $a^2 + b^2$, $p^2 + 2q^2$, $2r^2 - s^2$, $m^2 - n^2$.

Ayant la solution minima d'une des équations (2), on sait facilement passer à (1).

J'obtiens ainsi dans chaque cas des équations doubles à solutions entières.

Avec mon inconnue, égale à l'*unité*, j'obtiens par exemple :

$$61^2 - 149.5^2 = - 4$$

$$213^2 - 157.17^2 = - 4$$

$$45^2 - 2029.1^2 = - 4$$

$$1135^2 - 941.37^2 = - 4$$

$$232^2 - 2153.5^2 = - 1$$

Ainsi pour $941 = 29^2 + 10^2$, j'ai

$$31^2 - 941.1^2 = + 2.10 .$$

$$184^2 - 941.6^2 = - 2.10 ,$$

d'où $6^2 + 1^2 = 37$, et la solution précédente.

Voici certaines de mes équations de conditions simultanées

1° $\quad z^2 - At^2 = - 1 , \qquad A = m^2 + n^2 , \qquad t = \alpha^2 + \beta^2$

$$(m\alpha - n\beta)^2 - A\beta^2 = \pm m .$$

$$(m\beta + n\alpha)^2 - A\alpha^2 = \mp m ,$$

m impair, n pair

2° $\quad z^2 - At^2 = + 2 , \qquad A = a^2 - 2b^2 , \qquad |t| = \alpha^2 - 2\beta^2$

$$(b\alpha - a\beta)^2 - p\beta^2 = \pm b ,$$

$$(2b\beta - a\alpha)^2 - p\alpha^2 = \pm 2b .$$

Ainsi pour $A = 151$, j'ai $\beta = 7$.

Le cas de $- 2$ est semblable.

3° $\quad z^2 - At^2 = - 4 ; \qquad A = a^2 + b^2 . \qquad t = z^2 + t^2$

$$(bz - at)^2 - At^2 = \pm 2b .$$

$$(bt + az)^2 - Az^2 = \mp 2b .$$

Pour $A = 1429$, j'obtiens $t = 1$.

En terminant ces brèves notes, je signale une erreur de Legendre.

Pour 397, j'ai, avec une inconnue égale à *deux*

$$40^2 - 397.2^2 = +2.6 ,$$

d'où

$$259^2 - 397.13^2 = -2.6 ,$$

ce qui donne

$$3447^2 - 397.(13^2 + 2^2)^2 = -4 ,$$

et pour l'équation (1)

$$y = 42\ 094\ 239\ 791\ 738\ 433\ 660 .$$

J'ai beaucoup de résultats inédits et j'espère pousser les tables actuelles jusqu'à 3000.

Aux Armées de France. A. Gérardin.
9 juin 1917.

CHRONIQUE

Commission internationale de l'enseignement mathématique.

Bien que la guerre ait suspendu les travaux de la Commission internationale, plusieurs des sous-commissions nationales qui n'avaient pas encore achevé leurs rapports ont continué, dans la mesure du possible, l'élaboration des mémoires projetés. Vingt fascicules nouveaux ont été distribués depuis le 1er avril 1914 ; ils se répartissent comme suit :

Comité central 2, Allemagne 11, Australie 1, Belgique 1, Etats-Unis 4, Russie 1. On en trouvera la liste détaillée dans les *Notes et Documents* (voir plus loin).

Parmi ces rapports, les uns se rattachent directement au plan général des travaux élaborés par le Comité central, d'autres pré-

sentent un caractère nouveau. Ainsi deux des fascicules publiés par la sous-commission allemande sont consacrés à l'enseignement mathématique en Danemark (rapport de M. Rohrberg) et en Angleterre (rapport de M. Wolff). La sous-commission allemande s'était proposée d'examiner l'enseignement mathématique dans les principaux pays en prenant comme point de comparaison les plans d'études, les manuels et les méthodes en usage dans les établissements allemands. Ces rapports devaient être basés non seulement sur les documents réunis par les sous-commissions nationales, mais encore, autant que possible, sur des voyages d'études. C'est ce qui a été fait pour le Danemark et l'Angleterre. La sous-commission se bornera à ces deux pays.

De son côté, la sous-commission des Etats-Unis a entrepris une deuxième série de rapports dans lesquels elle groupera, par type d'enseignement, les documents publiés par les sous-commissions nationales. Les trois rapports publiés jusqu'à ce jour sont consacrés aux objets suivants :

1° Les matières inscrites dans les programmes mathématiques des différents pays pour l'enseignement élémentaire et moyen depuis l'âge de 6 ans à 18 ans.

2° Les mathématiques dans l'enseignement commercial et industriel moyen.

3° Les mathématiques dans les écoles normales primaires ou établissements similaires.

Quant aux rapports consacrés à la préparation des maîtres, il en a été publié trois : Allemagne, Belgique, Etats-Unis. D'autres foscicules sont encore en préparation.

Si l'on s'en tient aux publications qui se rattachent directement au *Rapport préliminaire* et dont la liste avait été annoncée en 1912, elles sont achevées depuis cinq ans dans les pays suivants : Suède, Hollande, France, Suisse, Autriche, Japon, Etats-Unis, Iles britanniques, Danemark. A cette liste viennent s'ajouter l'Australie (1916) et l'Allemagne (1917).

Des rapports sont encore en préparation ou, tout au moins, avaient été projetés avant la guerre, dans les pays suivants : Belgique, Brésil, Espagne, Hongrie, Italie, Norvège, Portugal, République Argentine, Roumanie et Russie.

H. Fehr.

Académie des Sciences de Paris. — Prix décernés.

L'Académie a décerné les récompenses suivantes :

Mathématiques. — *Prix Francœur* (1000 fr.). — M. Henri Vaillat, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Montpellier, pour ses travaux d'hydrodynamique.

Prix Bordin (3000 fr.). — L'Académie avait mis au concours la question suivante : « Perfectionner en quelque point important la théorie arithmétique des formes non quadratiques. » — Le prix est décerné à M. Gaston Julia, ancien élève de l'Ecole Normale supérieure, sous-lieutenant au 34me régiment d'infanterie, pour son mémoire intitulé : *Etude des formes binaires non quadratiques à indéterminées réelles, ou complexes, ou à indéterminées conjuguées.*

Mécanique. — *Prix Montyon* (700 fr.). — M. René de Saussure, de Genève, pour ses travaux sur la théorie géométrique du mouvement des corps solides.

Prix Poncelet (2000 fr.). — M. Jules Andrade, professeur à la Faculté des Sciences de Besançon, pour ses travaux de mécanique appliquée et notamment pour ceux qui concernent la chronométrie.

Statistique. — *Prix Montyon.* — Le prix de la valeur de 1000 francs est décerné, conjointement à MM. Abraham, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, et Sacerdote, pour leur *Recueil des constantes physiques.*

Prix généraux — *Prix Petit d'Ormoy des sciences mathématiques* (10,000 fr.). Le Prix est décerné à feu Pierre Duhem, professeur à la Faculté des Sciences de Bordeaux, membre non résident de l'Académie, pour l'ensemble de son œuvre et en particulier pour son ouvrage intitulé : *Le système du monde.*

Prix de Parville (ouvrages de sciences). — Un prix de la valeur de 2000 fr. est décerné à M. Ch. de la Vallée Poussin, professeur à l'Université de Louvain, correspondant de l'Académie, pour son *Cours d'Analyse infinitésimale* et ses *Leçons sur les intégrales de Lebesgue et les fonctions d'ensemble.*

Astronomie. — Prix Lalande (1000 fr.). — M. Robert Jonckeere, pour son cataloque d'étoiles doubles. — Prix Valz (460 fr.). — M. Alex. Schaumasse, aide-astronome à l'Observatoire de Nice, découverte de la comète 1917 b.

Histoire et Philosophie des Sciences. — Prix Binoux (2000 fr.). — M. F. Gomes Teixeira, recteur de l'Université de Porto, pour ses « Obras sobre Mathematica ».

Prix généraux. — Prix Saintour (3000 fr.). — M. H. Lebesgue, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, pour ses travaux sur les principes du calcul infinitésimal.

Navigation. — Un prix de 2000 francs est décerné à M. G. Nugot, ingénieur de l'artillerie navale, pour ses travaux de balistique théorique et pratique.

Prix Plumey. — Un prix de 2000 francs est décerné à MM. Sensever, aviateur, et L. Ballif, ingénieur de l'artillerie navale, pour les recherches d'aérodynamique publiées dans leur ouvrage intitulé « le Combat aérien ».

Société mathématique suisse.

Zurich, 11 septembre 1917.

La Société mathématique suisse a tenu sa huitième réunion ordinaire à Zurich, le 11 septembre 1917, sous la présidence de M. le Prof. Marcel Grossmann (Zurich), à l'occasion de la réunion annuelle de la Société helvétique des Sciences naturelles.

Voici les résumés des communications, au nombre de quinze, présentées à la séance ou dont les mémoires ont simplement été annoncés, en l'absence de leur auteur.

1. — M. le Prof. A. Emch (Urbana, E.-U.). — *Sur les courbes planes qui ont pour foyers réels, dans le plan complexe, les racines* n^ièmes^ *de l'unité.* — I. Soit

$$\Phi(u, v, w) = 0 \qquad (1)$$

l'équation d'une courbe de $n^{\text{ième}}$ classe en coordonnées homogènes et

$$u\xi + v\eta + w\zeta = 0$$

l'équation d'une droite.

Les coordonnées cartésiennes correspondantes sont définies par

$$x = \frac{\xi}{\zeta}, \qquad y = \frac{\eta}{\zeta};$$

dans ce cas

$$-\xi - i\eta + (x + iy)\zeta = 0 \qquad (2)$$

est l'équation d'une droite qui passe par le point (x, y) et par un des points cycliques du plan. Les coordonnées homogènes de la ligne (2) sont

$$\varrho u = -1, \qquad \varrho v = -i, \qquad \varrho w = x + iy.$$

Si donc, x et y sont déterminées de telle sorte que

$$\Phi(-1, -i, x + iy) = 0 \qquad (3)$$

soit satisfaite par x et y, la tangente à (1) définie par (2) passera par le point réel (x, y) et un des points cycliques. En conséquence, (x, y) est un foyer réel de la courbe (1). Il résulte de (3) qu'il y a, en général n foyers réels de ce genre; on les obtient en mettant (3) sous la forme

$$f(x, y) + ig(x, y) = 0 \qquad (4)$$

et en cherchant les solutions communes à

$$f(x, y) = 0 \quad \text{et} \quad g(x, y) = 0.$$

Nous obtenons ainsi les n foyers réels et les $n(n-1)$ foyers imaginaires de la courbe (1).

Après avoir rappelé ces faits connus, nous allons déterminer celles des courbes (1) qui possèdent pour foyers, dans le plan complexe, les racines $n^{\text{ièmes}}$ de l'unité.

L'équation (3) prend alors la forme

$$-1 + (x + iy)^n = 0 \tag{5}$$

et (1) devient

$$a_0 u^n + a_1 u^{n-1} v + a_2 u^{n-2} v^2 + \ldots + a_n v^n + w^n = 0 \tag{6}$$

Dans cette égalité les coefficients doivent être choisis de telle sorte que

$$a_0(-1)^n + a_1(-1)^{n-1}(-i) + a_2(-1)^{n-2}(-i)^2 + \ldots$$
$$+ a_n(-i)^n + 1 \equiv 0$$

soit identiquement nul, ce qui peut être réalisé d'une infinité de manières ; par suite, chaque n fournit une classe infinie de semblables courbes.

L'équation cartésienne s'obtient par le procédé d'élimination habituel. Parmi les nombreuses classes de courbes ainsi obtenues, signalons le cas dans lequel (6) prend la forme

$$\Phi \equiv u^{n-2k} \cdot v^{2k} - w^n = 0 \ , \tag{7}$$

où k est pair ou impair en même temps que n.

Une transformation facile, un peu longue toutefois, donne l'équation de la courbe (7) en coordonnées cartésiennes

$$x^{n-2k} \cdot y^{2k} = (-1)^{n-2k} \cdot \frac{(2k)^{2k}}{n^n (n-2k)^{2k-n}} \ .$$

C'est une hyperbole d'ordre n. Les foyers de cette courbe sont réels ; ils sont aux sommets du polygone régulier de n côtés inscrits dans le cercle de rayon 1, le point (1, 0) étant un des sommets.

Lorsqu'on a

$$-1 + (x + iy)^2 = 0 \ ,$$

on obtient naturellement un système d'hyperboles et d'ellipses homofocales.

La courbe (7) est rationnelle; ses équations paramétriques se

déterminent facilement. Les points à l'infini de l'axe des x et de l'axe des y constituent respectivement

$$\frac{(n-1)(2k-1)}{2} \quad \text{et} \quad \frac{(n-1)(n-2k-1)}{2},$$

soit ensemble $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ points doubles.

2. — M. le Dr G. Pólya (Zurich). — *Sur les propriétés arithmétiques des séries entières, qui représentent des fonctions rationnelles.* — I. L'intégrale d'une fonction rationnelle ne peut pas être développée en série entière à coefficients entiers, excepté le cas où elle est elle-même rationnelle.

II. — En développant une fonction rationnelle en série de Mac-Laurin à coefficients rationnels, les dénominateurs de ceux-ci seront composés d'un nombre fini de facteurs premiers (cas trivial d'un théorème d'Eisenstein). Quand arrive-t-il, que les *numérateurs* aient la même propriété ?

Voici la réponse, qu'on obtient en combinant les éléments de la théorie des idéaux avec certaines considérations sur les séries entières : toutes les séries en question peuvent être déduites de la seule série

$$1 + x + x^2 + x^3 + \ldots = \frac{1}{1-x}$$

par l'application répétée (un nombre fini de fois) des opérations suivantes :

1. Addition d'un polynôme.
2. Multiplication de la série par ax^r.
3. Changement de variable $x \mid ax$.
4. Changement de variable $x \mid x^m$.
5. Addition des deux séries telles que le coefficient de x^n soit $= 0$ dans une des deux au moins, pour $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

3. — M. le Dr A. Ostrowski (Marburg a. d. L.) et M. le Dr G. Pólya (Zurich). — *Sur les polynômes à valeurs entières dans un corps algébrique.* — Nous dirons d'un polynôme $P(x)$ qu'il est à valeurs entières dans un corps algébrique K, si $P(\xi)$ est un entier algébrique appartenant à K pour tous les entiers ξ de K. Un polynôme à valeurs entières de degré m est nécessairement de la forme

$$\frac{\alpha x^m + \beta x^{m-1} + \ldots + \lambda}{m!},$$

$\alpha, \beta, \ldots \lambda$ étant des entiers appartenant à K.

Envisageons l'ensemble de tous les entiers α tels que $\frac{\alpha}{m!}.x^m$ soit le terme le plus élevé d'un polynôme à valeurs entières de degré m. Cet ensemble d'entiers est un certain *idéal* dans K, que nous désignerons par $\mathfrak{a}_m$. Le résultat principal de notre analyse est le calcul explicite de $\mathfrak{a}_m$. Désignons par $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_2, \ldots \mathfrak{p}_l$ les idéaux premiers divisant $m!$, par $N_1, N_2, \ldots N_l$ leurs normes, et posons

$$k_i = \left[\frac{m}{N_i}\right] + \left[\frac{m}{N_i^2}\right] + \left[\frac{m}{N_i^3}\right] + \cdots .$$

On a

$$\mathfrak{a}_m \mathfrak{p}_1^{k_1} \mathfrak{p}_2^{k_2} \ldots \mathfrak{p}_l^{k_l} = (m!) . \qquad \text{(I)}$$

Les polynômes à valeurs entières dans le corps des nombres rationnels sont, comme on sait, de la forme

$$a_0 + a_1 \frac{x}{1} + a_2 \frac{x(x-1)}{1.2} + \ldots + a_m \frac{x(x-1)\ldots(x-m+1)}{1.2\ldots m} ,$$

$a_0, a_1, a_2, \ldots a_m$ étant des entiers rationnels. Les polynômes

$$1 , \quad x , \quad \frac{x(x-1)}{1.2} , \ldots \quad \frac{x(x-1)\ldots(x-m+1)}{1.2\ldots m} , \ldots$$

forment donc une espèce de « base » des polynômes à valeurs entières. La condition nécessaire et suffisante de l'existence d'une base analogue dans un corps algébrique K quelconque est la suivante : Il faut que tous les idéaux $\mathfrak{a}_0, \mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_m, \ldots$ soient des idéaux principaux (Hauptideale). Cette condition se transforme facilement à l'aide de (I) : En formant le produit de tous les idéaux premiers *de même degré,* qui divisent un nombre rationnel p, il faut que ce produit soit un idéal principal pour p quelconque. Ainsi, dans un corps de Galois (Normalkörper) l'existence de la base ne dépend que des diviseurs du discriminant (Grundzahl). Par exemple, la base existe dans tous les corps engendrés par une racine primitive de l'unité de degré premier.

On peut résoudre la question de l'existence d'une base aussi dans le cas des polynômes à valeurs entières qui dépendent de plusieurs variables. La condition est la même.

4. — M. le Dr Ferd. Goxseth (Zurich). — *Un théorème relatif à deux ellipsoïdes confocaux.* — Le théorème dont il s'agit est une extension à l'espace du théorème bien connu de Graves :

Si un fil passé autour d'une ellipse est tendu par une pointe, celle-ci peut décrire une ellipse confocale à la première.

L'analogue de l'espace s'énonce comme suit :

Théorème : *Si d'un point* P *on mène le cône tangent à un ellipsoïde, et qu'on calcule l'intégrale de la courbure moyenne étendue à la surface fermée, convexe, formée par le cône arrêté aux points de contact et par la portion de l'ellipsoïde qui lui fait suite, cette intégrale reste constante si* P *décrit un ellipsoïde confocal au premier.*

La méthode de démonstration est exposée d'abord pour le théorème de Graves. L'intégrale $\int\int dp\, d\varphi$ étendue au domaine (φ, p) d'un ensemble de droites $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$ est, d'après Crofton, la *mesure* de cet ensemble. En particulier la mesure des droites qui rencontrent une courbe convexe fermée est égale à l'intégrale de sa largeur, c'est-à-dire — fait connu — à son périmètre.

D'autre part, les mêmes droites étant $ux + vy + 1 = 0$, on reconnaîtra que la mesure est égale à la *surface non-euclidienne* de l'ensemble des points de coordonnées rectangulaires

$$x = u\ , \qquad y = v\ , \tag{1}$$

dans un plan dont la conique absolue est $x^2 + y^2 = 0$.

Soient maintenant ε_1 et ε_2 deux ellipses confocales ; un point P de ε_1, avec sa tangente t, d'où l'on mène les tangentes a et b, à ε_2. Cette figure est transformée par la transformation définie par les formules (1). On obtient deux coniques ε'_1 et ε'_2 ; une tangente p à ε'_1, avec son point de contact T, coupe ε'_2 en A et B.

Le théorème de Graves sera exact si l'aire non-euclidienne (au sens défini plus haut) de la portion de plan située à l'extérieur de la courbe fermée convexe formée par le segment AB et une portion de l'ellipse ε'_2 est constante lorsque p varie. On mènera une tangente voisine, et il suffira de prouver l'égalité de deux triangles infiniment petits. Cette égalité résulte du fait que T est au milieu (non-euclidien) de AB, puisque t est la bissectrice de a et b.

Dans l'espace, on définit semblablement la mesure d'un ensemble de plans

$$x \cos\alpha + y \cos\beta + z \cos\gamma - p = 0\ ,$$

ou bien

$$ux + vy + wz + 1 = 0\ ;$$

on la reconnaîtra égale au *volume non-euclidien* de l'ensemble des points de coordonnées rectangulaires $x = u$, $y = v$, $z = w$, dans un espace dont la quadrique absolue est $x^2 + y^2 + z^2 = 0$.

En particulier la mesure des plans qui coupent une surface fermée convexe vaut l'intégrale de la largeur, et d'après une formule de M. Hurwitz, l'intégrale de la *courbure moyenne* de cette surface.

Le reste de la démonstration se calquera sur la précédente.

5. — M. le Prof. Dr L. Kollros (Zurich). — *Propriétés métriques des courbes algébriques.* Toute propriété *métrique* peut être considérée comme *projective* si l'on fait intervenir les éléments absolus : la droite à l'infini et les points cycliques (pour la géométrie euclidienne plane). On peut donc transformer les propriétés métriques par une collinéation ou une réciprocité, et l'on arrive à des rapprochements entre des théorèmes qui paraissent très différents. Ainsi, le théorème de Carnot sur les courbes algébriques planes coupées par un triangle devient — par une réciprocité dans laquelle les points cycliques correspondent à deux côtés du triangle — le théorème suivant de Laguerre : Si par un point on mène les n tangentes à une courbe algébrique plane de classe n et si l'on joint ce point aux n foyers réels de la courbe, les deux faisceaux de droites ainsi obtenues ont même orientation[1].

Dans les deux théorèmes, le produit de n rapports anharmoniques (T_iOAB) est constant, O, A, B étant fixes et les T_i variables. Dans le théorème de Laguerre, les points T_i, O, A, B sont tous à l'infini ; A et B sont les points cycliques ; O est le point à l'infini de l'axe-origine des angles.

Si B tend vers A, cette condition devient : $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{T_iA} = \text{const.}$; elle exprime que le pôle harmonique P de A par rapport au système des n points variables T_i est fixe. Si A est à l'infini, P est le centre de gravité des points T_i. D'autre part, un foyer, point d'intersection de deux tangentes isotropes, doit être remplacé par le point de contact d'une tangente menée de A à la courbe. Une réciprocité telle que le point A devienne la droite à l'infini remplace les points de contact des tangentes à la courbe issues de A par les asymptotes de la courbe transformée. Ainsi, *à un théorème où un système de droites variables a une orientation constante, correspond un théorème où un système de points variables a un centre de gravité fixe. De plus, à un foyer de la première figure correspond une asymptote de la seconde.*

Exemples : 1. Au théorème de Laguerre, cité plus haut, correspond le suivant : Le centre de gravité des points de rencontre d'une droite avec une courbe du $n^{\text{ième}}$ ordre est le même que celui des points d'intersection de la droite avec les asymptotes de la courbe.

2. Les systèmes de tangentes menées d'un point à deux courbes de même classe ont même orientation si le point est foyer d'une des courbes

Les centres de gravité des deux systèmes de points de rencontre de deux courbes algébriques de même ordre par une asymptote d'une courbe

[1] Deux systèmes de n droites ont même orientation lorsque la somme des angles que font les n droites avec un axe fixe est la même pour les deux systèmes (à un multiple de π près).

du faisceau tangentiel déterminé par les deux premières (Humbert).

3. L'orientation du système des mn tangentes communes à deux courbes algébriques ne varie pas quand on remplace l'une des deux par une courbe qui lui est homofocale (Laguerre).

du faisceau ponctuel déterminé par les deux premières, coïncident.

Le centre de gravité des points de rencontre de deux courbes algébriques ne varie pas quand on remplace l'une des deux par une autre qui a les mêmes asymptotes.

6. — M. le Prof. Dr O. Spiess (Bâle). — *Un théorème relatif aux fonctions rationnelles.* — Lie a émis la supposition qu'on doit pouvoir obtenir toute fonction analytique $f(x)$ par itération d'une substitution infinitésimale $x + g(x)\,dt$; que $f(x)$ est par conséquent un élément d'un groupe continu de transformations. On n'a pas réussi jusqu'ici à démontrer ce théorème, même pour la classe très spéciale des fonctions algébriques. *Je démontrerai ici que la supposition de Lie est exacte au moins pour les fonctions rationnelles.*

Le problème peut se réduire à déterminer, pour chaque $f(x)$ donné, une fonction Φ qui satisfasse à l'équation

$$\Phi(f(x)) = \rho \,.\, \Phi(x) \,. \tag{1}$$

La transformation infinitésimale originelle est alors déterminée par

$$f(x) = \frac{\Phi}{\Phi'} \,.$$

Or MM. Kœnigs, Grévy et Léau ont démontré depuis longtemps qu'il existe des solutions de (1) dans le voisinage de certains points fixes de $f(x)$. Si, en particulier, $f(x)$ est rationnelle, ces méthodes fournissent toujours une solution analytique excepté le seul cas où l'on a, pour tout point fixe α_k

$$\varepsilon_k = f'(\alpha_k) = e^{2\pi i h_k} \qquad (h_k \text{ est irrationnelle}). \tag{2}$$

Et encore dans ce cas on connaît une solution si $f(x)$ est linéaire : $\Phi(x) = x$.

La supposition de Lie sera donc démontrée pour une fonction rationnelle, si nous faisons voir que :

Théorème : Une fonction rationnelle dont tous les points fixes ont la propriété (2) est nécessairement linéaire.

Démonstration : Les points fixes $\alpha_1, \ldots \alpha_n$ de $f(x) = \frac{r(x)}{s(x)}$ nous

pouvons les supposer tous dans le fini) sont racines de l'équation : $\psi \equiv xs - r = 0$. Il en suit immédiatement :

$$\varepsilon_k = f'(\alpha_k) = 1 - \frac{\psi'(\alpha_k)}{s(\alpha_k)}.$$

Les nombres :

$$w_k = \frac{1}{1 - \varepsilon_k} = \frac{s(\alpha_k)}{\psi'(\alpha_k)}$$

sont au même titre que les $\varepsilon_k \neq 0, 1, \infty$ (en vertu de (2)) ; par conséquent on aura d'après Lagrange :

$$\frac{s}{\psi} = \sum_1^n \frac{w_k}{x - \alpha_k};$$

et de là :

$$\sum_1^n w_k = \left[\frac{xs}{\psi}\right]_{x=\infty} = 1 \; ; \quad \text{ou bien (3)} \quad \frac{w_1 + \cdots + w_n}{n} = \frac{1}{n}.$$

Or, en vertu de (2), les points ε_k sont sur le cercle unité de centre O ; et par conséquent les points w_k sur la perpendiculaire à l'axe réel par $x = \frac{1}{2}$. Mais comme, en vertu de (3), le centre de gravité des w_k est $x = \frac{1}{n}$, il faut que $n = 2$, c'est-à-dire que $f(x)$ soit linéaire. C. q. f. d.

7. — M. le Prof. Dr A. Hurwitz (Zurich). — *Généralisation du théorème de Pohlke.* (Extrait d'une lettre à M. Kollros.) — *Etant donnés deux tétraèdres, on peut toujours, en remplaçant l'un d'eux par un tétraèdre semblable, les amener dans une position telle que les droites joignant les sommets correspondants soient parallèles entre elles.*

En effet, si ABCD et A'B'C'D' sont les tétraèdres donnés, l'affinité $\begin{pmatrix} \text{ABCD} \\ \text{A'B'C'D'} \end{pmatrix}$ transforme la sphère K circonscrite à ABCD en un ellipsoïde K' circonscrit au tétraèdre A'B'C'D'. Déterminons une section circulaire c' de l'ellipsoïde K'; à ce cercle c' correspond, par l'affinité considérée, un cercle c sur la sphère K. Dilatons le tétraèdre ABCD, avec la sphère K et le cercle c, à une échelle choisie pour que le cercle c devienne un cercle c_1 égal au cercle c'. Le tétraèdre dilaté $A_1B_1C_1D_1$, semblable au tétraèdre ABCD, peut dès lors être mis dans une position telle que le cercle c_1

coïncide point par point avec le cercle c' ; ainsi les deux espaces en affinité deviennent perspectifs et les droites AA′, BB′, CC′, DD′ sont parallèles.

Le problème admet deux solutions essentiellement différentes, correspondant chacune à l'un des deux systèmes de sections circulaires de l'ellipsoïde K′.

Si ABCD sont quatre points d'un plan et si A′B′C′D′ est formé de trois arêtes d'un cube passant par un même sommet, on trouve, comme cas particulier, le théorème de Pohlke.

8. — M. le Prof. Dr C. Carathéodory (Gœttingue). — *Sur le traitement géométrique des extrémas des intégrales doubles.* — A côté des problèmes aux frontières auxquels le calcul des variations doit son existence et à côté du calcul des variations de Lagrange, dont l'importance grandit toujours plus dans tous les domaines, la théorie de Hamilton-Jacobi, issue il y a bientôt cent ans de l'optique et de la mécanique, joue un rôle tout aussi important.

Un essai d'extension de cette théorie aux intégrales doubles a été fait il y a quelques années[1]. Je veux, ici, esquisser les moyens très simples par lesquels on peut obtenir l'essentiel des résultats de Jacobi et Hamilton, lorsqu'aucune condition aux frontières n'est prescrite d'avance pour la solution cherchée et qu'on évite ainsi les difficultés particulières aux problèmes aux frontières.

Soit

$$J = \int\int f(x, y, z; z_x, z_y)\,dx\,dy \tag{1}$$

l'intégrale double à étudier. Considérons une famille à deux paramètres

$$S(x, y, z) = \lambda, \qquad T(x, y, z) = \mu \tag{2}$$

formée de courbes quelconques, traversant l'espace et envisageons-la comme une gerbe de tubes infiniment minces. Sur une surface quelconque $z = z(x, y)$ chacun de ces tubes découpe un élément de surface pour lequel nous pouvons calculer comme suit la valeur de l'intégrale (1).

Posons

$$\overline{S}(x, y) = S(x, y, z(x, y)), \qquad \overline{T}(x, y) = T(x, y, z(x, y)) \tag{3}$$

[1] G. Prange, *Die Hamilton-Jacobische Theorie für Doppelintegrale*, Inaug.-Diss., Göttingen, 1915.

et formons le déterminant fonctionnel

$$\Delta(x, y, z : z_x, z_y) = \frac{\partial(\overline{S}, \overline{T})}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} S_x + S_z \cdot z_x, & S_y + S_z \cdot z_y \\ T_x + T_z \cdot z_x, & T_y + T_z \cdot z_y \end{vmatrix}.$$

Il résulte alors de (1), (2), (3)

$$J = \int\int \frac{f}{\Delta} d\lambda d\mu$$

et la valeur cherchée de J pour l'élément de surface découpé est

$$\frac{f}{\Delta} d\lambda d\mu . \tag{4}$$

Cette valeur, qui dépend de z_x et z_y, c'est-à-dire de la position du plan tangent à la surface donnée $z = z(x, y)$, est la plus petite possible, lorsque les relations

$$\Delta \cdot f_{z_x} - f \cdot \Delta_{z_x} = 0 , \qquad \Delta \cdot f_{z_y} - f \cdot \Delta_{z_y} = 0 \tag{5}$$

sont vérifiées et que de plus le minimum de $f : \Delta$ comme fonction de z_x, z_y est effectivement assuré par les valeurs tirées de (5) (conditions de Legendre ou de Weierstrass).

Nous appelons *section* du tube au point d'intersection du tube avec la surface $z = z(x, y)$ le minimum de l'expression (4).

Nous exigeons maintenant de la famille de courbes (2), qu'elle ne contienne que des tubes de section *constante*. Cette condition nous donne la relation

$$\frac{f}{\Delta} = \psi(\lambda, \mu)$$

dans laquelle $\psi(\lambda, \mu)$ est d'abord une fonction arbitraire. Si nous remarquons cependant que l'on peut toujours, par une transformation convenable des paramètres λ et μ prendre $\psi(\lambda, \mu) \equiv 1$, nous obtiendrons finalement le système d'équations

$$f = \Delta , \qquad f_{z_x} = \Delta_{z_x} , \qquad f_{z_y} = \Delta_{z_y} , \tag{6}$$

duquel tout le calcul des variations des intégrales doubles se déduit sans effort.

9. — M. le Prof. D. Hilbert (Gœttingue). — *Le raisonnement axiomatique.* — En groupant les faits d'un certain domaine scientifique, nous remarquons qu'ils sont susceptibles d'être ordonnés. Cet ordre se fait à l'aide d'un partage des notions, tel qu'au fait simple du domaine, correspond une notion de ce partage, et à

chaque ensemble de faits correspond une relation logique entre les notions. Le partage des notions s'appelle la théorie axiomatique du domaine scientifique envisagé. Ce partage est basé en outre sur un nombre restreint de principes fondamentaux caractéristiques du domaine qui suffisent entièrement à édifier les notions d'après les règles de la logique. Au premier coup d'œil, ces principes fondamentaux doivent être regardés comme les axiomes du domaine scientifique en question. Tout effort d'explication des axiomes conduit en général à un nouveau système d'axiomes, c'est-à-dire à une couche plus profonde d'axiomes. Ce procédé revient donc à reculer plus profondément les bases du domaine scientifique.

La théorie d'un domaine scientifique, c'est-à-dire le partage des notions par lesquelles il est représenté, a pour but de l'orienter et de l'ordonner. Pour arriver à ce but notre partage doit remplir deux conditions : premièrement, il doit donner un aperçu sur la dépendance des éléments, secondement, il doit assurer la non-contradiction des axiomes de la théorie. Ce second point est essentiel, car toute contradiction mettrait en doute la théorie entière. La démonstration de cette non-contradiction réussit en général pour les théories de la géométrie et de la physique en réduisant le problème à la non-contradiction des axiomes de l'arithmétique.

Pour l'arithmétique, la réduction à un autre domaine scientifique plus spécial n'est plus possible, parce que, en dehors de la logique, il n'existe plus aucune autre discipline à laquelle l'esprit humain doit se soumettre. Il semble donc nécessaire de pousser la recherche des axiomes de la logique dans ses dernières limites. Ce chemin a été préparé depuis longtemps ; les recherches du logicien Russell ont été particulièrement couronnées de succès.

Cette analyse des axiomes de la logique est rattachée à une série de questions spécialement mathématiques. Elle constitue dans tous les cas le problème le plus important et le plus difficile de la théorie de la connaissance.

10. — M. le Prof. A. Speiser (Zurich). — *Equations du cinquième degré.* — On sait que le groupe alternant de cinq variables est isomorphe aux 60 rotations de l'icosaèdre. Elle admet par conséquent une représentation par substitutions linéaires ternaires :

$$S = (s_{ik}) \qquad \left.\begin{matrix} i \\ k \end{matrix}\right\} 1, 2, 3 \qquad S = E, A, B \ldots$$

ainsi que par substitutions linéaires fractionnaires

$$x' = \frac{s_1 x + s_2}{s_3 x + s_4}.$$

Si ω est un nombre générateur d'un corps avec ce groupe, et si $\omega = \omega_\varepsilon$, ω_A, ..., ω_S sont les nombres conjugués, les trois nombres

$$A_1 = \sum_S s_{11}\omega_S\,, \qquad A_2 = \sum_S s_{12}\omega_S\,, \qquad A_3 = \sum_S s_{13}\omega_S$$

subissent des substitutions ternaires par le passage aux conjugués et

$$\alpha = \frac{-A_2 \pm \sqrt{A_2^2 - 4A_1A_3}}{2A_1}$$

subit par là les substitutions linéaires fractionnaires.

Par là, le problème de l'équation du 5e degré est ramené, de la manière la plus générale, à un problème à un paramètre.

11. — M. le Dr S. Bays (Fribourg). — *Sur les systèmes de triples de 13 éléments.* — La preuve que pour 13 éléments le système cyclique de Netto, et le système donné par Kirkmann, Reiss, de Vries, sont *les deux seuls systèmes de triples de Steiner différents possibles,* peut être faite, sans l'aide d'aucune notion particulière et d'une manière assez simple, en construisant directement les systèmes de triples de 13 éléments qui *ne contiennent pas* un triple fixé *abc*.

Un système de triples de Steiner qui ne contient pas le triple *abc* contient les trois triples :

$$bc\alpha \qquad ca\beta \qquad ab\gamma \qquad (\alpha\,,\ \beta\,,\ \gamma \neq a\,,\ b\,,\ c \ \text{ et entre eux})\,,$$

où α, β, γ peuvent être tous les arrangements de dix éléments trois à trois. Pour un arrangement α, β, γ fixé, il n'y a que deux possibilités qui donnent, pour la construction du système, les seules dispositions suivantes qui s'écrivent aisément :

Ier cas. Le triple $\alpha\beta\gamma$ est contenu dans le système.

$a\alpha\alpha'$	$a\,..$	$a\beta'.$	$a\gamma'.$	$\alpha\,..$	$\alpha\beta'.$	$\alpha\gamma'.$	$\alpha'\beta'\gamma'$
$b\beta\beta'$	$b\alpha' m$	$b\,..$	$b\gamma'.$	$\beta\alpha' p$	$\beta\,..$	$\beta\gamma'.$	(40)
$c\gamma\gamma'$	$c\alpha' n$	$c\beta'.$	$c\,..$	$\gamma\alpha' q$	$\gamma\beta'.$	$\gamma\,..$	

IIe cas. Le triple $\alpha\beta\gamma$ n'est pas contenu dans le système.

				$\beta\gamma\alpha'$	$\gamma\alpha\beta'$	$\alpha\beta\gamma'$		
		$a\alpha m$	$a\alpha' n$	$a\beta' p$	$a\gamma' q$	$\alpha\alpha'.$	$\alpha..$	$\alpha'\beta'\gamma'$
	1o	$b\beta.$	$b\alpha'.$	$b\beta'.$	$b\gamma'.$	$\beta\beta'.$	$\beta..$	(8)
		$c\gamma.$	$c\alpha'.$	$c\beta'.$	$c\gamma'.$	$\gamma\gamma'.$	$\gamma..$	
a) $\alpha'\beta'\gamma'$ est contenu dans le système.		$a\alpha\alpha'$	$a\,..$	$a\beta'.$	$a\gamma'.$	$\alpha\,..$	$\alpha..$	$\alpha'\beta'\gamma'$
	2o	$b\beta m$	$b\alpha' n$	$b\beta' p$	$b\gamma' q$	$\beta\beta'.$	$\beta..$	$\alpha'..$
		$c\gamma.$	$c\alpha'.$	$c\beta'.$	$c\gamma'.$	$\gamma\gamma'.$	$\gamma..$	(8)

b) $\alpha'\beta'\gamma'$ n'est pas contenu dans le système.		$a\alpha\alpha'$	$a\,..$	$a\beta'\gamma'$	$a\,..$	$\alpha\,..$	$\alpha\,..$	$\alpha'\beta'm$
	1°	$b\beta.$	$b\alpha'p$	$b\beta'.$	$b\gamma'.$	$\beta\beta'.$	$\beta\,..$	$\alpha'\gamma'n$
		$c\gamma.$	$c\alpha'q$	$c\beta'.$	$c\gamma'.$	$\gamma\gamma'.$	$\gamma\,..$	(12)
		$a\alpha m$	$a\alpha'n$	$a\beta'p$	$a\gamma'q$	$\alpha\alpha'.$	$\alpha\,..$	$\beta'\gamma'.$
	2°	$b\beta.$	$b\,..$	$b\beta'\alpha'$	$b\gamma'.$	$\beta\beta'.$	$\beta\,..$	$\alpha'\,..$
		$c\gamma.$	$c\,..$	$c\beta'.$	$c\gamma'\alpha'$	$\gamma\gamma'.$	$\gamma\,..$	(24) pour $a\alpha'n$
								(20) pour $b\alpha'n$ ou $c\alpha'n$

Dans chacune de ces dispositions, les éléments α', β', γ', différents entre eux et des éléments a, b, c, α, β, γ, peuvent être tous les arrangements des sept éléments restants trois à trois ; pour chaque arrangement α', β', γ'; m, n, p, q peuvent être toutes les permutations des quatre derniers éléments. Pour un arrangement α', β', γ' et une permutation m, n, p, q fixés, chacune des dispositions se complète par les éléments m, n, p, q (et cela sans y mettre beaucoup de temps) du nombre de manières que j'ai indiqué à droite, c'est-à-dire donne ce nombre de systèmes. En tenant compte des dispositions où les deux éléments β' et γ' ont à prendre le même rôle que α', nous obtenons donc :

$$A^3_{10} \cdot A^3_7 \cdot P_4 \cdot (40 + 8 + 3.8 + 3.12 + 3.(24 + 2.20)) = 10!\,300$$

systèmes de triples, ne contenant pas le triple abc, et par suite $\frac{10!\,300.11}{10} = 10!\,330$ systèmes de triples de 13 éléments, qui diffèrent entre eux au moins par un de leurs triples. Or, les ordres des groupes qui transforment en eux-mêmes le système cyclique de Netto et celui de Kirkmann sont 39 et 6 ; $\frac{13!}{39} + \frac{13!}{6} = 10!\,330$. Par conséquent, le système cyclique de Netto et le système de Kirkmann sont *les deux seuls systèmes de triples de Steiner différents pour 13 éléments.*

12. — M. le Prof. L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel). — *Sur un point de la théorie des nombres hypercomplexes.* — Dans un système de nombres hypercomplexes à n unités relatives, constitué pour une infinité d'éléments tels que

$$x \equiv x_0 e_0 + x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n\,, \qquad \text{où les} \qquad x_1, x_2, \ldots, x_n$$

sont des nombres réels quelconques dits « *coordonnées* du nombre hypercomplexe x », et les e_0, e_1, ..., e_n des symboles dits *unités*

relatives, supposons définies l'égalité et deux opérations de calcul : l'addition et la multiplication. Il en résulte l'existence de deux opérations inverses qu'on appellera soustraction et division. Envisageons le corps de nombres $\{R\}$ formé par l'ensemble des nombres hypercomplexes à coordonnées x_λ toutes rationnelles. Pour faire l'arithmomie de $\{R\}$, commençons par définir le nombre hypercomplexe « entier ». Selon la définition lipschitzienne, un nombre hypercomplexe rationnel x est *nombre entier*, quand toutes ses n coordonnées x_λ sont des nombres entiers ordinaires, tandis que x est réputé « non entier », dès que l'une de ses coordonnées x_λ est un nombre fractionnaire. On sait depuis Gauss que cette définition, appliquée aux nombres complexes ordinaires $x_0 + x_1 i$, où $i^2 = -1$, donne une arithmomie parfaitement régulière, analogue en tout point à l'arithmétique classique. L'exemple le plus simple montrant combien cette définition lipschitzienne si simple est cependant peu appropriée *en général* comme base d'une arithmétique généralisée, est fourni par les « nombres complexes de seconde espèce » $x \equiv x_0 + x_1 j$, où j est un symbole défini par l'égalité $j^2 = 1$.

En adoptant la définition lipschitzienne, on voit que dans ce système particulier, un produit peut être divisible par un nombre entier sans qu'aucun des facteurs ne le soit ; exemple : $(3 + j)(5 - 3j) = 12 - 4j$ qui est divisible par 2. On peut faire tomber cette irrégularité, et d'autres encore, en remplaçant la définition lipschitzienne par la définition hurwitzienne d'après laquelle un nombre hypercomplexe x est réputé « entier » s'il est contenu dans le domaine holoïde maximal [M] du corps de nombres en question, « non entier » s'il ne fait pas partie de ce domaine holoïde maximal [M]. En vertu de cette définition nouvelle, un complexe rationnel x peut fort bien être entier quoiqu'ayant des coordonnées x_λ fractionnaires. Dans le cas particulier cité, on appellera *entier* tout nombre complexe de seconde espèce représentable par la formule $a + \frac{b}{2} + \frac{b}{2}j$, où a et b sont des nombres entiers ordinaires d'ailleurs quelconques. Ainsi, $\frac{3}{2} + \frac{j}{2}$, $\frac{5}{2} - \frac{3}{2}j$ sont maintenant des complexes « entiers » et il n'est dès lors plus surprenant que $(3 + j)(5 - 3j)$ soit divisible par 4.

La définition hurwitzienne postule dans le corps de nombres envisagé *l'existence d'un domaine holoïde maximal*. On appelle ainsi tout ensemble [M] contenant une infinité de nombres, parmi lesquels le nombre 1 et le nombre 0, jouissant des propriétés suivantes : 1) la somme, la différence et le produit de deux nombres quelconques de l'ensemble appartient toujours au même ensemble ; 2) il possède une base finie ; 3) il n'existe pas dans le corps de

nombres en question un autre domaine holoïde contenant tous les éléments de [M] plus encore d'autres non contenus dans [M].

Dans le cas des nombres complexes de Gauss, l'ensemble de tous les $n_1 + n_2 . i$, lorsque n_1 et n_2 parcourent, indépendamment l'un de l'autre, la série des nombres entiers de $-\infty$ à $+\infty$, constitue un domaine holoïde maximal dans $\{R\}$, en sorte que définition lipschitzienne et définition hurwitzienne se confondent. Tel n'est pas le cas des nombres complexes de seconde espèce : l'ensemble [H] de tous les $n_1 + n_2 j$, c'est-à-dire des complexes à coordonnées entières, constitue bien un domaine holoïde, mais qui n'est pas maximal dans $\{R\}$, puisque l'ensemble [M] de tous les $n_1 + \frac{n_2}{2} + \frac{n_2}{2} j$ contient les éléments de [H] et, en plus, d'autres ne faisant pas partie de [H].

Il existe des systèmes de nombres hypercomplexes où le corps $\{R\}$ des complexes rationnels ne possède pas de domaine holoïde maximal. Dans ce cas, il n'est pas possible de définir le nombre hypercomplexe « entier » de manière à obtenir une arithmomie régulière. L'exemple le plus simple d'un tel système est fourni par les « nombres complexes de 3e espèce » $y \equiv y_0 + y_1 i'$ où les coordonnées y_0, y_1 sont de nouveau des nombres réels et i' un symbole défini par $i'^2 = 0$, le calcul sur ces nombres se faisant d'après les règles ordinaires de l'algèbre.

Pour caractériser les systèmes de nombres hypercomplexes sans domaine holoïde maximal, envisageons la suite x, x^2, x^3 ..., x^n, x^{n+1}, ... où x représente un nombre hypercomplexe à n unités relatives. Si l'une de ses puissances est identiquement nulle, $x^r = 0$, le nombre x est dit « nilpotent » ou « pseudonul », ou encore « *racine* r^ième^ *de zéro*. Ainsi, dans le système des nombres complexes de 3e espèce, i' est une racine carrée de zéro, puisque, par définition, $i'^2 = 0$.

Une condition nécessaire pour que le corps $\{R\}$ *des nombres hypercomplexes rationnels soit dépourvu de domaine holoïde maximal est que le système en question contienne des racines de zéro.* Si le nombre des unités relatives dépasse 3, cette condition nécessaire n'est pas toujours suffisante. Mais quand un système de nombres contenant des racines de zéro n'est pas dépourvu complètement de domaine holoïde maximal, il possède une infinité de domaines holoïdes maximaux différents entre eux. La définition du complexe « entier » est alors plurivoque.

13. — M. le Prof. L.-G. Du Pasquier (Neuchâtel). — *Une nouvelle formule d'interpolation dans la théorie mathématique de la population.* — Pour étudier les variations ΔP que subit un groupe de population $P(t)$ avec le temps t, on suppose que l'effectif $P(t)$

est une fonction continue du temps et l'on définit *l'intensité de variation à l'instant* t par

$$\sigma(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \left(\frac{\Delta P}{P . \Delta t} \right) = \frac{dP}{P . dt} = \frac{P'}{P} .$$

On définit de même des intensités spéciales, notamment *l'intensité de natalité* $\nu(t)$; *l'intensité de mortalité* $\mu(t)$; *l'intensité d'immigration* $\iota(t)$; *l'intensité d'émigratian* $\varepsilon(t)$. Pour les facteurs qui tendent à diminuer l'effectif, on arrive à la même notion en partant de la théorie des probabilités mathématiques. On définit par exemple *le taux instantané de mortalité* par

$$\lim_{n \to 0} \left(\frac{n^q t}{n} \right) ,$$

en désignant par $n^q t$ la probabilité pour une personne d'âge t de décéder au cours des n premières années, et l'on démontre que ce taux est égal à l'intensité de mortalité $\mu(t)$. En vertu d'une propriété fondamentale des « fonctions d'intensité » ou « taux instantanés », on peut écrire

$$\sigma(t) = \nu(t) - \mu(t) + \iota(t) - \varepsilon(t) ,$$

la natalité, la mortalité, l'immigration et l'émigration étant les quatre facteurs dont la variation de l'effectif $P(t)$ dépend directement.

En faisant des hypothèses appropriées sur le taux instantané de variation, on retrouve les théories formelles de la population émises jusqu'ici. Ainsi, $\sigma(t) = 0$ donne la théorie de la population stationnaire (E. Halley) ; $\sigma(t) =$ const. conduit à la théorie *eulérienne* de la population variant en progression géométrique ; $\sigma(t)$ inversement proportionnel à l'effectif, $\sigma(t) = \frac{c}{P}$, donne la théorie de la population variant en progression arithmétique (de Moivre) ; l'hypothèse

$$\sigma(t) = c(m - P) ,$$

où c et m désignent des constantes positives, donne la théorie de F.-P. Verhulst qui suppose que la population, partant de l'effectif initial P_0, augmente constamment, mais de plus en plus lentement et finit par atteindre un état stationnaire caractérisé par l'effectif m (abstraction faite des écarts accidentels) ; formule :

$$P(t) = P_0 . \frac{m . e^{mct}}{P_0 . e^{mct} + m - P_0} .$$

On peut développer une théorie nouvelle en supposant qu'avec le temps surgissent des facteurs qui influencent l'intensité de variation. Une formule relativement simple se déduit entre autres de l'hypothèse

$$\sigma(t) = \frac{2c}{P}(b - t)(P - m)^2$$

où c, b, m désignent des constantes ; elle conduit par intégration à

$$P(t) = m + \frac{P_0 - m}{c(P_0 - m)(t^2 - 2bt) + 1}.$$

Parti de l'effectif initial P_0, la population passe (après un temps b) par un maximum égal à $m + \frac{1}{1 - cb^2}$, puis tend vers un état stationnaire caractérisé par l'effectif constant m.

En terminant, l'auteur indique les bases d'une théorie future de la population, théorie formelle mieux adaptée à la réalité que celles émises jusqu'ici.

14. — M. le Dr H. Berliner (Berne). — *Sur une loi de la pluralité infinie permettant d'interpréter chaque théorème de la géométrie projective d'une infinité de manières.* — La recherche des coordonnées homogènes projectives d'un point du plan est basée sur les propriétés suivantes : chaque point détermine trois transversales par les sommets du triangle fondamental $A_1A_2A_3$ du système des coordonnées. Chaque point et le point fondamental déterminent d'une manière univoque trois rapports doubles, dont le produit est constant pour tous les points. Inversement trois rapports déterminent un point du plan. Au lieu des points on peut admettre les courbes symétriques triangulaires D_m avec l'indice m qui est un entier quelconque comme élément de la recherche des coordonnées homogènes et projectives. La représentation paramétrique de ces courbes est de la forme

$$\rho x_\lambda = c_\lambda(a_\lambda t + b_\lambda)^m \qquad (\lambda = 1, 2, 3)$$

(on a choisi les c_λ pour pouvoir considérer aussi les points comme courbes). Les points communs d'une courbe D_m et des côtés de $A_1A_2A_3$ sont trois points de tangence ou trois sommets (suivant que m est positif ou négatif). Par chacun de ces derniers il n'existe qu'une seule tangente. Les D_m déterminent ainsi trois transversales des sommets $A_\lambda D_m$ ($\lambda = 1, 2, 3$), c'est-à-dire passant par les points de tangence de D_m avec les côtés opposés ou les tangentes de D_m en A_1, A_2, A_3. Avec une telle courbe D_m et l'élément fon-

damental (ce dernier peut être une courbe triangulaire symétrique fixe quelconque d'un indice k entier). On détermine trois rapports anharmoniques dont le produit a la valeur $(-1)^{k-m}$. Inversement trois rapports anharmoniques déterminent d'une manière univoque une courbe D_m. On peut admettre les D_m comme éléments fondamentaux et les coordonnées D_m homogènes sont $x_1^{(m)} x_2^{(m)} x_3^{(m)}$. Elles sont données par les équations

$$(-1)^{m-k} A_\lambda (A_{\lambda+1} A_{\lambda+2} D_k D_m) = \frac{x_{\lambda+1}^{(m)}}{x_{\lambda+2}^{m}} ; \qquad \text{(I)}$$

$$(-1)^{m-k} A_\lambda (A_{\lambda+1} A_{\lambda+2} D_m D_k) = \frac{x_{\lambda+1}^{(m)}}{x_{\lambda+2}^{(m)}} \qquad \text{(II)}$$

ou $$(-1)^{m-k} [A_\lambda (A_{\lambda+1} A_{\lambda+2} D_k D_m)]^{(-1)^m} = \frac{x_{\lambda+1}^{(m)}}{x_{\lambda+2}^{(m)}} \qquad \text{(III)}$$

$$(\lambda = 1, 2, 3) .$$

Les coordonnées homogènes projectives linéaires et ponctuelles ne sont que les coordonnées D_0 et D_1 d'après la disposition (III).

Lorsqu'une courbe est donnée en forme paramétrique à l'aide des coordonnées D_m : $\varrho x_\lambda^{(m)} = f_\lambda(t)$, donc comme lieu des D_m, l'enveloppe de toutes les courbes D_m est représentée paramétriquement par les équations suivantes :

$$\varrho x_\lambda = [f_\lambda(t)]^{m+1} [f_{\lambda+1}(t) f'_{\lambda+2}(t) - f_{\lambda+2}(t) f'_{\lambda+1}(t)]^m , \qquad \text{(I)}$$

$$\varrho x_\lambda = [f_\lambda(t)^{m-1}] [f_{\lambda+1}(t) f'_{\lambda+2}(t) - f_{\lambda+2}(t) f_{\lambda+2}(t) f'_{\lambda+1}]^m \qquad \text{(II)}$$

ou : $$\varrho x_\lambda = [f_\lambda(t)]^{m+(-1)^m} [f_{\lambda+1}(t) f'_{\lambda+2}(t) - f_{\lambda+2}(t) f_{\lambda+1}(t)]^m \qquad \text{(III)}$$

$$(\lambda = 1, 2, 3) .$$

si l'on a utilisé la définition I, II ou III pour les coordonnées D_m. Particulièrement lorsque les D_m sont les éléments fondamentaux, l'enveloppe précédente est une courbe D_m resp. D_{m-1} ou $D_{m+(-1)^m}$. Pour la définition III seulement, les éléments fondamentaux et les formations fondamentales sont réciproques. En prenant les bases précédentes comme nouveaux éléments fondamentaux, les bases des nouvelles formations fondamentales seront les anciens éléments fondamentaux. La condition d'incidence d'une D_m et d'une D_{m+1} est pour les cas I et II :

$$\frac{x_1^{m}}{x_1^{(m+1)}} + \frac{x_2^{(m)}}{x_2^{(m+1)}} + \frac{x_3^{(m)}}{x_3^{(m+1)}} = 0 ,$$

pour le cas III :

$$x_1^{(m)} x_1^{(m+1)} + x_2^{(m)} x_2^{(m+1)} + x_3^{(m)} x_3^{(m+1)} = 0 \ ,$$

où les $x^{(m)}$ et $x^{(m+1)}$ sont les coordonnées D_m et D_{m+1}. On suppose encore que les coordonnées D_m et D_{m+1} admettent la même courbe D_k comme élément fondamental.

Nous pouvons donc interpréter chaque théorème de la géométrie projective d'une infinité de manières. On remplace les points par les D_m (m est un entier quelconque) comme éléments fondamentaux. Quand les D_m sont déjà choisis le théorème a encore deux interprétations. En prenant une fois les D_m d'après I, une autre fois un D_{m-1} d'après II comme bases relatives aux formations élémentaires. Ce principe est *le principe ou la loi de la pluralité infinie*. La dualité en est un cas spécial pour lequel on ne regarde que les points et les droites, donc les D_0 et D_1 comme éléments fondamentaux. Chaque théorème projectif se démontre à l'aide des coordonnées homogènes projectives; dans cette démonstration on peut remplacer les coordonnées points par les coordonnées D_m quelconques.

Dans l'espace, cette même loi de la pluralité infinie subsiste. On peut admettre comme éléments des coordonnées projectives fondamentales de l'espace les surfaces symétriques tétraédrales d'un indice entier quelconque. La dualité dans l'espace est un cas spécial de la loi générale. Chaque théorème projectif de la géométrie réglée s'interprète d'une infinité de manières. Les courbes symétriques tétraédrales d'un indice entier quelconque sont les courbes d'intersection de deux surfaces symétriques tétraédrales du même indice m.

Pour finir, nous remarquons encore que sous des conditions déterminées, on peut traiter aussi les courbes symétriques triangulaires et les surfaces symétriques tétraédrales d'un indice complexe comme éléments fondamentaux du plan ou de l'espace.

15. — M. le Dr K. Merz (Coire). — *Transformation quadratique d'une collinéation; une métrique qui s'y rapporte.* — Par les formules

$$\xi^2 = x^2 : (r^2 - x^2 - y^2) \ ; \qquad \eta^2 = y^2 : (r^2 - x^2 - y^2)$$

le plan indéfini des ξ, η est transformé dans l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = r^2$; la droite à l'infini correspondant au périmètre de ce dernier. Aux droites parallèles à ξ correspondent des ellipses dont le grand axe est le diamètre du cercle, sur x. Pour $\eta = 1$, on trouve le demi petit axe sur y $r : \sqrt{2}$. Si ce segment est choisi comme unité pour les η, et si l'on fait coïncider les axes des coordonnées $\xi\eta$ avec xy, les points sur $x^2 + y^2 = \frac{r^2}{2}$ se correspondent

à eux-mêmes. A un segment de droite AB à l'intérieur du cercle, qui, prolongé, couperait le cercle en U et V, correspond un arc A'B' d'une hyperbole dont les asymptotes sont OU et OV.

Si l'on opère, consécutivement à cette transformation, la nouvelle transformation, quadratique, $\xi^2 = \xi'$; $\eta^2 = \eta'$; $x^2 = x'$; $y^2 = y'$; on obtient la collinéation centrale, de centre O, d'axe $x' + y' = \frac{r^2}{2}$, avec la droite limite $x' + y' = r^2$. On peut déduire de cette collinéation des propriétés de la précédente transformation du plan $\xi\eta$ dans le cercle r.

Pour obtenir une *métrique*[1] à l'intérieur du cercle r, il faut mesurer le segment $A(x_1 y_1)$ $B(x_2 y_2)$ par une fonction $F(x, y)$ qui prenne une valeur infinie lorsque A ou B viennent en U ou V. Pour cela la mesure choisie sera l'arc d'hyperbole A'B'. Les coordonnées x et y d'un point P, dans r, seront alors mesurées par les arcs d'hyperboles appartenant à P', u et v, qui correspondent aux segments x et y. Ces coordonnées curvilignes sont représentées par des intégrales elliptiques :

$$u = \int \frac{\sqrt{(r^2 - y^2)^2 + x^2 y^2}}{\sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)^3}} dx , \qquad v = \int \frac{\sqrt{(r^2 - x^2)^2 + x^2 y^2}}{\sqrt{(r^2 - x^2 - y^2)^3}} dy .$$

Ces arcs u et v se coupent en P' sous un angle φ. Pour que l'élément linéaire donné par $ds^2 = dx^2 + dy^2$ soit mesuré par son correspondant $du^2 + dv^2 - 2du\,dv \cos\varphi$, on représentera l'angle droit, formé par dx et dy, par

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{r^2(r^2 - x^2 - y^2)}{xy(2r^2 - x^2 - y^2)} .$$

La fonction mesurante $F(xy)$ est alors à déterminer à l'aide de u, v, .

Dans cette métrique, les lignes géodésiques ne sont pas des segments AB, mais des arcs d'ellipses, qui correspondent, dans la transformation à la corde de l'arc d'hyperbole A'B'. Dans le voisinage de O, ces arcs et les segments AB se confondent de plus en plus, et l'on obtient une *métrique euclidienne*.

16. — *Séance administrative.* — La Société prend connaissance et approuve le rapport du trésorier, M. le Prof. Crelier. Elle procède ensuite au renouvellement de son Comité pour 1918 et 1919. M. Michel Planchereel (Fribourg) est nommé président, M. L. Crelier (Bienne-Berne), vice-président, et M. O. Spiess (Bâle), secrétaire-trésorier.

La prochaine réunion annuelle aura lieu, sauf imprévu, *à Lugano*.

---

[1] Ceci est un exemple pour les considérations générales de géométrie non-euclidienne qu'on peut trouver dans K. Merz, Zur Erkenntnistheorie von Raum und Zahl aus Historischem der Steinerschen Fläche (S. 104), *Jahresbericht der Naturf. Gesellschaft, Graubündens*, Chur, 1917.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. A. Beck a été nommé professeur extraordinaire à l'Université de Bonn.

M. M. Disteli, professeur à l'Ecole technique supérieure de Carlsruhe, prend sa retraite pour raison de santé.

M. H. Mohrmann, professeur à l'Ecole des Mines de Clausthal, a été nommé professeur à l'Ecole technique supérieure de Carlsruhe.

M. H. Hahn, professeur extraordinaire, est nommé professeur ordinaire à l'Université de Bonn.

M. Erhard Schmidt, professeur à l'Université de Breslau, a été nommé professeur ordinaire à l'Université de Berlin.

Angleterre. — Le *Prix Adams* (250 livres) de l'Université de Cambridge, a été attribué à M. J. H. Jeans, du Trinity College, pour son mémoire intitulé « Some problemes of cosmogony and stellar dynamics ».

M. A. N. Whitehead a été élu président de la British mathematical Association.

Autriche. — L'Académie des Sciences de Vienne a décerné le *Prix Baumgartner* (3000 cour.) à M. le Professeur A. Einstein, membre de l'Académie des Sciences de Berlin.

L'Ecole technique supérieure de Vienne a conféré le grade de docteur honoraire à MM. R. Mehmke, professeur à l'Ecole technique supérieure de Stuttgart, et S. Finsterwalder, professeur à l'Ecole technique supérieure de Munich.

Etats-Unis. — M. le Professeur Edw. Kasner, professeur à l'Université Columbia, à New-York, a été nommé membre de la National Academy of Sciences.

France. — *Académie des Sciences.* M. Paul Painlevé, vice-président, est nommé président de l'Académie des Sciences pour 1918.

M. V. Volterra, professeur à l'Université de Rome, membre correspondant depuis 1904, a été élu membre associé étranger.

Italie. — MM. U. Cisotti et A. Viterbi, professeurs à l'Université de Pavie, ont été nommés membres correspondants du Reale Istituto Lombardo.

MM. U. Cisotti, de l'Université de Pavie, et E. Daniele, de l'Université de Catane, professeurs extraordinaires de physique mathématique, ont été nommés professeurs ordinaires.

M. V. Strazzeri a été admis comme privat-docent de géométrie analytique et projective à l'Université de Palerme.

Norvège. — Sous la dénomination de *Fonds Christoffer Hannevig à la mémoire de Niels Henrik Abel,* M. Chr. Hannevig, Norvégien, vient de créer une fondation destinée à développer les recherches mathématiques en Norvège. Ce nouveau fonds, pour lequel il a versé 100.000 couronnes, vient déjà de recevoir un don de 50.000 couronnes de M. Chr. Hannevig, senior. On compte pouvoir le porter à 250.000 couronnes.

Suisse. — M. L. Crelier, professeur extraordinaire, a été nommé professeur ordinaire à l'Universiré de Berne.

Nécrologie.

A. Benteli ; E. Ott. — L'Université de Berne vient de perdre, à huit jours d'intervalle, deux de ses professeurs de mathématiques, décédés tous deux dans leur 70me année. Le Professeur A. Benteli, qui enseignait la Géométrie descriptive et la Géométrie pratique, est mort le 10 novembre 1917, tandis que son collègue, le Professeur E. Ott, chargé plus spécialement des cours mathématiques destinés aux candidats à l'enseignement secondaire, est décédé le 17 novembre 1917.

G. Frobenius. — M. G. Frobenius, membre de l'Académie des Sciences de Berlin, est décédé le 3 août 1917, à l'âge de 67 ans. Professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, Frobenius avait été appelé à l'Université de Berlin en 1892.

F. R. Helmert. — M. F. R. Helmert, membre de l'Académie des Sciences de Berlin, est décédé le 15 juin 1917, à l'âge de 73 ans. Professeur de Géodésie à l'Université de Berlin, Helmert était en même temps directeur de l'Institut royal de Géodésie et du Bureau international de Géodésie. Il était membre de la plupart des grandes Académies.

D. Kikuchi. — La Science japonaise a perdu l'un de ses représentants les plus illustres, le baron Dairoku Kikuchi, ancien recteur de l'Université de Tokio, ancien ministre de l'instruction publique, décédé le 19 août 1917. Né à Tokio le 17 mars 1855, Kikuchi fit une partie de ses études en Angleterre, à l'Université de Cambridge. Son retour, en 1877, marque le point de départ d'une période de réforme de l'enseignement mathématique et de l'organisation scolaire en général[1]. Nommé professeur de mathématiques à l'Université de Tokio qui venait d'être réorganisée, il ne tarda pas à exercer une heureuse influence sur le développement de l'enseignement scientifique au Japon. Son gouvernement lui confia souvent des missions scientifiques à l'étranger; il lui conféra le titre de baron en 1902. Kikuchi représenta le Japon à l'Association internationale des Académies.

---

[1] Voir Fujisawa, *Summary Report on the Teaching of Mathematics in Japan,* Tokio, 1912.

Ses travaux scientifiques appartiennent plus particulièrement à l'Histoire des mathématiques de l'ancienne école japonaise. On lui doit aussi d'excellents manuels de Géométrie élémentaire et de Géométrie analytique.

Fr. London. — Le 17 février 1917 est décédé à Bonn, à l'âge de 54 ans, M. F. Franz London, professeur ordinaire à l'Université et doyen de la Faculté des sciences philosophiques. Ses travaux appartiennent principalement au domaine de la Géométrie projective. En souvenir du savant professeur, son beau-frère, M. Alf. Hamburger, a fait don à l'Université de Bonn d'une somme de 30.000 marks pour la création d'un fonds dont les intérêts serviront à favoriser et à récompenser les recherches de mathématiques (Franz London-Stiftung für mathematische Forschung).

G. Veronese. — M. Guiseppe Veronese, professeur de Géométrie analytique et supérieure à l'Université de Padoue, est décédé subitement dans cette ville, le 17 juillet 1917, à l'âge de 63 ans. Ancien élève du professeur Fiedler à l'Ecole polytechnique de Zurich (1873-1877), puis de Cremona à Rome (1877), dont il fut aussi l'assistant, Veronese fut nommé professeur titulaire à l'Université de Padoue en 1883. Ses remarquables recherches sur la Géométrie projective des hyperespaces et son œuvre magistrale sur les fondements de la Géométrie resteront classiques. Il était sénateur du Royaume d'Italie et appartenait à l'Académie des Lincei, à la Société italienne des Sciences (dite des XL) et à de nombreuses sociétés savantes italiennes et étrangères.

NOTES ET DOCUMENTS

Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

Liste des publications du Comité Central et des Sous-Commissions nationales, parues depuis le 1er avril 1914.

PUBLICATIONS DU COMITÉ CENTRAL

2me Série, Fasc. 3. *Compte rendu de la Conférence internationale de l'enseignement mathématique* tenue à Paris du 1er au 4 avril 1914, par H. Fehr. 1 fasc., 172 p., extrait de *l'Ens. Math.*, 1914.

La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire dans les divers pays. Travaux préparatoires : *Questionnaire*, textes français, allemand, anglais, italien. Par H. Fehr. Genève, 34 p., extrait de l'*Ens. Math.*, 1915.

PUBLICATIONS DES SOUS-COMMISSIONS NATIONALES

ALLEMAGNE

Berichte und Mittleilungen.

1. Folge (1re série) : Heft X. Weinreich, H. *Die Fortschritte der mathematischen Unterrichtsreform in Deutschland seit 1910.* — Lietzmann, W. *Der Pariser Kongress der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission* vom 1.-4. April 1914 (S. 219-310), 1915. M. 3.

XI. Lietzmann, W. *Die Ausbildung der Mathematiklehrer an den höheren Schulen Deutschlands.* Beantwortung eines Fragebogens des Hauptausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission (S. 311-328), 1915. M. 0,60.

XII. Gutzmer, A. *Die Tätigkeit des Deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission* 1908-1916, Bericht anlässlich der Fertigstellung der « Abhandlungen ». (S. 329-356), 1916. M. 1.

2. Folge (2me série) : I. Rohrberg, A. *Der mathematische Unterricht in Dänemark,* 1915. M. 2. 40.

II. Wolff, G. *Der Mathematische Unterricht in England* (VI. u. 205 S.), 1915. M. 5.

III. *Titel und Inhaltsübersicht* zur ersten und zweiten Folge der Berichte und Mitteilungen. — Körner, E. und K. *Gesamtregister der Schriften des Deutschen Unterausschusses* der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission. — Vorbemerkungen — Inhaltsverzeichnis des Gesamtregisters. — Inhalt der einzelnen Hefte, zum Teil in Tabellen. — Alphabetisches Sachregister. — Lietzmann, W. Zusammenstellung der bis Ostern 1917 auf Veranlassung der Imuk im Auslande veröffentlichten Arbeiten. — Klein, F. und Lietzmann, W. Zum Abschluss der Berichte und Mitteilungen (xvi u. 99 S.), 1917. M. 4. ; Verlag B. G. Teubner, Leipzig.

Abhandlungen.

Band III. Keft 9. Lorey, W. *Das Studium der Mathematik an den deutschen Universitäten* seit Anfang des 19. Jahrhunderts. Mit einem Schlusswort zu Band III von F. Klein. Mit 13 Abbildungen im Text und auf 4 Tafeln. (xvi u. 440 S.), 1916. Geh. M. 12, Geb. M. 14.

Band IV. Heft 3. Girndt, M. *Die deutschen bautechnischen Fachschulen und der mathematische Unterricht.* Mit 3 Tafeln und 54 Abbildungen (vi u. 232 S.), 1916. M. 7.20.

Heft 9. Stäckel, P. *Die mathematische Ausbildung der Architekten, Chemiker und Ingenieure an den deutschen technischen Hochschulen.* Mit einem Schlusswort zu Band IV von P. Stäckel (xvi u. 1915 S.), 1915. M. 6.80.

Band V. Heft 5. Umlauf, K. *Der mathematische Unterricht an den Seminaren und Volkschulen der Hansestädte.* (vii u 165 S.), 1915. M. 4.80.

Heft 7. Körner, K. *Die Mathematik im Preussischen Lehrerbildungswesen.* Mit einem Schlusswort zu Bd. V von F. Klein. Mit 10 Figuren und 1 Tafel (viii u. 136 S.), 1916. M. 4 ; Verlag B. G. Teubner, Leipzig.

AUSTRALIE

The Teaching of Mathematics in Australia, report presented to the International Commission on the Teaching of Mathematics, by H. S. Carslaw

Un fascicule in-8°, 79 pages, Angus et Robertson Ltd, Sydned. The Oxford University Press, Amen Corner, Londres.

BELGIQUE

La préparation théorique et pratique des professeurs de mathématiques de l'enseignement secondaire en Belgique, par J. Rose (Charleroi). — 1 fasc. in-8°, de 18 p. (Extrait de *l'Enseignement mathématique*, n° 5, 1916, Georg & Cie, Genève).

ETATS-UNIS

Curricula in Mathematics. A Comparison of Courses in the Countries represented in the International Commission of Teaching of Mathematics, by J. C. Brown, with the Editorial Cooperation of D. E. Smith, W. F. Osgood, J. W. A. Young, members of the Commission from United Stades. 1 fasc. in-8°, 91 p. ; United States Bureau of Education, Washington 1915.

Mathematics in the Lower and Middle Commercial and Industrial Schools of various countries represented in the International Commission on the Teaching of Mathematics, by E. H. Taylor, Instructor in Mathematics Eastern Illinois State normal School. With the Editional Cooperation of David Eugene Smith, William F. Osgood, J. W. A. Young, members of the Commission from the United States. Washington Government Printing Office, 1915. — 1 fascicule in-8°, 96 pages.

The Training of Elementary-school Teachers in Mathematics in the countries represented in the International Commission on the Teaching of Mathematics, by I. L. Kandel, associate in Educational Administration, Teachers College, Columbia University, and Specialist in Education, Carnegie Foundation for the Advancement of Teaching. With the Editorial Cooperation of Davy Eugene Smith, William F. Osgood, J. W. A. Young, members of the Commission from the United States Washington Government Printing Office, 1915. — 1 fascicule in-8°, 56 pages.

The Training of Teachers of Mathematics in the United Stades of America. — I, the Theoretic Side, by J. W. A. Young. — II, the Practical Side, by D. E. Smith. — 1 fasc. in-8° de 11 p. (Extrait de l'*Enseignement mathématique*, n° 6, 1916, Georg & Cie, Genève).

RUSSIE

L'Enseignement mathématique aux cours supérieurs de femmes à Moscou, par B. Mlodzievsky. — 1 fasc. in-8° de 20 p., Pétrograd, 1915.

H. F.

Plan d'études mathématiques de l'enseignement normal primaire en Bolivie

par Constant Lurquin (Sucre, Bolivie).

I. — Nous envisageons l'enseignement normal primaire au point de vue mathématique et nous exposons dans ce petit travail quelques considérations générales relatives au programme pour cet enseignement.

Comment doit être organisé l'enseignement mathématique dans une école normale ?

Le cours de mathématiques pour une école où l'on forme des instituteurs primaires doit comprendre trois parties :

1) L'enseignement théorique. — 2) L'enseignement pratique. — 3) L'enseignement méthodologique.

La théorie et la pratique doivent être étroitement liées. Les notions théoriques, les démonstrations, les formules seront enseignées par la méthode intuitive. L'abstraction viendra ensuite très facilement. Le but n'est pas d'entasser dans le cerveau des élèves instituteurs une grande quantité de théorèmes, mais bien d'insister sur les méthodes d'investigation et la nature du raisonnement mathématique.

Après l'étude de chaque théorie vient son application pratique : exemples numériques, exercices et problèmes de récapitulation, interrogation sur la partie théorique.

Cet enseignement pratique[1] a une importance capitale, car il permet au professeur de s'assurer si l'élève a compris les leçons de théorie.

Dans un cours de mathématiques pour élèves instituteurs, il y a lieu de considérer tout particulièrement l'enseignement méthodologique. C'est la partie professionnelle qui comprend :

1. La méthodologie de l'enseignement du calcul, du système métrique et des formes géométriques à l'école primaire.

2. L'étude spéciale et détaillée du programme de mathématiques de l'école primaire.

3. Des exercices didactiques à l'école d'application consistant en leçons suivies d'une critique raisonnée.

Cette partie méthodologique du cours de mathématiques est traitée dans les deux dernières années d'études de l'école normale.

II. — Disons tout d'abord un mot de l'examen d'entrée à l'école normale primaire, au point de vue mathématique. Pour l'admission à l'Ecole normale de Sucre, nous avons adopté le programme suivant :

1. **Arithmétique.** — *Nombres entiers :* Numération parlée et écrite. Les quatre opérations : règles pratiques. Tables de multiplication. Problèmes sur les nombres entiers. Calcul mental sur les quatre opérations.

Fractions ordinaires : Numération. Simplification. Réduction à un même dénominateur. Opérations. Problèmes.

Nombres décimaux : Numération orale et écrite. Opérations. Exercices. Problèmes.

Système métrique décimal : Mesures de longueur, surface, volume, poids, capacité. Monnaies.

Arithmétique pratique : Règle de trois par la méthode de réduction à l'unité. Intérêt simple. Escompte commercial.

2. **Géométrie.** — Notions intuitives sur les lignes, les angles, les espèces de triangle, les quadrilatères, les polygones, le cercle. Mesure des surfaces.

Notions élémentaires sur le prisme, le cube, le parallélépipède, la pyramide, le cylindre, le cône et la sphère. Mesure des surfaces et des volumes.

---

[1] Dans la classe de mathématiques de l'Ecole normale de Sucre, le long des murs sont disposés 25 tableaux noirs permettant à tous les élèves d'un même cours de travailler ensemble. C'est le travail collectif avec l'aide du professeur. Il y a chaque semaine une leçon entière consacrée uniquement aux applications de la théorie, aux solutions de problèmes et aux interrogations.

Ce programme est celui de l'enseignement primaire élémentaire. Nous croyons que la connaissance de ce programme doit constituer la base des études normales primaires proprement dites.

III. — Nous faisons connaître maintenant, en résumé, les *plans d'études* que nous avons suivis pour l'enseignement de l'arithmétique, de la géométrie et de l'algèbre.

Arithmétique

I. Théorie. — 1. *Nombres entiers :* Numération. Les quatre opérations fondamentales. Divisibilité : théorèmes généraux et caractères de divisibilité. Nombres premiers. Plus grand commun diviseur. Plus petit commun multiple.

2. *Fractions ordinaires :* Numération. Simplification. Réduction à un dénominateur commun. Opérations fondamentales.

3. *Nombres décimaux :* Numération. Opérations. Conversion de fractions ordinaires en nombres décimaux. Fractions décimales périodiques.

4. *Système métrique :* Origine. Longueurs. Surfaces. Volumes. Poids. Capacité. Monnaies. Applications.

5. *Puissances et racines :* Théorèmes généraux. Extraction de la racine carrée et de la racine cubique.

6. *Rapports, proportions* et *séries de rapports égaux.*

II. Pratique. — 1. *Problèmes :* Règles de trois. Intérêt simple. Escompte. Tant pour cent. Rentes. Grandeurs proportionnelles. Partage proportionnel. Règle de société. Mélanges et alliages.

2. *Calcul mental :* Exercices gradués de calcul mental sur les nombres entiers et décimaux, les fractions ordinaires et les mesures du système métrique. Procédés de calcul rapide.

III. Méthodologie. — 1. Méthodologie de l'enseignement du calcul et du système métrique à l'école primaire.

2. Etude détaillée du programme de l'école primaire.

3. Exercices didactiques à l'école d'application : leçons de calcul et de système métrique données par les élèves instituteurs.

Géométrie

Au point de vue méthodologique, une innovation de grande importance caractérise l'enseignement moderne de la géométrie élémentaire. Il s'agit d'une réforme de méthode qui substitue à la géométrie classique d'Euclide une géométrie concrète basée essentiellement sur les mouvements élémentaires[1]. On sait que ce changement si radical dans l'enseignement de la géométrie a été très discuté et est encore combattu. Néanmoins la nouvelle géométrie cinématique présente de sérieux avantages[2]. D'autre part, elle est liée intimement avec le dessin géométral qui la complète, peut-on dire.

I. Théorie. — A. *Géométrie plane.*

1. *Déplacements et figures élémentaires.* — Ligne droite et plan. Rotation

---

[1] Voir programmes officiels français du 27 juillet 1905 et les instructions qui les accompagnent.

[2] Nous l'avons enseignée avec grand profit dans nos cours à l'Ecole normale de Sucre. Nous reconnaissons qu'au début l'élève a quelques difficultés à trouver les conséquences qui résultent d'un mouvement de figures. Mais cette difficulté est rapidement vaincue par de nombreux exercices graphiques.

autour d'un point : angles. — Symétrie par rapport à un point. — Cas d'égalité des triangles. — Symétrie par rapport à une droite. Triangles isocèles. — Distances. Perpendiculaires et obliques. — Cas d'égalité des triangles rectangles. — Translation rectiligne : lignes parallèles. — Somme des angles d'un triangle, d'un polygone. — Quadrilatères : parallélogramme ; rectangle ; losange ; carré. — Cercle, circonférence, diamètre, arcs et cordes, sécantes et tangentes. — Positions relatives de deux circonférences. — Mesure des angles dans le cercle. — Construction d'angles, de triangles, de quadrilatères. — Tracé de perpendiculaires et d'obliques — Construction de cercles et de tangentes. Lieux géométriques simples.

2. *Similitude.* — Lignes proportionnelles. Problèmes graphiques. — Triangles semblables. Cas de similitude. Polygones semblables. — Homothétie. Figures homothétiques. - Polygones réguliers. Mesure de la circonférence du cercle.

3. *Aires.* — Mesure de la surface du rectangle, du parallélogramme, du triangle, du trapèze, des polygones. — Aire des polygones réguliers. Aire du cercle. — Comparaison des aires de deux polygones semblables. — Problèmes graphiques. Exercices numériques.

B. *Géométrie de l'espace.*

1. *Déplacements élémentaires.* — Le plan et la droite dans l'espace. — Détermination et intersection de droites et de plans. — Translation : droites et plans parallèles. — Rotation : angles dièdres, plans et droites perpendiculaires. — Angles polyèdres.

2. *Projections.* — Distances. Projections orthogonales. — Projection d'un polygone et d'un cercle.

3. *Polyèdres.* — Prisme. Pyramide. — Aire et volume du prisme et de la pyramide. — Polyèdres semblables. Exercices numériques. Problèmes.

4. *Corps ronds.* — Surface de révolution. Cylindre. Cône. — Sphère ; sections planes ; pôles ; plan tangent. — Aire et volume du cylindre et du cône de révolution. Aire et volume de la sphère.

II. Arpentage. — Instruments. Exercices sur le terrain. Levé de plans. Nivellement.

III. Méthodologie. — 1. Etude du programme de formes géométriques de l'école primaire.

2. Exercices didactiques : leçons de formes géométriques et de dessin géométral à l'école d'application.

Algèbre

L'enseignement de l'algèbre ne doit pas être faite d'une manière abstraite. Il importe que la théorie soit présentée intuitivement et il est essentiel de mettre en évidence, le plus possible, la relation intime entre les formules de l'algèbre et les réalités concrètes. Nous insistons particulièrement sur les nombres positifs et négatifs, ainsi que sur la représentation graphique des fonctions élémentaires.

1. Notions préliminaires : coefficient, exposant, termes semblables ; valeur numérique. — 2. Nombres positifs et négatifs : opérations, applications concrètes. — 3. Calcul algébrique : opérations ; produits remarquables, décomposition algébrique. — 4. Equations du premier degré. — 5. Problèmes du premier degré. — 6 Etude et représentation graphique des variations de la fonction linéaire. — 7. Equations du second degré. — 8. Trinôme du

second degré. — 9. Problèmes du second degré. — 10. Etude et représentation graphique des variations de la fonction homographique. — 11. Progressions. Logarithmes. Intérêts composés. — 12. Notions sur les dérivées.

IV. — La *trigonométrie* ne figure pas au programme de mathématiques de l'enseignement normal primaire. Cependant nous avons fait, avec grand profit pour les élèves, l'étude de cette branche importante des mathématiques en dernière année de l'école normale Nous croyons que cet enseignement peut se donner pour les deux raisons suivantes : la trigonométrie n'est pas d'un ordre plus élevé que l'arithmétique, l'algèbre ou la géométrie ; la question dépend seulement d'en faire l'enseignement d'une manière véritablement élémentaire et pratique. Voici le résumé de notre programme normal primaire de trigonométrie :

1. Notions préliminaires : arcs et angles. — 2. Définition des fonctions circulaires d'un même arc. — 3. Relations entre les fonctions circulaires d'un même arc. — 4. Relations entre les fonctions circulaires d'arcs dont la somme ou la différence est un multiple d'un quadrant. — 5. Analyse trigonométrique : addition, soustraction, multiplication et division des arcs. — 6. Représentation graphique des fonctions circulaires. — 7. Usage des tables trigonométriques. — 8. Résolution des triangles rectangles. — 9. Relations entre les côtés et les angles d'un triangle quelconque. — 10. Résolution des triangles quelconques.

Cours universitaires.

Année 1917-1918.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

Columbia University *(New-York)*. — T. S. Fiske : Differential equations, 4 hours. — Prof. F. N. Cole : Theory of groups, 3 ; Invariants and higher plane curves, 3, first half-year. — Prof. James Maclay : Theory of geometric constructions, 3, first half-year ; Elliptic functions, 3, first half-year. — Prof. C. J. Keyser : Modern theories in geometry, 4 ; Mathematics, 3, second half-year. — Prof. D. E. Smith : History of mathematics, 2. — Prof. Edward Kasner : Seminar in differential geometry, 2 (with Dr C. A. Fischer) ; Theory of functionals and integral equations, 3, first half-year. Prof. W. B. Fite : Differential equations, 3, second half-year. — Prof. H. E. Hawkes : Differential geometry of curves, 3, second half-year.

Cornell University *(Ithaca)*. — Prof. J. McMahon : Theory of probabilities, 3 ; Introduction to actuarial science, 3. — Prof. V. Snyder : Projective geometry, 3. — Prof. F. R. Sharpe : Vector analysis with applications to physics, 3, first term. — Prof. W. B. Carver : Elementary theory of groups, 3, second term ; Synopsis of higher mathematics, 3 (with Dr Silverman). — Prof. A. Ranum : Differential Geometry, 3, first term. — Prof. D. C. Gillespie : Advanced calculus, 3. — Prof. W. A. Hurwitz : Differential equations of physics, 3. — Prof. F. C. Craig : Fourier series and the potential function, 3 ; Teachers course in mathematics, 3. — Prof. F. W. Owens : Mathematical physics, 3. — Dr L. L. Silverman : Infinite series, 3. —

Dr J. V. McKelvey : Algebraic curves, 3. — M. H. Betz : Elementary differential equations, 3. — Dr M. G. Gaba : Theory of equations, 3, first term. — Dr R. E. Gilman : Advanced analytic geometry, 3.

Harvard University *(Cambridge, Mass.)*. — Prof. W. F. Osgood : Advanced calculus, part II, second term, 3 ; Infinite series and products, 3, first term ; Theory of functions, second course, 3. — Prof. M. Bôcher : Introduction to modern geometry and modern algebra, 3 ; Algebra, 3, second term. — Prof. C. L. Bouton : Elementary differential equations, 3, second term ; Differential Equations and Lie's theory, 3. — Prof. J. L. Coolidge : Subjetc matter of elementary mathematics, 3, first term ; Probability, 3, second term ; Algebraic plane curves, 3. — Prof. E. V. Huntington : Fundamental conceps of mathematics, 2, first term. — Prof. H. N. Davis : Dynamics, 3. — Prof. G. D. Birkhoff : Vector analysis, 3, first term ; Theory of heat and elastic vibrations, 3, second term ; Integral equations, 3, first term. — Prof. D. Jackson : Advanced calculus, part I, 3, first term ; Introduction to potential functions and Laplace's equations, first term ; Developments in series, 3, second term. — Dr G. M. Green : Theory of functions, 3. — Drs G. M. Green and W. LeR. Hart : Differential Geometry, 3. — Dr W. LeR. Hart : Introduction to celestial mechanics, 3, second term. — Dr. T. A. Pierce : Theory of numbers, 3, first term ; Algebraic numbers, 3, second term.

Professor Birkhoff will conduct a fortnightly seminary in analysis.

Courses of research are also offered by Professor Osgood in the theory of functions, by Professor Bôcher in the real solutions of linear differential equations, by Professor Bouton in the theory of point transformations, by Professor Coolidge in geometry, by Professor Birkhoff in the theory of differential equations, by Professor Jackson in the theory of functions of a real variable and by Dr Green in differential geometry.

University of Illinois *(Urbana, Ill.)*. — All courses are three hours for the year except as otherwise indicated. — Prof. E. J. Townsend : Functions of a complex variable ; Differential equations and advanced calculus. — Prof. G. A. Miller : Elementary theory of groups ; Theory of equations and determinants (first semester). — Prof. H. L. Rietz : Theory of statistics. — Prof. J. B. Shaw : General algebra. — Prof. C. H. Sisam : Algebraic surfaces ; Solid analytic geometry (second semester). — Prof. A. Emch : Projective geometry ; Constructive geometry (second semester). — Prof. R. D. Carmichael : Theory of linear difference equations. — Prof. A. R. Crathorne : Theory of mathematical instruments (second semester). — Dr E. B. Lytle : Teacher's course (two hours, first semester) ; History of mathematics (two hours, second semester). — Dr A. J. Kempner : Modern algebra.

Johns Hopkins University *(Baltimore)*. — Prof. F. Morley : Higher Geometry, 2 ; Theory of functions, 2. Prof. A. B. Coble : Modular functions, 2. — Prof. A. Cohen : Differential geometry, 2 ; Theory of real functions, 2. — Dr H. Bateman : Differential equations of physics, 2.

University of Pennsylvania. — Prof. E. S. Crawley : Higher plane curves, 2. — Prof. G. E. Fisher : Functions of a complex variable, 2. — Prof. I. J. Schwatt : Infinite series and products, 2. — Prof. G. H. Hallett : Finite groups, 2. — Prof. F. H. Safford : Partial differential equations, 2. — Prof. M. J. Babb : Theory of numbers, 2. — Prof. G. G. Chambers : Synthetic projective geometry, 2. — Prof. O. E. Glenn : Calculus of varia-

tions, 2, second semester. — Prof. H. H. Mitchell : Algebraic numbers, 2. — Prof. R. L. Moore : Fundations of mathematics, 2. — Dr F. W. Beal : Differential geometry, 2.

Princeton University — Prof. H. B. Fine : Theory of functions of a complexe variable, 3. — Prof. L. P. Eisenhart : Projective geometry, 3 ; Calculus of variations, 3, first term. — Prof. O. Veblen : Seminar, 3. — Prof. E. P. Adams : Analytic mechanics, 3. — Dr J. W. Alexander : Algebraic functions, 3. — Dr G. A. Pfeiffer : Theory of functions of real variables, 3.

Yale University *(New Haven, Conn.)*. — Prof. E. W. Brown : Advanced calculus, 3 ; Advanced dynamics, 2. — Prof. J. Pierpont : Theory of functions of a complex variable, 2 ; Elliptic functions. 2. — Prof. P. F. Smith : Differential equations, 2. — Prof. W. R. Longley : Integral equations, 2, second term ; Potential theory and harmonic analysis, first term. — Prof. E. J. Miles : Calculus of variations, 2. — Prof. J. I. Tracy : Modern analytic geometry, 2. — Dr D. F. Barrow : Advanced algebra, 2. — M. W. L. Crum : Statics and dynamics, 2. — M. J. K. Whittemore : Differential geometry, 2.

FRANCE

Paris ; *Collège de France*. — Humbert : Questions diverses concernant les formes quadratiques. — Hadamard : Les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. — Brillouin : Variations de latitude. Conséquences relatives à la constitution et aux mouvements généraux du globe. Problèmes dynamiques qui s'y rattachent. — Langevin : Principe de relativité et les théories de la gravitation.

ITALIE[1]

Bologna ; *Università*. — Burgatti : Teoria matematica dei fluidi, 3. — Donati : Termodinamica e termocinetica, teoria della radiazione. 3. — Enriques : Teoria geometrica delle equazioni e delle funzioni algebriche, 3. — Pincherle : Teoria delle funzioni analitiche ; I vari punti di vista nella teoria delle equazioni differenziali lineari, 3.

Catania ; *Università*. — Cipolla : Teoria dei numeri nel corpo razionale e in un corpo quadratico qualunque ; Questioni classiche di aritmetica asintotica. — Daniele : Moti vibratori ; Applicazioni all'ottica, 4. — Scorza : Geometria sopra una curva algebrica e integrali abeliani con particolare riguardo al caso degli integrali riducibili, 3. — Severini : Teoria delle equazioni integrali, 4.

Genova ; *Università*. — Levi : ...[2]. — Loria : Geometria a *n* dimensioni, 3. — Tedone : Ottica : fenomeni di interferenza e fenomeni di diffrazione, 3.

Napoli ; *Università*. — Amodeo : Storia delle matematiche : Newton e Leibniz, 3. — Del Re : Analisi ad *n* dimensioni di Grassmann con applicazioni ; ed in particolare : analisi vettoriale ad *n* dimensioni, 4 ½. — Marco-

[1] Les cours fondamentaux (analyse algébrique et infinitésimale, géométrie analytique, projective et descriptive, mécanique rationnelle), existant dans toute université, ne figurent pas dans la liste.

[2] Il se trouve au front et n'a pas annoncé son cours.

LONGO : Idrodinamica, 3. — MONTESANO : La teoria delle trasformazioni birazionali dello spazio ; Le trasformazioni di Kantor ; Le superficie razionali di 4° e 5° ordine, 3. — PASCAL : Capitoli scelti di analisi, 3. — DEL PEZZO : Delle trasformazioni cremoniane tra piani, o tra spazi, con applicazioni allo studio delle singolarità delle curve e delle superficie ed alla rappresentazione piana delle superficie, 3. — PINTO : Elettrostatica e magnetismo con particolare riguardo alla teoria delle immagini elettriche ed alla teoria dei dielettrici, 3.

Padova ; *Università*. — D'ARCAIS : Funzioni armoniche e poliarmoniche ; Questioni varie concernenti la teoria delle equazioni a derivate parziali, 4. — COMESSATTI : Introduzione alla geometria algebrica, 3. — LEVI-CIVITA : Idrodinamica, 4. — RICCI : Calcolo differenziale assoluto con applicazioni alla teoria dell'elasticità, 4. — SEVERI : Geometria differenziale, 4. — TONOLO : Equazioni alle derivate parziali del 2° ordine, 3.

Palermo ; *Università*. — BAGNERA : Equazioni differenziali di primo ordine e calcolo delle variazioni, 3. — DE FRANCHIS : Geometria non-euclidea e generalità di geometria differenziale, 3. — GEBBIA : Teoria dell'elettricità e del magnetismo (2ª parte), 4 $^1/_2$. — SIGNORINI : Teoria dell'elasticità, 4.

Pavia ; *Università*. — BERZOLARI : Geometria iperspaziale, 3. — CISOTTI : Elettrodinamica, 3. — GERBALDI : Funzioni di variabile complessa e teoria delle funzioni ellittiche, 3. — VIVANTI : Teoria delle equazioni integrali, 3.

Pisa ; *Università*. — BERTINI : Geometria proiettiva degli iperspazi, 3. — BIANCHI : I) Teoremi di esistenza nella teoria delle equazioni differenziali e a derivate parziali ; II) Applicazione alla geometria infinitesimale delle curve e delle superficie, 4 $^1/_2$. — DINI : Studi sulle serie con particolare riguardo alle serie divergenti e ai vari concetti che si sono introdotti nella somma di queste serie, 4 $^1/_2$ — MAGGI : Argomenti vari attinenti alla dinamica dei sistemi continui, 4 $^1/_2$ — PIZZETTI : Generalità di astronomia sferica ; Determinazione di un'orbita ellittica ; Interpolazione ; Metodo della variazione delle costanti arbitrarie e teoria delle perturbazioni, 4 $^1/_2$.

Roma ; *Università*. — BISCONCINI : Applicazioni geometriche e cinematiche del calcolo infinitesimale, 3. — CASTELNUOVO : Curve algebriche piane e sghembe, 3. — CRUDELI : Teoria aritmetica delle forme algebriche binarie e ternarie, 3. — SILLA : Equazioni differenziali della dinamica, 3. — VOLTERRA : Teoria della rotazione dei corpi dotati di moti policiclici interni, e il problema della variazione delle latitudini, 3 ; Termodinamica e applicazioni della termodinamica ; Teoria degli esplosivi, 3.

Torino ; *Università*. — BOGGIO : Lezioni sull'idrodinamica, 3. — FUBINI : Funzioni abeliane, ellittiche, modulari, 3. — SEGRE : Applicazioni degli integrali abeliani alla geometria, 3. — SOMIGLIANA : Elasticità ed ottica, 3.

SUISSE

Semestre d'hiver 1917-1918.

Bâle, *Université*. — E. HECKE : Differential- und Integralrechnung I, 4 ; Uebgn., 1 ; Zahlentheorie, 4 ; Seminar mit Prof. Spiess, 1. — O. SPIESS : Analytische Geometrie (für Anfänger), 3 ; Grundbegriffe der Mathematik (für Vorgerückte), 4 ; Geschichte der Mathematik, 1 ; Mathem. Seminar, mit

Prof. Hecke, 1. — R. Flatt : Pädag. Seminar, math.-naturwiss. Abteilung I, 3 ; Projektive Geometrie, 2. — M. Knapp : Astrophysik, 2 ; Allg. Chronologie, 1 ; Populäre Astronomie : Monde, 1 ; Astronomische Uebgn., für Anfänger, 2 ; für Vorgerücktere, 3. — W. Matthies : Mathematisch-physikalisches Seminar, 2.

Berne, *Université.* — Graf : Kugelfunktionen, mit Repet. I, 4 ; Bessel'sche Funktionen mit Repet. II, 4 ; Integralrechnung mit Repet., 3 ; Funktionentheorie I, 2 ; Differentialgleichungen II, 2 ; Renten- und Versicherungsrechnung I, 2, Math. Seminar, mit Prof. Huber, 1 $^1/_2$. — G. Huber : Mechanik des Himmels, 2 ; Alg. Flächen, 3 ; Fourier'sche Reihen mit Anwendungen, 2 ; Math. Seminar (geom. Richtung) mit Prof. Graf, 1. — Ott : Algebraische Analysis II, 2 ; Sphärische Trigonometrie mit Anwendungen, 2 ; Integralrechnung, 1 ; Analytische Geometrie II, 2. — Benteli : Darstellende Geometrie, Kurven, Strahlenflächen, reguläre Polyeder, 2 ; Darstellende Geometrie, Uebgn. und Repet., 2 ; Praktische Geometrie I, 1. — Mauderli : Unterrichtsfragen aus dem Gebiete der Astronomie der mathem. Geographie, 1 $^1/_2$; Astron. und topogr. Ortsbestimmung für Geologen und Forschungsreisende, 1 ; Der Bau des Universums im Lichte neuester Forschung, 1 $^1/_2$. — Pd. Th. Huber : Natürliche Geometrie, 1 ; Ebene Kurven 3. Ordnung, 1. — Prof. Crelier : Synthetische Geometrie, III ; *n* Dimensionale Geometrie. — Pd. Berliner : Höhere Algebra (Fortsetzung), 1 $^1/_2$. — Prof. Moser : Mathem. Untersuchungen betreffend Witwen- und Waisenkassen. Ausgew. versicherungswissenschaftliche Kapitel, 1 $^1/_2$; Mathematisch-versicherungswissenschaftliches Seminar, 1 $^1/_2$. — Pd. Bohren : Politische Arithmetik, 2 ; Methode der kleinsten Quadrate, 2.

Fribourg, *Université.* — Plancherel : Calcul differentiel et intégral, 4 ; Exercices, 1 ; Algèbre supérieure, 3. — Daniels : Analyt. Geometrie, 1, 4 ; Uebgn., 1 ; Mécanique analytique, 4 ; Théorie des fonctions, 3.

Genève, *Université.* — C. Cailler : Calcul diff. et intégr., 3 ; Exercices, 2 ; Mécanique rationnelle, 3 ; Exercices, 2 ; Conférences d'analyse : Théorie des fonctions analytiques, 2. — H. Fehr : Eléments de mathématiques supérieures, 3 ; Compléments d'algèbre et de géométrie, 1 ; Exercices, 2 ; Géométrie projective, 1 ; Conférences de géométrie supérieure, 2 ; Séminaire de mathématiques élémentaires, Chapitres choisis de méthodologie et de didactique mathématiques, 1. — R. Gautier : Astronomie mathématique générale, 2 ; Climatologie, 2. — G. Tiercy : Balistique extérieure.

Privat-docents : Alph. Bernoud : Les méthodes graphiques dans les sciences (courbes et abaques), 1. — G. Tiercy : Théorie des réseaux orthogonaux, 1.

Lausanne, *Université et Ecole d'ingénieurs.* — Amstein : Théorie des fonctions, 3 ; Complément de calcul intégral, 2. — G. Dumas : Calcul diff. et intégral, I, 6 ; Exercices, I, 2 ; Exercices pour étudiants avancés, 2 ; Séminaire mathématique, 1. — M. Lacombe : Géométrie descriptive, 4 ; Epures, 4 ; Géométrie analytique, 2 ; Géométrie de position avec exercices, 3. — M. Mayor : Mécanique rationnelle, I, 4 ; Exercices, 1 ; Physique mathématique, 2. — M. Maillard : Calcul infinitésimal, avec applications aux sciences, 4 ; Astronomie sphérique, 3 ; Mécanique rationnelle, 2. — S. Dumas : Calcul des probabilités, II, 3.

Privat-docents : Ch. Jaccottet : Chapitres choisis de la théorie des fonctions, 2. — M. Paschoud : Introduction à la physique mathématique, 2.

Neuchâtel, *Université*. — L.-G. Du Pasquier : Calcul diff. et intégral, 3 ; Equations différentielles ; Théorie des groupes de transformation, II, 2 Exercices de mathématiques, 2 ; Introduction à la science actuarielle, 1. — L. Gaberel : Géométrie analytique, 2 ; Théorie des fonctions analytiques, 2. — E. Le Grand Roy : Astronomie sphérique, 2 ; Exercices, 1 ; Météorologie, 1 ; Astronomie (cours sup.) : Chapitres choisis, 1. — A. Jaquerod : Mécanique rationnelle, 2.

Privat-docents : H. Strœle : Méthode des moindres carrés et théorie des erreurs, 1. — L. Arndt : Introduction à l'astrophysique, 1.

Zurich, *Université*. — Prof. Fueter : Einführung in die mathem. Behandlung der Naturwissenschaften, 3 ; Uebgn., 1 ; Funktionentheorie, 3 ; Mathem. Seminar mit Prof. Speiser, 1. — Prof. Speiser : Differential- und Integralrechnung I, 4 ; Uebgn., 1 ; Synthetische Geometrie, 3 ; Integralbegriff, 1. — Privatdoz. Bernays : Theorie der trigonom. Reihen, 3. — Prof. Wolfer : Einleitung in die Astronomie, 2 ; Uebgn., 2 ; Theorie der Finsternisse, 2.

Zurich, *Ecole polytechnique fédérale ; section normale*. — Hirsch : Höh. Mathematik I, 6 ; Repet., 1, Uebgn., 2 ; III, 3 ; Uebgn., 1. — Franel : Mathématiques supérieures I, 6 ; Répét., 1 ; Exercices, 2 ; III, 3 ; Exercices, 1. — Grossmann : Darstell. Geometrie, 4 ; Repet., 1, Uebgn., 4 ; Projekt. Geometrie, 4. — Weyl : Analyt. Geometrie, 2 ; Uebgn., 1. — Kollros : Géométrie descriptive, 4 ; Répét., 1 ; Exerc., 4 ; Géométrie de position, 3 ; Exerc., 1. — Meissner : Mechanik II, 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 2. — Hurwitz : Alg. Gleichungen, 4. — Hurwitz und Weyl : Math. Seminar, 2. — Weyl : Ausgew. Kapitel der Geometrie, 4 ; Logische Grundlagen der Mathematik, 1. — Meissner : Ausgew. Kapitel der Mechanik, 2. — Bæschlin : Vermessungskunde ; Höh. Geodäsie, 3 ; Repet., 1. — Wolfer : Einleitung in die Astronomie, 3 ; Uebgn., 2 ; Theorie der Finsternisse, 2. — Amberg : Math. der Pensionsversicherung, 2. — Brandenberger : Einführung in den math. naturw. Unterricht I, 2. — Pólya : Wahrscheinlichkeit u. Ausgleichungsrechnung, 2.

Cours libres. — Amberg : Mathem. Probleme der Sozialversicherung, 1. — Beyel : Rechenschieber mit Uebungen, 1 ; Darstellende Geometrie, 2 ; Projektive Geometrie, 1. — Gonseth : Birationale Transformationen, 2 ; Calcul graphique, II, 2. — J. Keller : Ebene und räumliche collineare Systeme mit Anwendung auf Kurven und Flächen II. Grades, 2. — Kienast : Besselsche Funktionen, 2. — Kraft : Die Grundkräfte der Welt, 1 ; Geometrische Analysis, 3 ; Mechanik der deformierbaren Systeme mittelst der geometrischen Analysis, 3. — Pólya : Mathematische Spiele, 1.

BIBLIOGRAPHIE

Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques. 3e édition. — 1 vol. in-8o, 115 p., H. C. Delsman, Amsterdam ; Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1916.

La Société mathématique d'Amsterdam a fait paraître une troisième édition de l'« Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques ». Cette nouvelle édition contient des améliorations destinées à faciliter toujours plus la classification des mémoires. La Rédaction et les nombreux collaborateurs de la *Revue semestrielle des publications mathématiques* rencontraient en effet souvent de sérieuses difficultés, notamment pour les mémoires se rattachant à la théorie des fonctions (classe D).

La consultation de l'Index et de la Revue semestrielle est largement facilitée par la *Table alphabétique* très détaillée qui termine l'Index. Il faut savoir gré à la Société mathématique d'Amsterdam du soin qu'elle ne cesse d'apporter à ces publications. H. F.

Mathematische Bibliothek. Gemeinverständliche Darstellungen aus der Elementar-Mathematik für Schule u. Leben. Unter Mitwirkung von Fachgenossen herausgegeben von Dr W. Lietzmann u. Dr A. Witting. Nos 3 et 10, 2e édition ; nos 25 et 26. — Petits volumes cartonnés de 50 à 70 p ; M. 0,80 le volume ; B. G. Teubner, Leipzig.

Cette collection de monographies a déjà été signalée à nos lecteurs. Elle a pour but de vulgariser les mathématiques dans le public des gens cultivés n'ayant pas poursuivi leurs études mathématiques. Elle s'adresse aussi aux élèves de l'enseignement moyen et à tous ceux qui enseignent les éléments de mathématiques.

Deux des monographies viennent de paraître en 2e édition, revue et complétée. Ce sont les suivantes :

No 3. Lietzmann, *Der Pythagorische Lehrsatz.* — Le théorème de Pythagore, sa démonstration, les nombres de Pythagore, le problème de Fermat, bibliographie concernant les objets mentionnés ci-dessus.

No 10. Lietzmann u. Trier. *Wo steckt der Fehler?* — Où est l'erreur ? Il s'agit des erreurs de raisonnement ou de calcul que commettent souvent les élèves en Arithmétique, en Algèbre et en Géométrie.

La collection vient de s'augmenter de deux nouveaux volumes :

No 25. Lietzmann. *Riesen u. Zwerge im Zahlenreich.* — Nombres très grands et nombres très petits. Exemples et curiosités empruntés aux domaines les plus divers.

No 26. B. Kerst. *Methoden zur Lösung geometrischer Aufgaben.* — Exposé de méthodes, nombreuses et variées, en usage dans la résolution des problèmes de Géométrie élémentaire.

H. F. Blichfeldt. — **Finite Collineation Groups.** with an Introduction to the Theory of Groups of Operators and Substitution Groups. (The University of Chicago Science Serie). — 1 vol. in-16, 194 p., relié, 1 D.; The University of Chicago Press, Ill.

L'Ens. math. a déjà signalé l'ouvrage intitulé *Theory and Applications of Finite Groups,* publié par MM. Miller, Blichfeldt et Dickson. Dans ce volume, M. Blichfeldt s'est proposé d'établir d'une façon indépendante la *théorie des groupes linéaires.* Les propriétés qui en forment aujourd'hui la base sont dispersées dans un grand nombre de travaux dont les premiers remontent à l'année 1876 (mémoire de Klein). Le nouvel exposé ne fait pas double emploi avec celui que M. Blichfeldt a consacré à la théorie des groupes linéaires dans l'ouvrage rappelé ci-dessus. Tout en le complétant en de nombreux points, il peut être abordé directement sans connaissance préalable de la technique de la théorie des groupes. Il fournit en même temps une bonne introduction à la théorie des groupes d'opérations et des groupes de substitutions.

La marche suivie ressort de l'énumération des chapitres, au nombre de huit :

Propriétés élémentaires des groupes linéaires. — Groupes d'opérations et groupes de substitutions. — Groupes linéaires à deux variables. — Théorie des groupes linéaires. — Groupes linéaires à trois variables. — Caractéristiques. — Groupes linéaires à quatre variables. — Historique et applications des groupes linéaires.

E. Bucherer. — **Grundzüge der mathematischen Geographie.** — 1 broch. in-8°, 40 p.; G. Krebs, Bâle, 1917.

H. Stohler. — **Mathematische Geographie u. sphär. Trigonometrie.** Als ein einheitlicher Lehrgang ausgearbeitet. — 1 vol. in-8°, 96 p., relié, avec 46 fig. et 2 planches; Basler Druck u. Verlags-Anstalt, Bâle, 1916.

En Suisse la *Cosmographie* ne fait pas toujours l'objet d'un enseignement spécial dans les établissements secondaires supérieurs. Ce n'est guère le cas que dans les écoles de la Suisse romande et dans le Tessin. Ailleurs les différentes parties de la Cosmographie se trouvent réparties entre la Géographie, la Physique et la *Trigonométrie sphérique,* à laquelle on rattache quelques chapitres de *Géographie mathématique.* En suivant cette voie, le professeur dispose d'une source précieuse de problèmes très variés dont il augmente encore l'intérêt en les rattachant à quelques observations faites en plein air ou dans un observatoire.

C'est ainsi que l'on procède à Bâle, au Gymnase classique et à l'Ecole réale supérieure (Gymnase scientifique). La première brochure, celle du professeur Bucherer, est un résumé des leçons de Géographie mathématique faites au Gymnase classique. Elle a été rédigée pour les élèves dans le but d'éviter la dictée d'un cours. Il suffit que les élèves aient sous une forme concise les notions les plus indispensables. La brochure ne contient aucun dessin, les figures devant être faites pendant les leçons, sous la direction du maître.

Cet abrégé comprend quatre parties : Les phénomènes célestes. — Les systèmes du monde. — Le système solaire. — Les étoiles fixes.

Le livre de M. Stohler correspond à l'enseignement donné au Gymnase

scientifique. C'est plus qu'un abrégé; c'est un manuel accompagné de figures, de cartes célestes et de tableaux numériques. Il traite des objets suivants :

Détermination d'un point sur la sphère céleste; problèmes et constructions. — Description du ciel; orientation. — Trigonométrie sphérique. — Mesure des temps. — Problèmes empruntés à l'Astronomie sphérique. — Le système du monde. — Tables.

Comme on le voit, c'est une fusion complète, dans un même enseignement, des éléments de Trigonométrie sphérique et des notions de Cosmographie limitées aux méthodes de mesures et d'observations qui peuvent être mises à la portée des élèves d'un gymnase scientifique. S'il est vrai que ce programme dépasse sensiblement celui que l'on rencontre généralement dans l'enseignement secondaire, il présente, par sa méthode d'exposition, le grand avantage de vivifier les leçons et de montrer la portée des mathématiques dans un champ très vaste d'applications utiles, non seulement à l'astronome, mais encore aux marins et aux aéronautes.

Ajoutons qu'à Bâle on procède d'une manière analogue pour la Trigonométrie plane avec ses applications élémentaires au levé des plans basées sur des mesures prises effectivement sur le terrain.

Ce court aperçu montre que dans la patrie d'Euler et des Bernoulli on est loin des méthodes livresques et des problèmes au millième de seconde qui ne sont encore que trop répandus dans l'enseignement secondaire.

H. F.

H. S. Carslaw. — **The Elements of non-euclidean Plane Geometry and Trigonometry.** (Longmans' Modern Mathematical Series.) — 1 vol. in-16, 179 p.; relié, 5 sh.; Longmans, Green and C°, Londres.

Il est indispensable que les maîtres de l'enseignement moyen se rendent bien compte de la portée du postulat d'Euclide et de ce que devient la Géométrie si l'on renonce à ce postulat. C'est à ce point de vue que s'est placé l'auteur. Son ouvrage s'adresse aux professeurs de géométrie élémentaire, aux candidats à l'enseignement moyen et aux étudiants. Après avoir exposé brièvement les travaux les plus importants de Saccheri, Legendre, Gauss, Bolyai, Lobatschewsky et Riemann sur le postulat des parallèles, il examine les éléments de la Géométrie plane et de la Trigonométrie lobatschewskiennes (ou hyperbolique), de la Géométrie plane et de la Trigonométrie riemannienne (elliptique).

Suivant le but qu'il s'est proposé, l'auteur s'est borné aux notions fondamentales. Présentées avec clarté et précision, ces notions constituent une excellente introduction à l'étude des travaux classiques sur la théorie des parallèles et les géométries non-euclidiennes. H. F.

Duilio Gigli, professore al R. Liceo di Pavia. — **Lezioni di Aritmetica e di Algebra elementare,** ad uso delle scuole secondarie superiori. — 1 vol. p. in-8°, Mattei & C°, Pavie.

Dans la première partie de cet ouvrage, publié en juin 1914, l'auteur traite des cinq premières opérations de l'arithmétique, des progressions, de la numération décimale, des proportions et des fractions décimales périodiques. Voulant éviter l'écueil de présenter l'arithmétique comme un jeu de signes, il base ses déductions sur des propositions concernant des col-

lections d'objets ; l'étude des proportions est précédée de copieuses considérations sur les grandeurs continues ; le nombre 0 est l'objet d'un soin particulier.

Tout en rendant hommage à l'effort de pensée de M. le prof. Gigli, nous avouerons que la concision n'est pas toujours la qualité maîtresse de ses explications et démonstrations ; cela tient peut-être au point de vue auquel il a voulu se placer. Son ouvrage sera lu avec intérêt par les maîtres de mathématiques ou les instituteurs déjà au courant de l'arithmétique générale.

Lucien Baatard (Genève).

M. Grossmann. — **Elemente der darstellende Geometrie** (Teubners Leitfaden für den mathem. u. techn. Hochschulunterricht). — 1 vol. p. in-8°, 84 p., 2 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ces *Eléments de Géométrie descriptive* font partie de la Collection des *Abrégés Teubner* destinés aux étudiants de l'enseignement supérieur universitaire et technique. Ils forment une introduction à l'ouvrage publié par le professeur de Zurich dans la même collection sous le titre de *Géométrie descriptive.*

Ces éléments comprennent :

I. La projection orthogonale sur un plan. — II. La projection orthogonale sur deux plans rectangulaires. — III. Les prismes et les pyramides, avec les problèmes sur les intersections de polyèdres. — IV. Les corps ronds.

Conformément au but de la collection, l'auteur s'est borné aux notions fondamentales ; il les présente sous une forme claire et concise. Ses deux petits manuels constituent un excellent guide dans une première étude de Géométrie descriptive.

Maurice Lecat. — **Bibliographie du Calcul des variations**. I. Depuis l'origine jusqu'à 1850 ; 92 p., 4 fr. 50. — II. De 1850 à 1913 ; 113 p., 4 fr. — 2 fasc. in-8°, Ad. Hoste, Gand ; A. Hermann & fils, Paris.

A la suite du développement considérable qu'a pris le calcul des variations depuis une vingtaine d'années, il a paru utile de faire une bibliographie aussi complète que possible des travaux parus. Les listes établies par M. Lecat comprennent les travaux qui utilisent le calcul des variations et ceux qui s'y rattachent. Chacun des deux fascicules comprend deux listes : l'une par ordre alphabétique des noms d'auteurs avec les titres (accompagnés, s'il y a lieu, de la traduction française) des mémoires ou des ouvrages ; l'autre, où les indications sont abrégées, est rédigée suivant un classement à peu près chronologique.

Le fascicule I donne en outre, dans l'ordre alphabétique, les titres de recueils cités, avec l'indication des tomes, accompagnée elle-même des numéros d'ordre des articles qui y sont contenus.

L'auteur a établi une statistique des numéros cités. On constate, pour la période qui précède 1850, qu'il y a trois fois plus de mémoires écrits en langue française qu'en allemand.

Ce travail bibliographique sera bien accueilli du public mathématique. Il est appelé à rendre de grands services à tous ceux qui s'occupent du calcul des variations.

Ch. Michel. — **Cours d'Algèbre et d'Analyse.** — 1 vol. gr. in-8° de x-860 p. et 91 fig., avec 345 exercices et problèmes proposés. 18 fr.; F. Alcan, Paris, 1916.

Voici un ouvrage dense et volumineux qui fait, à coup sûr, grand honneur à l'érudition de son auteur. Le plan adopté est déjà, à lui seul, une chose fort remarquable, et je m'expliquerai mieux à ce sujet en reproduisant d'abord, comme suit, les titres des chapitres.

I. Nombres irrationnels, limites, continuité. — II. Fonctions puissance, exponentielle et logarithmique. — III. Fonctions circulaires. — IV. Polynômes. Fractions rationnelles. Développements limités. — V. Analyse combinatoire. Binôme de Newton. Fonctions symétriques rationnelles. — VI. Déterminants. Equations linéaires. Formes linéaires. — VII. Nombres imaginaires. — VIII. Dérivées et différentielles. — IX. Applications de la théorie des dérivées à l'étude des équations et des fonctions. — X. Equations entières. — XI. Calcul intégral. — XII. Applications géométriques du Calcul intégral. — XIII. Séries numériques. — XIV. Séries entières. — XV. Equations différentielles.

Le premier chapitre semble s'inspirer notablement de la *Théorie des nombres irrationnels, des limites et de la continuité* publiée par M. René Baire en 1905 (Vuibert & Nony, Paris).

Le second étudie x^n, soit comme fonction de x soit comme fonction de n, ce qui explique pourquoi l'exponentielle apparaît ici avant ces assemblages de termes en x^n que sont les polynômes. Quant aux fonctions circulaires, sans présager en rien de leur nature analytique, on peut cependant voir, ne serait-ce que par leurs formules d'addition, qu'elles sont suffisamment apparentées à la fonction exponentielle pour être étudiées immédiatement à la suite de celle-ci.

Avec l'étude des polynômes, il faut signaler celle des développements limités tels que

$$a_0 + a_1 + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \varepsilon x^n \;;$$

l'idée se présente de manière intéressante comme amorce propre à unir les polynômes aux séries entières.

Les fonctions symétriques rationnelles sont étudiées naturellement au moyen des fonctions symétriques élémentaires, mais celles-ci sont considérées indépendamment de la théorie des équations algébriques.

La notion de dérivée est élégamment présentée avec interprétation géométrique à l'appui; elle est immédiatement suivie de l'étude de la dérivée partielle. Les théorèmes de Rolle et des accroissements finis sont aussi appuyés géométriquement et le dernier, convenablement généralisé, conduit à la formule de Taylor avec son reste.

Les applications des dérivées sont aussi de nature nettement géométrique : beaucoup de courbes. La méthode d'approximation de Newton se place ici de manière élégante et ceci est excellent; on ne lui fait pas le tort de la représenter comme un pis aller rejeté après l'impossibilité de la résolution par radicaux, laquelle, même quand elle est possible, exige des extractions de racines, c'est-à-dire des opérations ayant même nature arithmétique que la méthode newtonienne.

Le chapitre des équations entières est encore un de ceux où les considérations scientifiques modernes sont, avec une très heureuse habileté, mises

au niveau du programme à développer. Les transformations des équations, notamment leurs diverses transformations homographiques, y sont étudiées avec nombre d'exemples. La décomposition des fractions rationnelles, si intimément liée à celle des polynômes, est présentée avec introduction de la notion de pôle et de résidu ; à un pôle donné correspond le fait de retrancher de la fraction considérée un développement relatif à ce pôle ; c'est le procédé de décomposition des fonctions méromorphes.

Lorsqu'on aborde l'intégration, celle des fractions rationnelles lie immédiatement le sujet nouveau au sujet précédent. Très nombreux exemples d'intégrales indéfinies et définies, intéressantes formules récurrentes à un et deux indices. Elégantes applications géométriques complétant d'ailleurs la géométrie des masses.

Ce n'est qu'ensuite que nous abordons les séries. Si l'on observe ce qui a déjà été dit sur les développements *limités*, sur la formule de Taylor *toujours pourvue d'un reste*, on voit que l'auteur a soigneusement tenu à bien distinguer ces questions de celles, très délicates, qui concernent les séries indéfinies.

Placées après le calcul intégral, on peut d'ailleurs les comparer avec les intégrales définies et aborder les séries entières avec leurs théorèmes fondamentaux d'intégration et de dérivation.

Il y a là, dans l'ensemble, un ouvrage rédigé avec une conscience extrême ; outre ce que je disais au début, il fait aussi honneur aux qualités de logicien de l'auteur qui, d'ailleurs, doit être un excellent professeur. J'ai toutefois l'envie de critiquer le programme qui se reflète dans un tel livre ; il m'est pénible de penser qu'un adolescent peut avoir une première vue de la science sous un aspect si souvent hérissé de difficultés subtiles et pointilleuses, dont l'analyse délicate ne joue cependant aucun rôle dans les œuvres d'un Hermite ou d'un Poincaré. Faut-il admettre, comme je l'ai souvent entendu dire, que si la préparation aux grandes écoles ne roulait que sur une science esthétique et intuitive, les élèves comprendraient trop bien et répondraient trop facilement aux examinateurs qui ne sauraient qui éliminer. Espérons encore que ceci n'est pas une bonne raison. Espérons aussi que les élèves qui prendront ce livre pour guide pourront le lire d'abord sans trop insister sur ses parties rigoristes et revenir ensuite sur celles-ci ; il ne leur restera plus alors aucun doute sur la possibilité de tout disséquer.

A. Buhl (Toulouse).

J. Rey Pastor. — **Introducción a la Matemática superior.** Estado actual, Métodos y Problemas (Manueles Corona). — 1 vol. in-16, cart., 202 p., 3 P. 50 ; Biblioteca Corona, Madrid, 1916.

J. Rey Pastor. — **Teoría de la Representació conforme.** (Publicacions de l'Institut de Ciencies.) — 1 vol. in-8°, 115 p., Institut d'Estudis Catalans, Barcelona, 1915.

J. Rey Pastor. — **Fundamentos de la Geometría Proyectiva superior.** — 1 vol. gr. in-8°, XXII-444 p. (Junta para ampliación de estudios e investigaciones cientificas). Madrid, 1916.

Voici trois ouvrages rédigés par un jeune géomètre espagnol — M. Rey Pastor n'a que vingt-neuf ans — qui semble appelé à prendre une part active aux progrès de l'enseignement scientifique de son pays. Le premier est dédié à son maître, le professeur Z. G. de Galdeano, bien connu dans

le monde des mathématiciens. Avec une ardeur infatigable, le géomètre de Saragosse s'efforce, depuis plus de vingt ans, à vulgariser les mathématiques en Espagne, à les faire connaître et apprécier dans les différents milieux scientifiques, afin de montrer le rôle utile qu'elles doivent jouer dans l'enseignement scientifique élémentaire, secondaire et supérieur. Son brillant élève M. Rey Pastor poursuit cette belle tâche.

Sous le titre d'*Introduction aux mathématiques supérieures* l'auteur a fait une série de conférences destinées à donner des vues d'ensemble des méthodes et des problèmes qui caractérisent les mathématiques modernes. Le présent ouvrage est la reproduction de ces conférences dont voici les principaux objets :

I. Fondements de l'Arithmétique et de l'Analyse. — II. Fondements de la Géométrie. — III. Fonctions d'une variable réelle. — IV. Méthode du passage à la limite dans la théorie des fonctions. — V. Fonctions d'une variable complexe. — VI. Systématisation des mathématiques par la théorie des groupes.

Le second volume a été publié sous les auspices de l'« Institut d'Estudis catalans ». C'est la reproduction d'une série de huit conférences sur *la théorie de la représentation conforme*. Elles sont destinées à initier les étudiants aux problèmes fondamentaux de cette théorie, tels qu'ils résultent des travaux récents de Poincaré, Kœbe, Caratheodory, Bieberbach, etc.

Ces deux séries de conférences sont rédigées avec une grande clarté ; l'auteur a su choisir les faits essentiels et les ordonner avec soin.

Ces mêmes qualités se retrouvent dans le troisième ouvrage, le plus important des trois. Rédigé au retour d'un séjour en Allemagne, ce volume n'a pas la prétention d'être un traité systématique de Géométrie projective ; c'est plutôt un exposé des principes fondamentaux et des méthodes qui sont propres à cette branche de la Géométrie. Il comprend trois parties.

Dans la première partie, intitulée « Systématisation de la Géométrie », l'auteur présente d'abord les notions essentielles de la théorie des groupes de transformation, puis il montre quels sont les caractères fondamentaux des différents types de géométries, depuis la géométrie métrique jusqu'aux géométries transcendantes.

La seconde partie est consacrée aux fondements de la Géométrie projective réelle. Elle comprend l'étude des axiomes, leur indépendance et leur compatibilité, l'étude de la projectivité et du calcul vectoriel projectif.

Dans la troisième partie l'auteur présente les fondements de la Géométrie projective complexe. Après avoir défini les éléments imaginaires de l'espace R_n, il expose les méthodes de Segré, Klein, Amodeo, Gauss, Staudt, Riemann, etc., puis il examine les propriétés projectives des figures algébriques.

En entreprenant cette étude des fondements de la Géométrie projective supérieure, le jeune professeur de Madrid s'est attaqué à des questions fort délicates. Sa connaissance approfondie du sujet lui a permis de surmonter les difficultés. Son Ouvrage est appelé à rendre de grands services dans les universités de langue espagnole. H. F.

José A. Sanchez Perez. — **Compendio de Algebra de Abenbéder.** Texto arabe, traduccion y estudio. (Junta para ampliación de estudios e investigaciones cientificas. Centro de Estudios historicos). — 1 vol. in-8°, 200 p., 6 pesetas ; secrétariat de la Société, Moreto, 1, Madrid, 1916.

Cette traduction espagnole de l'Algèbre d'Abenbéder apporte une contribution intéressante à l'Histoire des mathématiciens hispano-arabes. Il s'agit d'un ouvrage didactique qui semble avoir été assez répandu chez les Arabes de l'Occident. Le manuscrit arabe qui a servi de base à ce travail est daté de 1343 ; il est conservé à la Bibliothèque de l'Escurial à Madrid.

Dans sa préface, d'environ 50 pages, M. Sanchez Perez fournit d'abord un court aperçu de l'histoire des mathématiques en Espagne en s'arrêtant plus particulièrement sur la période à laquelle appartient le manuscrit d'Abenbéder. Il présente ensuite la traduction du manuscrit avec des annotations permettant de suivre plus facilement les calculs du mathématicien arabe, puis il donne le texte même du Traité d'Abenbéder.

Les sujets mathématiques abordés dans ce traité ne modifient en rien nos connaissances sur les mathématiques chez les Arabes de l'Occident. Ils comprennent, dans la partie théorique, la résolution des équations du premier et du second degré, le calcul des racines carrées, la multiplication des polynômes. Une seconde partie du Traité est consacrée à des problèmes nombreux et variés, parmi lesquels on trouve aussi des problèmes indéterminés du premier et du second degré.

O. Stolz und J. A. Gmeiner. — **Theoretische Arithmetik.** — II : Die Lehren von den reellen und von den komplexen Zahlen. 2. Anflage. — 1 vol. in-8°, VIII-369 p. ; broché 12 M. ; B. G. Teubner, Leipzig, 1915.

Les traités publiés par Stolz sous le titre d'Arithmétique générale et par Stolz et Gmeiner sous celui d'Arithmétique théorique sont devenus classiques. Il nous suffira donc de rappeler ici très brièvement le contenu de cette 2e édition du Tome II de l'Arithmétique théorique, qui était en quelque sorte une 2e édition, entièrement revue, de l'Arithmétique générale de Stolz.

Les auteurs ayant conservé le terme d'Arithmétique dans le sens de l'ancienne Arithmetica universalis, il s'agit en réalité d'un traité d'Algèbre limité aux opérations fondamentales. Le présent volume fournit une étude approfondie des nombres réels (chap. V à VIII), des nombres complexes (chap. X à XII), y compris les puissances, les racines et les logarithmes de ces nombres. Il contient en outre une première étude des séries de nombres réels (chap. IX) et des séries de nombres complexes (chap. XIII).

Les nombres irrationnels sont étudiés d'après les théories arithmétiques établies par G. Cantor et Ch. Méray.

Parmi les modifications et additions apportées à cette édition, nous nous bornons à signaler les paragraphes relatifs à la représentation géométrique des quaternions.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

American Mathematical Monthly (The), Official Journal of the Mathematical Association of America, devoted to the Interests of Collegiate Mathematics, edited by H. E. Slaught, W. H. Bussey, R. D. Carmichael. — Volume XXIV 1917. Lancaster and Chicago.

Annales de l'Université de Grenoble, tome XXIX, 1917. — Gauthier-Villars, Paris ; Allier frères, Grenoble.

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche, pubblicato per cura di Gino Loria. Anno XIX, 1917. — Rosenberg & Sellier, Torino.

Bollettino di Matematica. Giornale scientifico didattico per l'incremento degli Studi matematici nelle scuole medie. Diretto dal Dott. Alb. Conti. Anno XV, 1916-17, Roma.

Contribucion al Estudio de las Ciencias fisicas y matematicas. — Serie Matematico-fisica, Vol. I, 1916. — Serie Tecnica, Vol. I, 1916. La Plata.

Giornale di Matematiche di Battaglini, diretta da Ernesto Pascal. — Vol. LV (8° della 3ª Serie). — Pellerano, Naples.

Intermédiaire des Mathématiciens, dirigé par C.-A. Laisant, Ed. Maillet, A. Maluski, A. Boulanger. — Tome XXIV, 1917. — Gauthier-Villars, Paris.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert, 4e année, 1916-1917. — Librairie Vuibert, Paris.

Nieuw Archief voor Wiskunde, publié sous les auspices de la Société des Sciences d'Amsterdam, par J.-C. Kluyver, D.-J. Korteveg et F. Schuh, 2e série, tome XII. — Delsman en Nolthenius, Amsterdam.

Nyt Tidsskrift for Matematik. Revue dirigée par P. Heegaard, série A, 28e année ; série B, 28e année ; 1917. — Jul. Gjellerup, Copenhague.

Periodico di Matematica per l'insegnamento secondario. Diretto dal Prof. G. Lazzeri. Série 3, vol. XIV. — Raffaele Giusti, Livorno.

Revista de la Sociedad Matemática Española. Revue mensuelle, 6e année, 1916-1917. — Ed. Arias, Madrid.

Revue scientifique. Directeur : Ch. Moureu. — 55e année, 1917. — 41 bis, rue de Châteaudun, Paris.

Revue semestrielle des publications mathématiques, rédigée sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam, par H. de Vries, J. Cardinaal, W. Kapteyn, J. C. Kluyver et J. Wolff. — Tome XXV. Première partie : avril-octobre 1916. — Delsman en Nolthenius, Amsterdam.

School Science and Mathematics. A Journal for Science and Mathematics Teachers in secondary Schools, vol. XV, 1917. — Smith and Turton, Chicago.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgegeben von K. Schwab und A Maurer. — XXIII Jahrgang. 1917. Otto Salle, Berlin.

Wiskundige Opgaven met de Oplossingen. Tome XII, Delsman en Noltheniumns, Amsterdam.

Annals of Mathematics published under the auspices of the Princeton University N. J. — 2me série, Vol. 18, nos 3 et 4. — H. S. Vandiver : Symmetric Functions formed by Systems of Elements of a Finite Algebra and their Connection with Fermat's Quotient and Bernoulli's Numbers. — H. S. Vandiver : The Generalized Lagrange Intederminate Congruence for a Composite Ideal Modulus. — Howard H. Mitchell : On the Congruence $cx^{\lambda} + 1 = dy^{\lambda}$ in a Galois Field. — W. C. Graustein : On the Geodesics and Geodesic Circles on a Developable Surface. — Dunham Jackson : Note on representations of the Partial Sum of a Fourier's Series. — Frank Irwin : Acknowledgment. — Henry Blumberg : Certain General Properties of Functions. — L. E. Dickson : Fermat's Last Theorem and the Origin and Nature of the Theory of Algebraic Numbers. — A. J. Pell and R. L. Cordon : The Modified Remainders Obtained in Finding the Highest Common Factor of Two Polynomials. — L. I. Hewes : Nomograms of Adjustment. — Albert A. Bennett : Closed Algebraic Correspondences. — J. L. Coolidge : The Intersections of a Straight Line and Hyperquadric — William Benjamin Fite : The Relation between the Zeros of a Solution of a Linear Homogeneous Differential Equation and Those of its Derivatives. — Luther Pfahler Eisenhart : Conjugate Planar Nets with Equal Invariants.

Annali di Matematica pura ed applicata, Milano. — Série III, T. XXVI, fasc. 1-2. — Chester : Surfaces characterized by certain special proprieties of their directrix congruences. — Caldonazzo : Sulla confluenza di vene libere.

Fasc. 2-3. — Lusin : Sur la notion de l'intégrale. — Sierpinski : L'arc simple comme un ensemble de points dans l'espace à m dimensions. — Calapso : Intorno agl' inviluppi di sfere, sulle cui superficie focali si corrispondono le linee di curvatura. — Darbi : Proprietà delle equazioni Abeliane a gruppo ciclico. — Bianchi : Sulle superficie le cui normali si distribuscono in una serie ∞^1 di iperboloidi rotondi.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Vol. XXVI. 1er semestre 1917. — G. Andreoli : Sovra certe equazioni di composizione di seconda specie. — Id : Equazioni integrali singolari con nuclei analoghi a quelli di Evans. — Id : Sovra una particolare classe di equazioni integrali singolari. — L. Ber-

zolari : Sulla varietà cubica con dieci punti doppi dello spazio a quattro dimensioni. e nella configurazione di quindici archi dello spazio ordinario studiata dallo Stephanos. — L. Bianchi : Rappresentazioni normali uniformi e sistemi di Weingasten. — Id : Sopra una propietà caratteristica delle superficie della classe $K = -1[\varphi(a) + \psi(b)]^2$. — E. Bompiani : Affinità e superficie applicabili. — C. Burali-Forti : Sopra una nuova definizione di terne, ecc. — Id : I moti relativi nel calcolo assoluto. — F. P. Cantelli : Sulla probabilità come limite della frequenza. — Id : Su due applicazioni di un teorema di G. Boole alla statistica matematica. — S. Cherubino : Sulle omografie riemanniane di una matrice di Riemann. — O. Chisini : Sulla riducibilità dell' equazione tangenziale di una superficie dotata di curva doppia — E. Danielo : Sulle equazioni differenziali e le equazioni integro-differenziali correlative. — F. Enriques : Sui rami delle curve algebriche gobbe nell'intorno di un punto singolare. — Id : Sulla teoria delle omografie iperspaziali. — G. Lebon : Solution d'un problème remarquable relatif à la nouvelle Table de diviseurs des nombres. — S. Lefschetz : Sur certains cycles à deux dimensions des surfaces algébriques. — G. A. Maggi : Sopra una formula commutativa e alcune sue applicazioni. Id : Posizione e soluzione di alcune questioni attinenti alla teoria delle distorsioni elastiche. — J. Pérès : Sur la composition de 1ère espèce ; les fonctions d'ordre quelconque et leur composition. — G. Sannia : Sul metodo di Borel per la sommazione delle serie. — Id : Generalizzazione del metodo di Borel per la sommazione della serie. — C. Segre : Sui complessi lineari di schiere rigate o regoli. — O. Tedone : Sul principio di Huygens in un campo elettromagnetico. — G. Togliatti : Untipo semplice di reti di reciprocità degeneri di 1ª specie tra spazî ad n dimensioni. — A. Vergerio : Un' applicazione del metodo di sommazione delle serie alla risoluzione delle equazioni integrali.

E. Almansi : Sulla forma dello sferoide terrestre dedotta dalle misure di gravità. — O. Lazzarino : Sull' estendibilità del teorema di reciprocità del prof. V. Volterra ad un conduttore elletrico a tre dimensioni, non omogeneo, anisotropo e sottoposto all' azione di un campo magnetico qualunque. — T. Levi-Civita : Statica einsteiniana. — Id : Sulla espressione analitica spettante al tensore gravitazionale nella teoria di Einstein. — P. Pizzetti : A proposito di una recente Nota del prof. Almansi.

G. Armellini : Sopra le distanze planetarie del sole. — B. Petronievics : Sur les nombres infinis de Fontenelle.

Bulletin de la Société Physico-Mathématique de Kasan, 2me série, Tome XX : I. — Iznoskoff : Sur les carrés magiques. — Th. Banahewitsch : A propos de la théorie d'erreur de fermeture annuelle dans le cas de la détermination de latitude géographique. — N. Agronomoff : Sur un type d'équations indéterminées $x_1^{2m+1} + x_2^{2m+1} + \ldots + x_k^{2m+1} = 0$ dont les solutions sont des nombres entiers. — D. Doubiago : Sir Robert Ball (Nécrologie). — G. Fichtenholz : Sur la dérivation des intégrales définies. — O. Gitomirski : Sur la courbure des polyèdres. — M. A. Gratscheff : Contribution à la théorie des erreurs de fermeture dans la question des changements de la latitude géographique. — M. Parfentieff : Quelques remarques au sujet des carrés magiques. — N. Agronomoff : Sur une classe des équations indéterminées de la forme $x_1^n + x_2^n + \ldots + x_k^n = 0$ résolubles en nombres entiers.

M. Gratscheff : Sur la valeur de la constante d'aberration. — G. Rabinovitsch : Sur la propriété du maximum du cercle.

Tome XXI. — N. Parfentieff : N. Sonine (revue de ses travaux scientifiques). — D. Goldhammer : Nouvelle théorie des phénomènes électromagnétiques dans les milieux mouvants. — I. Socoloff : A la mémoire des professeurs I. Borgman et N. Oumoff. — D. Goldhammer : Nouvelle théorie des phénomènes électromagnétiques dans les milieux mouvants. (suite). — J. Maximoff : Théorie des congruences binomes et des racines primitives. — N. Parfentieff : Evaluation d'une intégrale définie. — Bolotoff : Sur le principe de Gauss. — Th. Banachevicz : Détermination graphique de la distance d'une comète dans la méthode de Olbers. — J. Ouspensky : Sur la possibilité de la représentation des nombres par certaines formes quadratiques. — J. Ouspensky : Règle pour déterminer le signe de la congruence 1, 2, 3, ... $\frac{p-1}{2} \equiv \pm 1$ (mod. p.). — N. Agrnoomoff : sur un système remarquable des triangles. — N. Agronomoff : Quelques généralisations et corollaires du théorème relatif aux moyennes géométrique et arithmétique. — F. Sirvinte : Sur l'uniformisation des fonctions analytiques.

Bulletin des Sciences mathématiques, rédigé par G. Darboux et E. Picard ; secrétaire de la Rédaction, E. Lebon. Tome XL, juillet-décembre 1916. — P. Appell : Sur des lignes polygonales et sur des surfaces polyédrales généralisant les polygones de Poncelet. — M. D'Ocagne : A propos d'une Note de M. Matteo Bottasso sur une enveloppe de droites. — F. Boulad : Sur la détermination du centre de courbure des trajectoires orthogonales d'une famille quelconque de courbes planes. — G. Darboux : Remarques sur la Note de M. Farid Boulad. — M. Soubbotine : Sur les points singuliers de certaines équations différentielles.

Tome XLI, 1917, janvier-juin. — P. Appell : Sur un théorème de Joseph Bertrand relatif à la Cinématique des milieux continus. — T. Dantzig : Démonstration directe du dernier théorème de Henri Poincaré. — B. Jekhowsky : Sur la fonction génératrice des fonctions de Bessel à plusieurs variables. — E. Picard : Sur la relation entre les périodes d'une fonction uniforme quadruplement périodique de deux variables. — G. Kœnigs : Recherches sur les mouvements plans à deux paramètres.

Bulletin of the American Mathematical Society, New-York. Vol. XXIII, nos 7-10. — J. E. Rowe ; The Equation of a Rational Plane Curve Derived from its Parametric Equations, II. — Edward Kasner : Equilong Invariants and Convergence Proofs. — Samuel Beatty : The Inversion of an Analytic Function. — T. S. Fiske : Emory Mc Clintock. — Dr. J. H. Weaver : On Foci of Conics. — Jekuthial Ginsburg : New Light on Our Numerals, with Introductory Note by Professor D. E. Smith. — W. F. Osgood : Singular Points of Analytic Transformations. — J. E. Rowe : The Projection of a Line Section upon che Rational Plane Cubic Curve. — D. Carmichael : Examples of a Remarkable Class of Series. — P. J. Daniell : The Modular Difference of Classes. — G. E. Wahlin : On the Principal Units of an Algebraic Domain k (p, a).

Compte rendus de l'Académie des Sciences de Paris. — Ier semestre 1917. — *10 avril.* — G. Julia : Sur les réductions des formes indéterminées con-

juguées non quadratiques. — *16 avril.* — Riquier : Sur une propriétés des fonctions analytiques d'un nombre quelconque de variables imaginaires. — Mesnager : Sur la représentation des charges concentrées par des séries trogonométriques. — *30 avril.* — Guichard : Sur les réseaux 0 de Monge dans un espace d'ordre quelconque. — J. Boussinesq : Hypothèse fondamentale de la mécanique des masses pulvérulentes. — *7 mai.* — M. Petrovitch : Sur quelques expressions numériques remarquables. — B. Jekhowski : Sur le développement en série de diverses expressions algébriques au moyen des fonctions de Bessel à plusieurs variables. — *14 mai.* — E. Kogbeliantz : Sur la sommation des séries ultrasphériques. — M. Petrovitch : Théories arithmétiques sur l'intégrale de Cauchy. — *21 mai.* — P. Fatou : Sur les substitutions rationnelles. — *4 juin.* — P. Montel : Sur la représentation conforme. — W. Sierpienski : Sur quelques problèmes qui impliquent des fonctions non mesurables. — *11 juin.* — G. Julia : Sur les formes biquadratiques à indéterminées conjuguées et à cœfficients entiers. — *18 juin.* — C. Guichard : Sur les surfaces telles que l'équation de Laplace du réseau formé par les lignes de courbure soit intégrable. — G. D. Birkhoff : Sur une généralisation de la série de Taylor. — H. Duport : La loi de l'attraction universelle. — *25 juin.* — G. Julia : Sur les formes binaires à indéterminées conjuguées qui restent invariantes par une substitution linéaire. — W. Sierpinski : Sur une extension de la notion de densité des ensembles. — E. Jablonski : Contribution à l'étude du cas le plus général du choc dans un système de points matériels soumis à la loi de Newton.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, Leipzig. — Jahrgang 1916, Juli-Dezember. — E. Müller : Die achsiale Inversion. — E. J. Gumbel : Eine Darstellung statistischer Reihen durch Euler. — Hermann Weyl : Strenge Begründung der Charakteristikentheorie auf zweiseitigen Flächen. — A. Rosenthal u. O. Szasz : Eine Extremaleigenschaft der Kurven konstanter Breite. — P. Riebensell : E. Busche. — E. Hæntzschel : Ueber die Kongruenz $2^{1092} \equiv 1$, mod. 1093^2. — Julius v. Sz. Nagy : Ueber die algebraische Darstellung der verknoteten und verketteten algebraischen Raumkurven. — Michael Bauer : Zur Bestimmung der reellen Wurzeln einer algebraischen Gleichung durch Iteration. — J. Horn : Verallgemeinerte Laplacesche Integrale als Lösungen linearer und nichtlinearer Differentialgleichungen. — Emil Lampe : Zur mechanischen Quadratur. — E. Hæntzschel : Theorie der Dreiecke mit rationalen Masszahlen der Seiten und der drei Seitenhalbierenden. — A. Korselt : Ueber eine Diophantische Aufgabe. — P. v. Schæwen : Bemerkungen zu den Abhandlungen des Herrn Hæntzschel im 24. Bande, S. 467 ff. und im 25. Bande, S. 139 ff. — E. Hæntzschel : Bemerkung zu der vorstehenden Notiz des Herrn v. Schæwen. — Hans Hahn : Ueber Fejérs Summierung der Fourierschen Reihe. — Heinrich Liebmann : Die Transformation von Variationsproblemen. — Adolf Kneser : Eine durch elliptische Funktionen darstellbare Transformationsgruppe. — Leo Kœnigsberger : Weierstrass' erste Vorlesung über die Theorie der elliptischen Funktionen.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. — Band 147. — K. Hensel : Allgemeine Theorie der Konkruenzklassengruppen und ihrer Invarianten in algebraischen Körpern. — T. H. Gronwall : Ueber einige Summationsmethoden und ihre Anwendung auf die Fouriersche Reihe. —

O. Perron : Ueber Systeme von linearen Differenzengleichungen erster Ordnung. — A. Kneser : Transformationsgruppen und Variationsrechnung. — O. Kœbe : Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung. III. Der allgemeine Fundamentalsatz der konformen Abbildung nebst einer Anwendung auf die konforme Abbildung der Oberfläche einer körperlichen Ecke. — L. Koschmieder : Konjugierte Punkte und Enveloppen bei speziellen Variationsproblemen. — O. Szasz : Ueber die Erhaltung der Konvergenz unendlicher Kettenbrüche bei independenter Veränderlichkeit aller ihrer Elemente. — F. Schottky : Problematische Punkte und die elementaren Sätze, die zum Beweise des Picardschen Theorems dienen. — R. Fueter : Die Klassenzahl zyklischer Körper vom Primzahlgrad, deren Diskriminante nur eine Primzahl enthält. — M. Pasch : Grundfragen der Geometrie. — A. Ostrowski : Ueber sogenannte perfekte Körper. — J. Schur : Ueber Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind. — K. Hensel : Die Verallgemeinerung des Legendreschen Symboles für allgemeine algebraische Körper. — M. Pasch : Sechs Punkte einer Ebene.

The Mathematics Teacher. A Magazine devoted to the interests of Teachers of Mathematics. Published Quarterly by the Association of Teachers of Mathematics in the middle states and Maryland. Editor : W. H. Metzler. Syracuse Univer sity, Syracuse, N. Y. — Volume IX : Editorial. — C. G. Grove : Mathematics and Psychology. — Dunham Jackson : Variables and Limits. — Amelia C. Wright : College preparation : What is its Effect on What you Teach and How You Teach It. — Harry English : College Preparation : What is its effect on What You Teach and How You Teach It. — Report of the Geometry Committee. — The Association of Teachers of Mathematics of New England : Final Report of the Committee on the Mathematics of the Pre-High School Grade. — George W. Evans : Mathematics for the Junior High School. — D. E. Smith : What is to Be the Oulcome? — J. H. Minnick : Our Critics and their Viewpoints. — Agnes L. Rogers : The Established Results of the New Psychology as it Bears upon the Teaching of Mathematics. Recent Criticisms of Mathematics Teaching and their Results. — R. H. Henderson : Recent Advances in the Teaching of Mathematics. — J. L. Patterson : To Plot $ax^2 + bx + c = 0$. — S. S. Keller : Entrance Requirements Again. — G. A. Miller : The Use of the Radical Symbol. — Katharine F. Ball : Mathematics Applied to Domestic Arts. — Leonhard Felix Fuld : Civil Service Questions in Mathematics. — E. H. Koch, Jr : Mathematics Contests. — C. C. Grove : Returns to the Questioner. — J. K. Lamond, C. C. Grove, Roos W. Marriott : The Order of Teaching the Parts of the Calculus. — Frank H. Scobey, A. L, Clapp, Ruth Munhall : Should Arithmetic be Taught to all Pupils in the High School? When ? How Much Time Shouldbe Given to it. — Louisa M. Webster : Mathematics Clubs. — F. W. Gentleman : The Content of a Mathematical Course for the Junior High School. — New Books. — Notes and News.

Mathematische Annalen, Band 78, nos 1 et 2. — Alfred Lœwy : Ueber Matrizen- und Differentialkomplexe. — Rudolf Schauffler : Ueber wiederholte Funktionen. — Robert Kœnig : Grundzüge einer Theorie der Riemannschen Funktionenpaare. — Alexander Ostrowski : Ueber die Existenz einer endlichen Basis bei gewissen Funktionensystemen. — A. Haar : Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen. — E. Hilb : Zur Theorie der

linearen funktionalen Differentialgleichungen. — H. Mohrmann : Ueber algebraische und nichtalgebraische gewundene Kurven n-ter Ordnung vom Maximalindex. — R. Bær : Ueber Greensche Randwertaufgaben bei der Schwingungsgleichung. — G. Hessenberg : Vektorielle Begründung der Differentialgeometrie. — J. A. Schouten : Zur Klassifizierung der assoziativen Zahlensysteme.

Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo. Tome XLII. Fasc. 1. — Strazzeri : Sulle superficie che ammettono per sezioni piane una semplice infinità di curve prefissate. — V. Amato : Sulla risoluzione apiristica, in un corpo quadratico, delle concruenze binomie secondo un ideale primo. — P. Nalli : Sulla sommabilità delle serie, con particolare riguardo alle serie di Dirichlet. — O. Nicoletti : Su una classe di iterazione per l'approssimazione degli irrazionali quadratici. — G. Grimaldi : Delle superficie algebriche d'ordine 7 con un fascio ellittico di coniche. — C. Segre : Su una generazione dei complessi quadratici di rette del Battaglini. — U. Amaldi : Sulle derivate successive delle funzioni composte di quante si vogliono variabili. — G. Marletta : Delle superficie algebriche d'ordine 6 con un fascio di cubiche ellittiche.

Dans une cirulaire datée de Palerme, du 8 juillet 1917, M. De Franchis, *Directeur des Rendiconti, annonce que par suite des difficultés provenant de la guerre, le comité se voit dans l'obligation de suspendre provisoirement la publication de la Revue.*

Revue de l'Enseignement des Sciences (La). — Librairie Alcan, Paris. — Mai-Décembre 1916. — B. Niewenglowski : Sur le problème d'Olinde Rodrigues. — J. Pionchon : Petite enquête sur le degré d'aptitude de nos bacheliers à l'utilisation de leur savoir en mécanique. — A. Viellefond : Le nombre considéré comme un opérateur. — R. Bérard : Détermination des tangentes et des centres de courbure. — J. Lemaire : Sur le centre de courbure des coniques. — A. Decerf : Quelques questions de mécanique ou de théorie des vecteurs. — F. Brachet . Sur une modification de l'emploi du temps en seconde C et D. — J. Juhel-Renoy : Sur le second degré. — A. Viellefond : A propos du problème d'Olinde Rodrigues et des quaternions. — H. Lebesgue : Sur les angles polyèdres. — P. Montel : Sur la règle de trois. — G. Fontené : Sur la règle de trois. — Id : Concentration des donnés en géométrie. — H. Pariselle : Note sar le champ des lunettes astronomiques. — P. Lugol : A propos de la loi de la chute des ecorps. — R. Bérard . Mouvement d'une figure plane de forme invariable. — Ch. Michel : Propriétés homographiques des coniques. — R. Paucot : Quelques réflexions au sujet de l'histoire des sciences.

Revue générale des Sciences pures et appliquées. — 28me année. — N° 2. — E. Jouguet : L'œuvre scientifique de Pierre Duhem. — N° 5. — H. Pariselle : La télémétrie. — N° 7. — Ch. Guignard : Gaston Darboux. — N° 9. — A.-E.-H. Love : La recherche mathématique, — N° 10. — Melle J. Joteyko : Les méthodes belges d'Education technique. — N° 11. — G. Milhaud : La querelle de Descartes et de Fermat au sujet des tangentes. — M. P. Puiseux : Revue annuelle d'Astronomie (1916). — Nos 15-16. — G. Milhaud : Descartes et l'analyse infinitésimale.

Scientia (Revista di Scienza) Revue internationale de synthèse scientifique, Milan. — Année 1917 : Nos 1 à 8. — Ph. E. B. Jourdain : The function of symbolism in mathematical logic. — H. von Zeipel : Etoiles et molécules. — G. Loria : L'enigma dei numeri immaginari attraverso i secoli. — P. Zeeman : L'hypothèse de l'éther immobile. — J.-R. Carracido : Les fondements de la biochimie. — G. Milhaud : Descartes et Bacon. — M. Cantone : Sull'odierno indirizo degli studi fisici. — Carra de Vaux : Sur l'origine des chiffres. — F. Iniguez : Les spectres stellaires. — B. Cabrera : Les propriétés magnétiques et la structure de l'atome. — F. W. Dyson : The determination of stellar distances. — M. Betti : Il problema della trasformazione della muteria, dai tempi antichi ad oggi. — G. Loria : Lo spettro dell'immaginario in geometria. — C.-V.-L. Charlier : Conceptions monistique et dualistique de l'univers stellaire. — E. Riganano : Les diverses mentalités logiques.

Zeitschrift für Mathematik u. Physik, Organ für angewandte Mathemetik. — Tome 64, fasc. 3-4. — R. v. Mises : Graphische Statik räumlicher Kräftsysteme. — F. Willheim u. A. Leon : Ueber das elastische Gleichgewicht von zylindrischen Ringen u. die Spannungsverteilung in einem gelochten Zugstabe von endlicher Breite. — A. Ritter : Spannung in einem auf mehreren Stützen gelagerten Hohlzylinder unter der Wirkung von in der Richtung der Zylinderachse gleichmässig verteilten Belastungen. — H. Leitz : Berechnung der eingespannten rechteckigen Platte. — Fr. Schilling : Neue Methoden der Ortsbestimmung eines Fremdkörpers, insbessndere eines Geschosses, im menschlichen Körper durch Röntgenaufnahmen, ein einfaches Bespiel der Photogrammetrie.

Zeitschrift für mathem. u. naturw. Unterricht. Leipzig. — Band 47, Nos 9-12. — W. Lietzmann : Kriegslehren für den mathematischen Unterricht an höheren Knabenschulen. — H. Wieleitner : Zur Erfindung der analytischen Geometrie. — H. Scheffler : Ueber Peripheriewinkel und Zentriwinkel der Ellipse. — E. Grünholz : Aus der Praxis der physikalischen Schülerübungen. — Alois Lanner : Der didaktische Wert der Arnebergschen Kegelkonstruktionen. — W. Rollwagen : Die Voraussetzungen der zweiten Schallzone. — F. R. Scherrer : Die Struktur der Heronischen Dreiecke. — H. Beck : Die Hessesche Normalform. — Heinrich Ruff : Das Logarithmieren von Ungleichungen. — W. Brunner : Anwendung des Flächensatzes zum Nachweis der Erddrehung.

Band 48, Nos 1-5. — P. Luckey : Kriegsnomogramme. — R. Böger : Pappus-Fünfeck-Steiner. — A. Gutzmer : Die Tätigkeit des Deutschen Unterausschusses der Internationalen Mathematischen Unterrichtskommission 1908-1916. — R. Ullrich : Ueber das Gleiten und Rollen eines Körpers entlang einer schiefen Ebene. — F. Pugehl : Die Behandlung der Vierecklehre. — P. Luckey : Kriegsnomogramme. — A. Peter : Das stabile Schwimmen mathematischer Körper. — M. Koppe : Bestimmung der Südrichtung aus dem Stande der Sonne. — F. Pugehl : Die Behandlung der Vierecklehre. — A. Carl : Zur Zinseszinsformel — P. Zühlke : Eine analytisch-geometrische Lösung des Systems zweier allgemeiner quadratischer Gleichungen mit zwei Unbekannten durch eine kubische Gleichung. — K. Giebel : Das Stangenplanimeter. — Ph. Schwarz : Ueber die Beobachtung als Quelle eines Satzes der « Natürlichen Geometrie ». — O. Herrmann : Zur Lehre von der Krümmung ebener Kurven.

2. Livres nouveaux :

Emil Bucherer. — **Grundzüge der mathematischen Geographie.** — 1 vol. in-8°, 39 p.; G. Krebs, Bâle.

W. Lietzmann. — **Der Pythagorische Lehrsatz.** — 1 vol. in-16, 64 p., M. 0,80 (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, N° 3), 2e édition, B. G. Teubner. Leipzig.

W. Lietzmann und V. Trier. — **Wo steckt der Fehler?** — 1 vol. in-16, 53 p. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, N° 10), 2e édition; B. G. Teubner, Leipzig.

R. Neuendorff. — **Praktische Mathematik,** 1. Teil. — 1 vol. in-16, 106 p.; M. 1,50 (Aus Natur u. Geisteswelt), 2e édition; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Picard. — **Les Mathématiques en France depuis un demi-siècle.** — 1 broch. gr. in-8°, 24 p.; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Serret-Scheffers. — **Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung,** Ursprünglich Uebersetzung des Lehrbuches von J. A. Serret. Seit der dritten Auflage gänzlich neu bearbeitet von G. Scheffers, Sechste und siebente Auflage, Erster Band : *Differential Rechnung,* mit 70 Figuren im Text. — 1 vol. in-8°, 670 p.; M. 13; B. G. Teubner, Leipzig.

Hans Stohler. — **Mathematische Geographie und sphärische Trigonometrie.** — 1 vol. in-8°, 96 p.; Basler Druck u. Verlags-Anstalt, Bâle.

Giolio Vivanti, — **Nuovi esercizi di Analisi Infinitesimale.** Tratti dalle Matematiche Applicate. — 1 vol. in-8°, 517 p.; Mattei & Cie, Editori, Pavia.

Nomenclature des Journaux, Revues, Périodiques français paraissant en France et en langue française à l'étranger, par l'Argus de la Presse. — 1 vol. p. in-8°, 271 p. Edité par les Bureaux de l'Argus, 37, rue Bergère, Paris (IXe), 1917.

TABLE DES MATIÈRES

ARTICLES GÉNÉRAUX

Méthodologie et Notes diverses.

Pages

Deux conférences sur la Nomographie, II. Application des monogrammes à l'alignement aux différents cas de résolution des triangles sphériques (avec 4 figures). Par M. d'Ocagne (Paris) 20

Modules d'une somme. Par M. Petrovitch (Belgrade-Genève) . . . 53

Une question de Cayley relative au problème des triades de Steiner. Par S. Bays (Fribourg, Suisse) 57

Sur quelques représentations arithmétiques des fonctions analytiques. Par A. Kienast (Küsnacht-Zurich). 129

Sur certaines fonctions analytiques uniformes obtenues comme limites de fonctions multiformes. Par D. Pompéiu (Bucarest-Jassy) . . . 151

Notions d'arithmogéométrie (3me et 4me articles). Par E. Turrière (Montpellier) 159, 233

Décomposition des segments de droites en parties égales (avec 4 figures). Par Emile Dumont (Bruxelles) 218

Note sur la géométrie du triangle et du tétraèdre (avec 2 figures). Par M. Fr. Daniëls (Fribourg, Suisse) 273

Sur une généralisation du théorème de Steiner-Habich concernant les roulettes et les podaires appliquée aux orbiformes d'Euler. Par L. Braude (Bierstadt) 276

Note sur les permutations (Définitions, classifications et transformations, I). Par A. Aubry (Dijon) 280

L'équation de Fermat $a^{p-1} = pk_p(a) + 1$. Par H. E. Hansen (Copenhague) 295

Sur une transformation projective conduisant à quelques propriétés métriques. Par F. Gonseth (Zurich) 301

Sur la fonction résistance $F(v)$ de la balistique (avec 1 figure). Par G. Tiercy (Genève) 309

Organisation de l'enseignement.

Du rôle que peut jouer l'enseignement des mathématiques dans l'éducation intellectuelle des écoliers. Par H. Roorda, v. E. (Lausanne) . 68

Thèses de M. Roorda 86

Histoire et Philosophie.

Pages

Henri Poincaré, œuvres publiées par M. G. Darboux. Tome second. Par A. Buhl (Toulouse) 4
Les antinomies de Russell et de Burali-Forti et le problème fondamental de la théorie des ensembles. Par D. Mirimanoff (Genève) . 37
Remarques sur la théorie des ensembles et les antinomies cantoriennes, I. Par D. Mirimanoff (Genève) 209

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

Récréations mathématiques. Le jeu de la Ziggurat. Par Pierre Bovet (Genève) et L. G. Du Pasquier (Neuchâtel) 192
Remarques sur le problème de Jean de Palerme et de Léonard de Pise. A propos d'un article de M. E. Turrière. D'après une lettre de E. Haentzschel 199
Sur la définition géométrique de la « Fenêtre de Viviani. » Par G. Tiercy (Genève) 314
L'équation $x^2 - Ay^2 = 1$. Par A. Gérardin (Nancy) 317

CHRONIQUE

Articles divers.

Commission internationale de l'enseignement mathématique (H. Fehr). 318
Allemagne : Nominations 341
Une fondation à la mémoire de Fr. London 343
Angleterre : Nominations 341
Société mathémathique de Londres. Médaille De Morgan 202
Prix Adams 341
Autriche : Nominations et distinctions 341
Etats-Unis : Nominations 341
Société mathématique américaine 106
Association mathématique américaine. 106
France : Académie des Sciences 106, 341
Académie des Sciences ; prix décernés 319
Italie : Nominations 341
Norvège : Une fondation à la mémoire d'Abel 342
Suisse : Nominations 106, 342
Société mathématique suisse, réunion de Schuls, 8 août 1916 . . 89
Société mathématique suisse, réunion de Zurich, 30 mai 1917 . . 202
Société mathématique suisse, réunion de Zurich, 11 septembre 1917 321

Nécrologie.

A. Bentéli. 342
Général Bassot 106
Gaston Darboux (H. F.) . . 87
Henri Dufumier 106
G. Frobenius 342
F. R. Helmert 342
D. Kikuchi 342
F. London 343
E. Ott. 342
G. Veronese 343

NOTES ET DOCUMENTS

Pages

Commission internationale de l'enseignement mathématique. Liste des publications du Comité central et des Sous-commissions nationales, parues depuis le 1er avril 1914 (H. F.) 343

Commission internationale de l'enseignement mathématique. Compte rendu des travaux des sous-commissions nationales (25e article) : Suisse : Mathématiques et enseignement secondaire suisse, d'après le rapport de M. K. Brandenberger. Par G. Dumas (Lausanne) . 107

Plans d'études mathématiques de l'enseignement normal primaire en Bolivie. Par Constant Lurquin 345

Cours universitaires.

Etats-Unis 349
France 351
Italie 351
Suisse. 352

BIBLIOGRAPHIE

Annuaire pour l'an 1917, publié par le Bureau des Longitudes. . . 112

Blichfeldt (H. F.). — Finite collineation Groups. 366

Bôcher (M.). — Leçons sur les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leur développement moderne *(A Buhl)* 203

Bucherer (E.). — Grundzüge der mathematischen Geographie *(H. F.)* 366

Carslaw (H. S.). — The elements of non-euclidean plane Geometry and Trigonometry *(H. F.)* 367

Fawdry (R. C.). — Dynamics. Part. 1 *(H. F.)* 204

Föppl (A.). — Vorlesungen über technische Mechanik, 1, 5. Aufl. . . 113

Gigli (D.). — Lezioni di Aritmetica e di Algebra elementare *(Luc. Baatard)* 367

Gmeiner (voir Stolz u. Gmeiner) 367

Gonggrijp (B.). — Logarithmische en goniometrische Tafels en Bijtafels *(A. Buhl)* 112

Grialou (J.). — Cours d'hydraulique *(A. Buhl)* 114

Grossmann (Marcel). — Elemente der darstellenden Geometrie . . 368

Hadamard (J.). — Four Lectures on Mathematics *(M. Plancherel)*. . 114

Index du Répertoire bibliographique des Sciences mathématiques *(H. F.)* 365

Lecat (M.). — Bibliographie du Calcul des variations 368

Mathematische Bibliothek, herausgegeben von W. Lietzmann u. A. Witting, Nos 3, 10, 25 et 26 365

Meimke (R.). — Leitfaden zum graphischen Rechnen *(H. F.)* . . . 203

Michel (Ch.). — Cours d'Algèbre et d'Analyse *(A. Buhl)* 369

Miller (G. A.). Blichfeldt (H. F.) et Dickson (L. E.). — Theory and Applications of finite Groups *(H. F.)* 117

Montessus (R. de) de Ballore. — Leçons sur les fonctions elliptiques en vue de leurs applications *(A. Buhl.)* 205

Rey Pastor (J.). — Introducción a la Matemática superior *(H. F.)* . . 370

Pages

Rey Pastor (J.). — Teoria de la Representació conforme *(H. F.)* . . 370
(Id.). — Fundamentos de la Geometría Proyectiva superior *(H. F.)* . 370
Salmon-Fiedler-Dingeldey. — Analytische Geometrie der Kegelschnitte, I 118
Sanchez Perez (J. A.). — Compendio de Algebra de Abenbeder . . 371
Stohler (H.). — Mathematische Geographie u. sphärische Trigonometrie *(H. F.)*. 366
Stolz u. Gmeiner. — Theoretische Arithmetik, II (2e édition) . . . 372
Teixeira (F. Gomes). — Sur les problèmes célèbres de la géométrie élémentaire *(H. F.)* 118
Vallée-Poussin (Ch. de la). — Intégrales de Lebesgue. Fonctions d'ensemble. Classes de Baire *(A. Buhl)* 119
Wijdenes (P). — Logarithmen en Rentetafels *(A. Buhl)*. 113

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. *Sommaire ou annonce des principaux périodiques.*

Acta Mathematica (Mittag-Leffler, *Stockholm*) 121
American Journal of Mathematics *(Baltimore)*. 206
American mathematical Monthly *(Springfield)* 373
Annales de l'Université de Grenoble. 373
Annali di matematica pura ed applicata (Bianchi, Dini, Jung, Segre, *Milan*) 374
Annals of mathematics (Princeton University) 121, 374
Archiv der Mathematik und Physik (Lampe, W. Meyer, Jahnke, *Leipzig*) 206
Atti della R. Accademia dei Lincei *(Rome)*. 207, 374
Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matem. (G. Loria, *Turin*) 373
Bollettino di Matematica (Conti, *Rome*). 373
Bulletin de la Société mathématique de France *(Paris)* 121
Bulletin de la Société physico-mathématique de Kasan 375
Bulletin des Sciences mathématiques (Darboux, Picard, *Paris)*. . . 376
Bulletin of the American Mathematical Society *(New-York)* . 122, 207, 376
Comptes rendus de l'Académie des Sciences *(Paris)* 126, 376
Contribucion al Estudio de las Ciencas fisicas y matematicas (Universidad de la Plata). 373
Giornale di Matematiche di Battaglini *(Naples)* 373
Intermédiaire des mathématiciens) Laisant, Maillet, Maluski, Boulanger, *Paris*). 373
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (E. Lampe, *Berlin*) . 122
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (Gutzmer, *Leipzig*) 377
Journal de mathématiques élémentaires *(Paris)* 373
Journal für die reine und angewandte Mathematik (Hensel, *Berlin*) . 377
Mathematische Annalen *(Leipzig)*. 122, 378
Mathematics Teacher, The (W. H. Metzler, *Syracuse*, N. Y.) . . . 378
Nieuw Archief voor Viskunde (Kluyver, Korteweg, Schuh, *Amsterdam*) 373
Nouvelles Annales de Mathématiques (Laisant et Bricard, *Paris*) . . 122

Pages

Nyt Tiddskrift for Matematik (Heegard, *Copenhague*) 373
Periodico di Matematica (Lazzeri, *Livourne*) 373
Proceedings of the London Mathematical Society 125
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. 125, 379
Revista de la Sociedad Matemática Española *(Madrid)* 373
Revue de l'Enseignement des Sciences *(Paris)*. 123, 379
Revue de Métaphysique et de Morale (X. Léon, *Paris*) 124
Revue générale des sciences pures et appliquées *(Paris)*. . . 124, 379
Revue scientifique *(Paris)* 373
Revue semestrielle des publications mathématiques *(Amsterdam)* 365, 374
School Sciences and Mathematics (G. W. Myers, *Chicago*) 374
Scientia, Rivista di Scienza (Rignano, *Bologna*) 380
Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften *(Vienne)* . . 126
Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften *(Berlin)* 374
Wiskundige Ofgaven *(Amsterdam)* 374
Zeitschrift für das Realschulwesen (Czuber, Bechtel, Wallentin, *Vienne*). 126
Zeitschrift für Mathematik und Physik (Mehmke, Runge, *Leipzig*) . . 380
Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht Schotten, Lietzmann, *Leipzig*) 124, 380

2. *Publications non périodiques.*

Livres nouveaux 128, 208, 381

TABLE DE NOMS D'AUTEURS

Cette table comprend les auteurs d'articles généraux ou d'articles de chronique, de lettres ou notes insérées dans la correspondance ou de comptes rendus bibliographiques.
Les numéros qui suivent chaque nom renvoient aux pages du volume.

Pages

Aubry (A.) 280
Baatard (L.) 368
Bays (B.) 57
Bovet (P.) 192
Braude (L.) 276
Buhl (A.) 4, 112, 113, 114, 119, 203, 205, 370
Daniëls (M. Fr.) 273
Dumas (G.) 107
Dumont (E.) 218
Du Pasquier (L.-G.) . . . 192
Feir (H.) 87, 117, 118, 204, 319, 345, 365, 366, 367, 371
Gérardin (A.) 316
Gonseth (F.) 301
Hæntzschel (E.) 199
Hansen (H. E.) 295
Kienast (A.) 129
Lurquin (C.) 345
Mirimanoff (D.) . . . 37, 209
d'Ocagne (M.) 20
Petrovitch (M) 53
Plancherel (M) 113
Pompéiu (D.) 151
Roorda (H.) 68, 86
Tiercy (G.) 309, 314
Turrière (E.) 159, 233

L'ENSEIGNEMENT
MATHÉMATIQUE

L'ENSEIGNEMENT MATHÉMATIQUE

MÉTHODOLOGIE ET ORGANISATION DE L'ENSEIGNEMENT
PHILOSOPHIE ET HISTOIRE DES MATHÉMATIQUES
CHRONIQUE SCIENTIFIQUE — MÉLANGES — BIBLIOGRAPHIE

REVUE INTERNATIONALE

PARAISSANT TOUS LES DEUX MOIS

DIRIGÉE PAR

C.-A. LAISANT
Docteur es sciences.
ancien Examinateur d'admission à l'Ecole polytechnique de Paris.

H. FEHR
Docteur ès sciences
Professeur à l'Université de Genève.

AVEC LA COLLABORATION DE

A. BUHL
Docteur ès sciences
Professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Organe officiel de la Commission internationale de l'Enseignement mathématique.

VINGTIÈME ANNÉE

1918

PARIS
GAUTHIER-VILLARS & Cie, ÉDITEURS

GENÈVE
GEORG & Cie, ÉDITEURS

1918

GENÈVE

IMPRIMERIE ALBERT KUNDIG

L'APPROXIMATION DES FONCTIONS D'UNE VARIABLE RÉELLE[1]

PAR

C. de la Vallée Poussin
Professeur à l'Université de Louvain.

1. — Le problème de l'approximation.

L'approximation des fonctions de variables réelles a fait l'objet de recherches récentes (1898-1913). J'en ai suivi les dernières avec d'autant plus d'intérêt que j'avais contribué dans une certaine mesure à les provoquer. Je me propose de donner ici une idée sommaire de cette nouvelle théorie. J'espère qu'elle suffira pour faire saisir les problèmes les plus caractéristiques qui se posent et la nature des procédés mis en œuvre pour les résoudre. Je me guiderai dans mon exposé sur l'ordre historique des découvertes; mais je me bornerai aux fonctions d'une seule variable, faute de temps. On se gardera d'en conclure que la théorie des fonctions de plusieurs variables manque actuellement d'intérêt ou de résultats.

Je définis d'abord la question qui va nous occuper.

Il s'agit d'exprimer une fonction sous forme finie avec plus ou moins d'approximation. Mais les recherches actuelles ne portent que sur deux modes de représentation approchée : *La représentation par polynômes* et alors la représentation se fait dans un intervalle (a, b), où l'on suppose la

[1] Conférence faite à la séance de la Société mathématique suisse, tenue à Fribourg le 24 février 1918.

Les numéros dans le texte renvoient à l'index bibliographique à la fin de l'article.

fonction continue ; *la représentation trigonométrique*, auquel cas la fonction est supposée continue et périodique de période 2π, la représentation s'étend alors à toutes les valeurs réelles de x.

Cette représentation trigonométrique est donnée par une expression d'un certain ordre fini n, c'est-à-dire par une suite limitée de la forme

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \ldots + a_n \cos nx \\ + b_1 \sin x + b_2 \sin 2x + \ldots + b_n \sin nx \,, \end{aligned}$$

ou, ce qui est la même chose, par un polynôme de degré n en $\sin x$ et $\cos x$. Il y a lieu d'observer que si l'expression est paire, elle se réduit, les sinus disparaissant, à un polynôme de degré n en $\cos x$.

Soient $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b) et $P_n(x)$ un polynôme de degré n d'ailleurs quelconque. Ce polynôme doit être considéré comme une expression approchée de $f(x)$. Le maximum dans (a, b) de la différence absolue

$$|f(x) - P_n|$$

est *l'approximation* fournie par P_n. Ce polynôme est d'autant meilleur comme expression approchée qu'il fournit une approximation plus petite. Si l'on considérait une fonction périodique et sa représentation trigonométrique, l'approximation se définirait de la même manière.

Le *problème de l'approximation* consiste à former une expression de l'un ou de l'autre de ces deux types *dont l'approximation soit aussi petite qu'on le veut*. Le problème est possible dans les deux cas. Il y a là deux *théorèmes d'existence*, tous deux dus à Weierstrass (1885), et qui ont été le point de départ de la théorie qui nous occupe. Il y a lieu de nous y arrêter quelques instants.

2. — Les deux théorèmes d'existence de Weierstrass.

Weierstrass a démontré les deux théorèmes suivants (1) :

I. *Toute fonction continue dans un intervalle* (a, b) *peut*

être développée en série uniformément convergente de polynômes dans cet intervalle.

II. *Toute fonction continue de période 2π peut être développée en série uniformément convergente d'expressions trigonométriques finies.*

Il est à peine besoin de faire observer que le problème du développement en série est le même que celui de l'approximation indéfinie. Par exemple, si l'on a un développement en série uniformément convergente de polynômes

$$f(x) = P_1 + P_2 + \dots P_n + \dots ,$$

on en déduit un polynôme aussi approché qu'on le veut en sommant un nombre suffisant de termes de la série. Réciproquement, si l'on sait former un polynôme P_n aussi approché qu'on le veut, le développement en série s'obtient par la formule

$$f(x) = P_1 + (P_2 - P_1) + (P_3 - P_2) + \dots$$

Les théorèmes I et II se ramènent réciproquement l'un à l'autre. J'y insisterai dans le paragraphe suivant. Mais, depuis Weierstrass, on les a prouvés directement l'un et l'autre de bien des manières. Je vais signaler quelques-unes de ces démonstrations et faire quelques observations d'un ordre général.

La plus simple peut-être des démonstrations du théorème II est celle de M. Volterra (2) : On peut approcher autant qu'on veut d'une courbe continue à l'aide d'une ligne polygonale. Une telle ligne représente une fonction qui, n'ayant qu'un nombre limité de maxima et de minima, peut, d'après Dirichlet, être développée en série de Fourier uniformément convergente. On sommera un nombre suffisant de termes de cette série et l'on obtiendra l'approximation demandée.

Les autres démonstrations du théorème II se rattachent, comme celle-ci, à la série de Fourier. Elles utilisent l'un ou l'autre des divers procédés de sommation de cette série qui assurent la convergence, soit le procédé de sommation de Poisson comme celle que M. Picard a donnée dans son Traité

d'Analyse, soit le procédé de la moyenne arithmétique, ce qui est préférable, car ce procédé, qui est celui de M. Fèjer, donne, du premier coup, une somme trigonométrique finie. Enfin j'ai indiqué moi-même (3) en 1908 un troisième procédé qui présente le même avantage que celui-ci.

Passons au théorème I. Weierstrass le démontre par la considération de l'intégrale

$$\sqrt{\frac{n}{\pi}} \int_a^b f(t) e^{-n(t-x)^2} dt ,$$

qui, pour n assez grand, s'approche autant qu'on veut de $f(x)$ dans l'intervalle (a, b). Mais il vaut mieux, comme M. Landau l'a fait le premier (4), définir directement un polynôme approché par la formule

$$P_n(x) = \frac{k_n}{2} \int_0^1 f(t) [1 - (t - x)^2]^n dt ,$$

où l'on a posé

$$\frac{1}{k_n} = \int_0^1 (1 - t^2)^n dt .$$

Nous reviendrons plus loin sur ce polynôme P_n, que nous appellerons *polynôme de Landau*.

Ces démonstrations font appel au calcul intégral et ont une allure synthétique. On doit à M. Lebesgue une démonstration, qui ne va pas au delà du théorème de Weierstrass, mais qui est très instructive par son caractère strictement analytique. Elle réduit le problème à ses éléments irréductibles, ce qui permet de le résoudre avec un minimum de moyens. Elle a été publiée (5) en 1898, dans une courte Note, la première qui ait été écrite par l'illustre mathématicien français. Dans cette Note, intéressante à plusieurs titres, M. Lebesgue ramène la démonstration du théorème I pour une fonction continue quelconque, à la démonstration dudit théorème pour la seule fonction particulière $|x|$.

M. Lebesgue emprunte d'abord à M. Volterra la réduction

de l'approximation d'une fonction continue quelconque à celle d'une ligne polygonale. Voici maintenant comment il ramène l'approximation d'une telle ligne à celle de $|x|$.

Soient (x_1, y_1), (x_2, y_2), ... (x_n, y_n) les sommets de la ligne polygonale dont il faut représenter approximativement l'ordonnée entre les abscisses x_1 et x_n. Remarquons que la fonction

$$\varphi_k(x) = |x - x_k| + (x - x_k)$$

est nulle pour $x \leqq x_k$ et égale à $2(x - x_k)$ pour $x \geqq x_k$.

Posons

$$F(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x)$$

où a_0, a_1, ... a_{n-1} sont n constantes à déterminer. Cette fonction varie linéairement entre deux abscisses consécutives x_k et x_{k+1}. Donc, pour l'identifier à la ligne polygonale, il suffit d'amener la coïncidence des sommets. Faisons $x = x_i$, nous obtenons ainsi la condition

$$y_i = a_0 + 2 \sum_{k=1}^{i-1} a_k (x_i - x_k) .$$

Ceci constitue, pour $i = 1, 2, \ldots n$, un système récurrent, qui détermine de proche en proche a_0, a_1, ... a_{n-1}. Ainsi l'approximation de l'ordonnée $F(x)$ de la ligne polygonale est ramenée à celle de $\varphi_k(x)$ ou de $|x - x_k|$ et, en définitive, à celle de $|x|$.

3. — Réduction des deux modes d'approximation l'un à l'autre.

Les deux modes d'approximation se ramènent l'un à l'autre, l'approximation par polynômes à une approximation trigonométrique et, inversement, l'approximation trigonométrique à une approximation par polynômes.

Les deux problèmes ont été résolus dès le début, mais le problème direct, qui a pour objet de déduire l'approximation par polynômes d'une approximation trigonométrique, est le

plus simple. On en trouve déjà une solution très naturelle dans le *Traité d'Analyse* de M. E. Picard. Elle consiste à remplacer, dans le développement trigonométrique suffisamment approché, chacune des lignes trigonométriques par un polynôme suffisamment approché tiré de la formule de Taylor. Mais, malgré sa simplicité, ce procédé n'est pas le meilleur. Il en existe un autre, bien plus parfait, qui fait rentrer l'approximation par polynômes comme simple cas particulier dans l'approximation trigonométrique. Il est même étonnant que ce procédé n'ait été utilisé que si tardivement. C'est M. Bernstein qui en a montré les avantages dans son Mémoire couronné de 1912 (6).

Soit à représenter une fonction continue $f(x)$ par des polynômes dans l'intervalle $(-1, +1)$. Tout autre intervalle se ramènerait à celui-là par une substitution linéaire. Posons, avec M. Bernstein,

$$x = \cos\varphi ,$$

ce qui transforme $f(x)$ en $f(\cos\varphi)$, qui est une fonction paire et périodique de φ. Je dis que *l'approximation de* $f(x)$ *par des polynômes en* x *et celle de* $f(\cos\varphi)$ *par des expressions trigonométriques en* φ, *sont deux problèmes complètement équivalents.*

Supposons, en effet, que nous ayons, avec une certaine approximation, la représentation trigonométrique

$$f(\cos\varphi) = a_0 + a_1\cos\varphi + \ldots + a_n\cos n\varphi ;$$

et remarquons que $\cos k\varphi$ est un polynôme, $T_k(\cos\varphi)$, de degré k en $\cos\varphi$. Nous aurons, avec la même approximation, la représentation par polynômes que nous cherchons

$$f(x) = a_0 + a_1 T_1(x) + \ldots + a_n T_n(x) .$$

Les polynômes $T_1(x)$, $T_2(x)$, ... sont ce que M. Bernstein appelle des *polynômes trigonométriques*. Ils ont été considérés, bien avant lui, par le grand mathématicien russe Tchebycheff (7) (1859), qui en a signalé des propriétés de la plus haute importance pour notre objet. M. Bernstein en a tiré le plus heureux parti. En particulier, il a montré, dans

son Mémoire cité, les avantages inattendus que présente *le développement de* f(x) *en série de polynômes trigonométriques*, et il appelle ainsi la série de polynômes qui se déduit de la série de Fourier de $f(\cos\varphi)$ par la transformation précédente. C'est ainsi, entre autres, qu'il a effectué le développement de $|x|$ en série de polynômes et il a obtenu, pour cette fonction, la meilleure représentation connue jusqu'à lui.

La substitution de M. Bernstein possède, au point de vue de notre étude, un avantage sur l'importance duquel il faut insister : *elle n'altère pas les propriétés différentielles*. La fonction $x = \cos\varphi$ est continue ainsi que toutes ses dérivées, de sorte que si les dérivées d'un certain ordre de $f(x)$ sont continues par rapport à x, elles le sont encore par rapport à φ. Grâce à cette continuité, la substitution de Bernstein ne jette aucun trouble dans l'étude combinée de l'approximation et des propriétés différentielles de $f(x)$. Aussi bien, plus tard, quand nous ferons cette étude, il nous suffira de parler de l'approximation trigonométrique. Tous les résultats peuvent se traduire dans l'autre mode par la substitution précédente.

Le problème inverse ne présente pas les mêmes facilités. Il a pour objet de ramener l'approximation trigonométrique à une approximation par polynômes. Il a d'abord été traité par M. Lebesgue dans son premier Mémoire de 1898 (5). Il se résout naturellement par la substitution $u = \cos x$, inverse de celle de Bernstein, et que nous appellerons *la substitution de Lebesgue*. Mais celle-ci se heurte immédiatement à deux objections.

La première, c'est que x et, par suite, $f(x)$ ne sont pas des fonctions uniformes de $\cos x = u$; la seconde vient de la discontinuité des dérivées de $x = \arccos u$ par rapport à u aux deux limites ± 1, ce qui change les propriétés différentielles de la fonction.

M. Lebesgue a résolu la première difficulté dans son Mémoire de 1898. La seconde ne se posait pas encore à cette époque. Elle a été résolue, au moins partiellement, par M. D. Jackson dans sa dissertation inaugurale de 1911 (8). M. Jackson précise pour cela la méthode de M. Lebesgue,

mais il se borne à la considération d'un nombre limité de dérivées successives.

Je n'exposerai pas ces démonstrations telles quelles. Je vais les remplacer par deux autres, qui s'inspirent au fond des mêmes idées, mais qui me paraissent plus simples.

Voici d'abord comment je modifierais la démonstration de M. Lebesgue, en vue de tourner la première difficulté seulement.

Soit $f(x)$ une fonction continue de période 2π; les deux fonctions

$$f(x) + f(-x), \qquad [f(x) - f(-x)] \sin x,$$

sont des fonctions paires de période 2π, donc des fonctions *uniformes* de $\cos x = u$, que nous pouvons désigner par $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ et la multiplicité des valeurs de $\arccos x$ n'intervient pas. Je dis que l'approximation trigonométrique de $f(x)$ revient à l'approximation par polynômes de $\varphi(u)$, de $\psi(u)$ et de deux autres fonctions analogues.

Soient, en effet, $P_n(u)$ et $Q_n(u)$ des polynômes de degré n tels qu'on ait approximativement

$$\varphi(u) = P_n(u), \qquad \psi(u) = Q_n(u);$$

on aura, avec la même approximation,

$$[f(x) + f(-x)] \sin^2 x = P_n(\cos x) \sin^2 x,$$
$$[f(x) - f(-x)] \sin^2 x = Q_n(\cos x) \sin x,$$

d'où la relation approchée

$$2f(x) \sin^2 x = P_n(\cos x) \sin^2 x + Q_n(\cos x) \sin x. \qquad (1)$$

Remplaçons, dans le calcul précédent, la fonction $f(x)$ par la fonction $f\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$; il viendra approximativement, $R_n(u)$ et $S_n(u)$ étant de nouveaux polynômes,

$$2f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \sin^2 x = R_n(\cos x) \sin^2 x + S_n(\cos x) \sin x$$

et, en changeant x en $x - \frac{\pi}{2}$,

$$2f(x) \cos^2 x = R_n(\sin x) \cos^2 x - S_n(\sin x) \cos x. \qquad (2)$$

Il suffit d'ajouter membre à membre les deux relations approchées (1) et (2) et l'on obtient l'expression trigonométrique approchée de $f(x)$.

Il n'est pas difficile de modifier cette démonstration de manière à écarter la seconde difficulté, dans la mesure même où elle a été surmontée par M. D. Jackson. Voici la manière de procéder :

Supposons que $f(x)$ et ses dérivées soient continues jusqu'à l'ordre r. Il s'agit de ramener l'approximation trigonométrique de $f(x)$ à l'approximation par polynômes de certaines fonctions de u ayant des dérivées en u continues jusqu'à l'ordre r. Toute la difficulté provient de la présence de $\sin x$ qui s'annule au dénominateur de la formule de dérivation :

$$\frac{d}{du} = \frac{d}{d\cos x} = -\frac{1}{\sin x}\frac{d}{dx} .$$

Il suffit, pour la faire disparaître, d'introduire $\sin^r x$ en facteur dans la définition des fonctions $\varphi(u)$ et $\psi(u)$ qui précèdent. Cela permet, en effet, de faire disparaître, comme facteur commun aux deux termes de la fraction, cette expression $\sin x$ qui provoque la difficulté.

Posons donc

$$\varphi(u) = [f(x) + (-1)^r f(-x)] \sin^r x ,$$

$$\psi(u) = [f(x) - (-1)^r f(-x)] \sin^{r+1} x .$$

Soient $P_n(u)$ et $Q_n(u)$ des polynômes approchés de $\varphi(u)$ et de $\psi(u)$; on aura, comme dans le cas précédent,

$$2f(x) \sin^{r+1} x = P_n(\cos x) \sin x + Q_n(\cos x) ;$$

ensuite, toujours comme précédemment,

$$2f(x) \cos^{r+1} x = R_n(\sin x) \cos x + S_n(\sin x) .$$

Or on peut toujours déterminer deux polynômes A et B en $\sin x$ et $\cos x$ vérifiant l'identité

$$A \sin^{r+1} x + B \cos^{r+1} x = 1 .$$

On ajoute les deux relations précédentes multipliées res-

pectivement par A et B, on obtient la représentation trigonométrique cherchée.

Ce procédé ne résout pas la difficulté, si l'on considère des fonctions indéfiniment dérivables. Cela fait, entre les deux problèmes inverses que nous venons de traiter, une différence qui reste profonde. La solution du premier est plus radicale que celle du second.

4. — Dérivabilité de la représentation. Ordre de l'approximation.

Ces deux questions sont liées par d'étroites relations, qui n'ont été éclaircies que récemment et que nous approfondirons dans un autre paragraphe (6). Cependant, sans que leur dépendance ait été aperçue dès le début, elles ont été traitées dans les mêmes Mémoires et, plus tard, on en a fait l'étude combinée. Il est impossible de les séparer.

Nous allons donc les étudier ensemble, mais en nous bornant pour le moment à la seule approximation par polynômes.

La question de représenter $f(x)$ par une série dérivable de polynômes a été posée par M. Painlevé dès 1898. M. Painlevé a montré que si la fonction $f(x)$ a des dérivées continues, elle est exprimable en série uniformément convergente de polynômes, telle que les séries dérivées convergent aussi uniformément vers les dérivées de $f(x)$. M. E. Borel est revenu sur cette question dans sa Thèse et dans ses *Leçons* de 1905 sur les fonctions de variables réelles.

La question de l'ordre de l'approximation est plus récente. Elle a été posée en 1908 par M. Lebesgue (10), à l'occasion du polynôme de Landau,

$$P_n = \frac{k_n}{2} \int_0^1 f(t)\,[1 - (t - x)^2]^n\,dt\,,$$

qui, pour n infini, converge uniformément vers $f(x)$ dans tout intervalle (a, b) intérieur à $(0, 1)$.

Le maximum de $|f - P_n|$, ou l'approximation ρ_n, tend vers 0 avec $\frac{1}{n}$, mais *quel est l'ordre de grandeur de* ρ_n?

Telle est la question de l'ordre de l'approximation que M. Lebesgue s'est posée, mais n'a traitée que très sommairement dans ce premier article.

Je m'étais posé la même question, avant la publication de la Note de M. Lebesgue, et mes résultats ont paru, peu après, dans un Mémoire étendu (3) de l'Académie royale de Belgique (1908). Les deux questions, dérivabilité et ordre de l'approximation, reçoivent ici des solutions plus précises que dans les travaux précédents. Je prouve, en particulier, que le problème de la dérivabilité est entièrement résolu par le polynôme de Landau. En effet, *une dérivée d'ordre quelconque de* P_n *converge vers la dérivée du même ordre de* f(x) *au point* x, *sous la seule condition que cette dérivée existe en ce point.* C'est là la supériorité du polynôme de Landau : *La continuité de la dérivée n'est pas requise.* Les autres procédés que nous allons étudier seront, sans doute, beaucoup plus parfaits au point de vue de l'approximation, mais ils perdent cet avantage : les conditions de leur dérivabilité exigent la continuité.

C'est encore dans mon Mémoire cité de 1908 que se trouvent les premiers résultats définitifs sur l'ordre de l'approximation. Je prouve que *si la fonction* f(x) *est lipschitzienne, l'approximation obtenue par le polynôme de Landau est de l'ordre de* $\frac{1}{\sqrt{n}}$ *au plus.*

Cette approximation n'est pas la meilleure qu'on puisse obtenir dans cette hypothèse générale. M. Lebesgue, en 1910 (11), a obtenu l'ordre $\frac{\log n}{n}$ et enfin, en 1911, M. D. Jackson (8) a obtenu l'ordre $\frac{1}{n}$, qui ne peut plus être abaissé. Je vais y revenir. Cependant j'ai donné moi-même le premier exemple d'une meilleure approximation dans un autre Mémoire (12), présenté à l'Académie royale de Belgique la même année 1908 et publié le mois suivant. Prenant cette fois mon point de départ dans l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_a^b f(t)\frac{\sin n(t-x)}{t-x}\,dt\ ,$$

qui jouit de propriétés analogues à celles de Dirichlet, j'ai montré que *toute fonction dont la dérivée est à variation bornée peut être représentée par un polynôme de degré* n *avec une approximation de l'ordre de* $\frac{1}{n}$. C'était, je pense, le premier exemple d'un ordre qui ne peut plus être abaissé.

Toutefois, comme je viens de le dire, on peut assigner une approximation du même ordre dans l'hypothèse, bien plus générale, où la fonction $f(x)$ est lipschitzienne. Mais ceci n'a été démontré que trois ans plus tard et c'est un cas particulier d'un théorème plus général que M. D. Jackson (8) a énoncé dans sa dissertation inaugurale de 1911. M. D. Jackson consacre un chapitre entier de cette dissertation à l'approximation simultanée de $f(x)$ et de ses $k-1$ premières dérivées dans l'hypothèse où la dernière est lipschitzienne. Il raisonne pour cela sur une combinaison ingénieuse d'intégrales absolument convergentes du type

$$\int f(x+\lambda t)\left(\frac{\sin nt}{t}\right)^k dt\ ,$$

où λ et k sont des entiers, ce dernier suffisamment grand. Il construit un polynôme qui fournit une approximation de l'ordre de $\frac{1}{n^k}$ et dont la dérivée d'ordre $r \overline{\overline{<}} k$ fournit, pour $f^{(r)}(x)$, une approximation de l'ordre de $\frac{1}{n^{k-r}}$. En particulier, on obtient le résultat énoncé plus haut si $k=1$: l'approximation de $f(x)$ lipschitzienne est de l'ordre de $\frac{1}{n}$.

Ces théorèmes de M. D. Jackson sont définitifs, mais pour les fonctions seulement qui n'admettent qu'un nombre limité de dérivées successives. Ils n'ont plus rien de commun avec la meilleure approximation quand toutes les dérivées existent.

Si la fonction $f(x)$ est indéfiniment dérivable, la méthode du développement en *série de polynômes trigonométriques*, que M. Bernstein (6) a utilisée dans son Mémoire couronné (1912), est plus simple et bien préférable. Ce développement qui, comme nous l'avons vu, se déduit de celui de $f(\cos\varphi)$ en série de Fourier, donne la meilleure solution connue de

la représentation indéfiniment dérivable. Dans cette hypothèse, l'approximation de chaque dérivée est indéfiniment petite d'ordre supérieur à toute puissance de $\frac{1}{n}$. Réciproquement, l'existence d'un tel degré d'approximation assure celle de toutes les dérivées. Nous en reparlerons plus loin.

5. — Approximation minimum.

Soit $f(x)$ une fonction continue dans un intervalle (a, b). Parmi les polynômes de degré donné n, il en existe un, P_n, qui donne la meilleure approximation, tel donc que l'approximation soit minimum. Nous appellerons cette meilleure approximation *approximation minimum*, et le polynôme qui la donne est le *polynôme d'approximation* (ou d'approximation minimum).

La considération de ce polynôme remonte à une époque déjà ancienne, elle est due à Tchebycheff (7) (1859). Le grand géomètre russe a consacré une partie importante de son œuvre à l'étude de l'approximation par des fonctions rationnelles (entières ou fractionnaires). Mais l'importance des découvertes de Tchebycheff pour notre objet actuel n'est apparue qu'après le Mémoire de M. S. Bernstein (1912). Tant pour la valeur des matériaux réunis que par le mérite de l'invention, la place qui revient à Tchebycheff dans la théorie qui nous occupe est encore la première.

Tchebycheff, comme cela était naturel de son temps, admettait sans démonstration l'existence du polynôme d'approximation minimum. Cette démonstration a été donnée par M. Borel dans ses *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les séries de polynômes* (1905) (13). M. Borel a montré que le polynôme d'approximation minimum dans un intervalle (a, b) est unique et qu'il est caractérisé par la propriété suivante : la différence $f(x) - P_n$ acquiert sa valeur absolue minimum avec des signes alternés en $n + 2$ points consécutifs de l'intervalle (a, b). Ce maximum absolu est l'*approximation minimum* ρ_n. Il suit de cette propriété que le polynôme d'approximation est un *polynôme de Lagrange*

qui coïncide avec $f(x)$ en $n+1$ points (au moins) de l'intervalle (a, b). J'ai donné en 1910 (14) à ces points de coïncidence le nom de *nœuds* et le polynôme de Lagrange est défini par ses nœuds.

Le calcul exact du polynôme d'approximation minimum n'est possible que dans des cas très exceptionnels. Mais il existe divers procédés de calcul qui permettent d'en approcher autant qu'on veut. Ces procédés sont dus à M. Borel (13), à moi-même (14) et à M. Bernstein (6). Ces procédés reviennent tous à former successivement des polynômes de Lagrange de plus en plus avantageux en améliorant progressivement le choix des nœuds.

Dans l'état actuel de la théorie, c'est l'approximation minimun qu'il importe surtout de connaître plutôt que le polynôme d'approximation lui-même. Faute d'un calcul exact, il convient donc d'avoir des règles précises pour enfermer l'approximation minimum entre des limites suffisamment resserrées. Ce sont ces règles qui méritent de fixer maintenant notre attention.

La détermination d'une borne supérieure est chose immédiate. Tout polynôme donné Q_n de degré n en fournit une, à savoir le maximum de $|f - Q_n|$.

La détermination d'une borne inférieure demande un peu plus de réflexion. Mais j'ai donné dans mon Mémoire de 1910 (14) une règle, qui m'a paru intéressante, en vertu de laquelle un polynôme de Lagrange de degré n fournit généralement une telle borne.

Voici d'abord cette règle :

Soit Q_n *un polynôme de degré* n ; *si la différence* $f(x) - Q_n$ *prend, en* $n+2$ *points consécutifs et avec des signes alternés, des valeurs absolues* $\geqq \rho$, *alors* ρ *est une borne inférieure de l'approximation minimum.*

En particulier, si Q_n est un polynôme de Lagrange à $n+1$ nœuds, ces $n+1$ nœuds partagent (a, b) en $n+2$ intervalles, où $f - Q_n$ est (sauf exception) de signe alterné. Dans chaque intervalle, $f - Q_n$ passe par un maximum absolu et le plus petit ρ de ces maxima absolus est une borne inférieure de l'approximation minimum.

La démonstration de notre règle est presque immédiate. Soit P_n le polynôme d'approximation et ρ_n l'approximation minimum ; si l'on avait $\rho_n < \rho$, le polynôme de degré n,

$$P_n - Q_n = (f - Q_n) - (f - P_n),$$

changerait de signe $n + 2$ fois au moins dans l'intervalle (a, b) et aurait, par conséquent, $n + 1$ racines au moins, ce qui est impossible.

M. Bernstein a généralisé notre théorème dans son Mémoire couronné de 1912 (6). Il l'a étendu au cas où les polynômes sont formés avec des puissances de x dont les exposants font partie d'une suite de nombres positifs (entiers ou non) qui sont assignés d'avance. Il s'est servi de ce théorème généralisé pour trouver une borne inférieure de la meilleure approximation de $|x|$.

La règle précédente présente le grand avantage d'avoir une efficacité illimitée. En effet, en essayant de nouveaux polynômes Q_n, on peut, théoriquement du moins, approcher autant qu'on veut de la valeur exacte de l'approximation. Il existe d'autres règles qui ont un caractère plus particulier et qui épuisent leur efficacité dès la première application, mais qui n'en sont pas moins très utiles, parce qu'elles sont dans bien des cas d'une application plus facile que la précédente. Je vais en signaler deux, qui s'appliquent directement à l'approximation trigonométrique et indirectement aux polynômes, grâce à la substitution de Bernstein. Il est à peine besoin de dire que les considérations précédentes sur la meilleure approximation par polynômes s'étendent *mutatis mutandis* à la meilleure approximation trigonométrique.

Considérons, avec M. Bernstein (1912), le développement de $f(x)$ en série de polynômes trigonométriques ou, ce qui est exactement la même chose, le développement de $f(\cos\varphi)$ en série de Fourier

$$f(\cos\varphi) = a_0 + a_1 \cos\varphi + a_2 \cos 2\varphi + \ldots$$

Soit S_n la somme des $n + 1$ premiers termes, on sait que

les valeurs $a_0, a_1, \ldots a_n$ des constantes de Fourier sont celles qui miniment l'intégrale

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(\cos\varphi) - S_n]^2 d\varphi \ .$$

Soit donc T_n la suite trigonométrique d'ordre n qui donne l'approximation minimum, on aura

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[f(\cos\varphi) - S_n]^2 d\varphi \leqq \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f - T_n)^2 d\varphi \leqq 2\rho_n^2 \ ,$$

en vertu du théorème de la moyenne (ρ_n étant la valeur maximum absolue de $f - T_n$). Mais la première intégrale a pour valeur

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[a_{n+1}\cos(n+1)\varphi + a_{n+2}\cos(n+2)\varphi + \ldots]^2 d\varphi$$
$$= a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \ldots \ .$$

De là, la règle de M. Bernstein :

Si l'on désigne par $a_0, a_1, a_2, \ldots$ *les constantes de Fourier de* $f(\cos\varphi)$ *la meilleure approximation* ρ_n *de* $f(x)$ *dans l'intervalle* $(-1, +1)$ *satisfait à la condition*[1]

$$\rho_n \geqq \sqrt{\frac{1}{2}(a_{n+1}^2 + a_{n+2}^2 + \ldots)} \ .$$

Il est clair d'ailleurs que l'on a, d'autre part,

$$\rho_n \leqq |a_{n+1}| + |a_{n+2}| + \ldots \ .$$

puisque cette approximation est donnée par la série de polynômes trigonométriques.

La seconde règle, qui est plus importante et qui est antérieure (1910), a été donnée par M. Lebesgue dans son Mémoire *Sur les intégrales singulières* (15). Voici la règle de M. Lebesgue :

---

[1] Nous avons ajouté sous le radical le facteur $\frac{1}{2}$ qui manque dans le texte de M. Bernstein.

Si la somme d'ordre n *de la série de Fourier de la fonction périodique* f(x) *donne une approximation* $\varphi(n)$, *l'approximation trigonométrique minimum* ρ_n *satisfait à la condition*

$$\rho_n > k \frac{\varphi(n)}{\log n},$$

où k *est une constante numérique assignable a priori.*

La démonstration repose sur les propriétés de l'intégrale de Dirichlet, mais, si simple qu'elle soit, elle ne peut trouver place ici.

Si l'on applique, par exemple, les deux règles précédentes à la fonction $|x|$, la règle de M. Bernstein prouve que ρ_n n'est pas d'ordre supérieur à $\frac{1}{n\sqrt{n}}$ et celle de M. Lebesgue que ρ_n n'est pas d'ordre supérieur a $\frac{1}{n \log n}$. Dans ce cas, c'est la règle de Lebesgue qui l'emporte, mais il n'en est pas toujours ainsi.

6. — Relations entre l'ordre de grandeur de la meilleure approximation et les propriétés différentielles.

La meilleure approximation ρ_n d'une fonction continue $f(x)$ par un polynôme de degré n tend vers zéro quand n tend vers l'infini. C'est le théorème même de Weierstrass. J'ai posé en 1908 (12) la question de déterminer l'ordre de grandeur de ρ_n pour n infini et M. Bernstein a posé en 1912 (6) celle d'en déterminer la valeur asymptotique quand elle existe.

Aujourd'hui des résultats définitifs sont acquis et répondent à ces deux questions. Ils sont dus à M. Dunham Jackson (1911) et surtout à M. Bernstein (1912).

Un premier résultat essentiel est qu'il existe une dépendance étroite entre l'ordre de la meilleure approximation et l'existence des dérivées jusqu'à un ordre plus ou moins élevé.

L'existence d'une dérivée bornée d'un certain ordre assure une approximation d'un ordre correspondant et c'est M. Dunham Jackson (8) qui a trouvé les théorèmes les plus précis

sous ce rapport. Nous les avons exposés dans un article antérieur. Mais M. Jackson n'énonce aucun théorème réciproque et l'on ne sait pas si ces énoncés s'appliquent à l'approximation minimum. Seul M. Bernstein (6) est arrivé à des résultats positifs en ce sens et a su remonter de l'ordre de l'approximation obtenue aux propriétés différentielles de la fonction.

M. Bernstein n'y a d'ailleurs réussi qu'en s'inspirant des travaux de Tchebycheff et nous allons exposer de quelle manière. Nous donnerons d'ailleurs une idée suffisante de la question en nous bornant à l'approximation trigonométrique et en simplifiant un peu les données du problème.

Faire l'approximation trigonométrique de $f(x)$ revient à effectuer un développement en série

$$f(x) = P_1 + P_2 + \dots P_n + \dots$$

dont les termes sont des expressions trigonométriques d'ordres croissants et nous supposons, pour simplifier, P_n d'ordre n. Admettons que les termes de cette série soient, en valeur absolue, inférieurs à ceux de la série positive convergente

$$\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_n + \dots$$

La rapidité de l'approximation correspond à la convergence plus ou moins rapide de la série. D'autre part, l'existence des dérivées de $f(x)$ découle de la possibilité de dériver la série. Or cette dérivation est légitime tant que les séries dérivées sont absolument et uniformément convergentes. Tout revient donc à avoir une règle pour conclure de l'ordre de grandeur de P_n à l'ordre de grandeur de ses dérivées. C'est cette règle que M. Bernstein a trouvée, en complétant certaines recherches de Tchebycheff, et cette règle est d'une simplicité et d'une précision inattendues. La voici :

Si une expression trigonométrique d'ordre n *est de module* $< L$ *et que l'expression soit formée de sinus seuls ou de cosinus seuls, ses dérivées successives d'ordres* 1, 2, 3, ... *sont respectivement de modules* $< nL$, $< n^2L$, $< n^3L$, ... *Il suffit de doubler ces bornes si l'expression trigonométrique est de la forme générale.*

On voit d'après cela que, si la décroissance des quantités ε_n est suffisamment rapide pour assurer la convergence de la série

$$1^p \varepsilon_1 + 2^p \varepsilon_2 + \ldots n^p \varepsilon_n + \ldots ,$$

elle assure aussi l'existence de la dérivée d'ordre p de $f(x)$. Tel est réduit à ce qu'il a de plus essentiel le raisonnement de M. Bernstein.

Pour mettre en lumière la netteté des conclusions auxquelles conduisent les méthodes de M. Bernstein, donnons d'abord, avec cet habile géomètre, la définition suivante :

Nous dirons qu'une fonction continue $\varphi(x)$ vérifie une *condition de Lipschitz d'ordre* $\alpha (0 < \alpha \leqq 1)$, s'il existe une constante M telle qu'on ait, quel que soit δ positif,

$$|\varphi(x+\delta) - \varphi(x)| < M\delta^\alpha .$$

Considérons maintenant une fonction $f(x)$ de période 2π et son approximation trigonométrique d'ordre n. Nous avons le théorème suivant :

Si f(x) *admet une dérivée continue d'ordre* p, *laquelle satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre* $\alpha (0 < \alpha < 1)$, *alors on peut assigner une constante* M_1 *telle que l'approximation trigonométrique minimum*, ρ_n, *satisfasse, quel que soit* n, *à la condition*

$$\rho_n < \frac{M_1}{n^{p+\alpha}} .$$

Réciproquement, si ρ_n *satisfait à une condition de cette forme où* $0 < \alpha < 1$ (*limites exclues*), *la fonction* f(x) *admet une dérivée d'ordre* p *qui satisfait à une condition de Lipschitz d'ordre* α.

A vrai dire, ce théorème est énoncé ici pour la première fois sous cette forme stricte, et nous en publierons ailleurs la démonstration, mais il est dû, dans sa grande partie, à M. Bernstein. Ainsi que M. Bernstein l'a déjà remarqué, l'exclusion du cas limite $\alpha = 1$ est essentielle et ne tient pas à une imperfection de l'énoncé.

Si toutes les dérivées existent, le théorème perd de la pré-

cision qui en fait le principal intérêt. Il prouve que l'approximation décroît plus vite que toute puissance négative de n, mais il n'en fixe plus l'ordre. Il y a donc lieu de faire alors de nouvelles hypothèses sur la nature de la fonction. La première qui se présente à l'esprit est celle d'*analycité*.

7. — Relations entre l'ordre de grandeur de la meilleure approximation et les propriétés analytiques.

Lorsque la fonction $f(x)$ est analytique et holomorphe sur l'axe réel et qu'il s'agit de sa représentation approchée sur cet axe seulement, l'ordre de la meilleure approximation est liée aux propriétés analytiques de la fonction et dépend avant tout de la situation de ses points critiques s'il en existe. C'est encore M. Bernstein qui a étudié le premier cette dépendance dans son Mémoire couronné par l'Académie de Belgique (1912). Mais il est revenu sur la question et il a publié des résultats isolés, mais d'une singulière précision et du plus grand intérêt, dans un second Mémoire présenté, peu après, à la même Académie (1913) (16).

M. Bernstein s'est occupé de l'approximation par polynômes. Mais ses résultats prennent une forme plus simple si on les traduit dans le mode de représentation trigonométrique, par la substitution habituelle $x = \cos u$. Les parallèles à l'axe réel du plan u jouent un rôle prépondérant dans l'approximation trigonométrique ; il y a lieu d'observer que la substitution $x = \cos u$ leur fait correspondre des ellipses homofocales, de foyers ± 1, dans le plan x. Ce sont ces ellipses qui jouent le rôle prépondérant dans l'approximation par polynômes et, par suite, dans les énoncés de M. Bernstein. Mais nous n'en parlerons pas ; il nous suffira d'énoncer les résultats essentiels de la théorie dans la seule hypothèse de la représentation trigonométrique.

Soit donc à étudier la meilleure approximation trigonométrique de la fonction $\varphi(u)$ de période 2π sur l'axe réel. Cette fonction est analytique et holomorphe sur cet axe. Supposons d'abord qu'elle admette un ou plusieurs points critiques

imaginaires. Alors, en première analyse, la meilleure approximation dépend de la distance de l'axe réel au point critique le plus rapproché.

On peut, en effet, formuler le théorème suivant, dont la première partie est due à M. Bernstein, mais que je complète par l'énoncé d'une seconde partie dont la démonstration n'a pas encore été publiée.

Si une fonction $\varphi(u)$ *de période* 2π *est holomorphe sur l'axe réel et possède son point critique le plus rapproché de cet axe sur l'une des deux droites* $y = \pm b$ $(b > 0)$, *on suppose* $u = x + yi$, *alors, quelque petit que soit* ε *positif, la meilleure approximation trigonométrique,* ρ_n, *de* $\varphi(u)$ *sur l'axe réel vérifiera constamment l'inégalité*

$$\rho_n < e^{-n(b-\varepsilon)},$$

à partir d'une valeur suffisamment grande de n, *tandis qu'elle ne vérifiera jamais définitivement l'inégalité*

$$\rho_n < e^{-n(b+\varepsilon)}$$

quelque grand que soit n.

La connaissance de l'ordre de la meilleure approximation se précise davantage si l'on suppose que $\varphi(u)$ n'ait d'autres points critiques que des pôles sur les deux droites $y = \pm b$ du théorème précédent. Je suis, en effet, en mesure de démontrer le théorème suivant, mais qui, je le pense, pourrait être beaucoup précisé :

Si la fonction $\varphi(u)$ *de* $u = x + yi$ *a ses points critiques les plus rapprochés de l'axe réel sur les droites* $y = \pm b$ $(b > 0)$ *et que le point critique de l'ordre le plus élevé parmi ceux-ci soit un pôle d'ordre* k, *alors on aura constamment, à partir d'une valeur suffisamment grande de* n

$$\rho_n < n^{k+\frac{1}{2}+\varepsilon} e^{-nb},$$

tandis que l'on n'a jamais définitivement

$$\rho_n < n^{k-1-\varepsilon} e^{-nb}.$$

Mais en particularisant beaucoup plus la nature du point critique, on peut aller beaucoup plus loin et déterminer la valeur asymptotique même de ρ_n. C'est ce qui a été fait par M. Bernstein dans son dernier Mémoire de 1913 et le point de départ de cet habile mathématicien se trouve encore une fois dans les travaux de Tchebycheff.

En effet, en utilisant une formule de l'illustre mathématicien russe, M. Bernstein a réussi à former le polynôme d'approximation d'ordre n de

$$\frac{1}{x-a}$$

dans l'intervalle $(-1, +1)$, a étant réel et > 1.

Par conséquent, il a obtenu en même temps la valeur exacte de l'approximation minimum. C'est là un résultat extrêmement important malgré son caractère particulier. Mais nous allons traduire ce résultat dans le mode de représentation trigonométrique, pour le rapprocher des précédents. On va voir qu'il prend alors une forme singulièrement instructive, bien plus simple et plus élégante que sous la forme considérée par M. Bernstein.

Par la transformation de Bernstein et en posant $a = \operatorname{Ch} b$ où b est réel et positif, la fraction $1 : (x - a)$ se transforme, à un facteur constant près, dans l'expression trigonométrique

$$\frac{\operatorname{Sh} b}{\cos u - \operatorname{Ch} b}$$

qui, aux multiples près de la période, n'a qu'un seul pôle $u = bi$ sur chacune des droites $y = \pm b$, pôle dont le résidu a pour module l'unité. La meilleure approximation trigonométrique de cette fonction sur l'axe réel se réduit alors à la valeur, exacte et toute simple,

$$\rho_n = e^{-nb} .$$

Plus généralement, soit $\varphi(u)$ une fonction paire et de période 2π. Supposons que ses points critiques les plus voisins de l'axe réel soient sur les droites $y = \pm b$. Admettons encore qu'aux multiples près de la période, ces points cri-

tiques se réduisent sur chacune de ces droites, au seul pôle simple $u = \pm bi$, avec un résidu de module α. Alors, par comparaison avec le résultat précédent, on obtient immédiatement la *valeur asymptotique* de la meilleure approximation trigonométrique de $\varphi(u)$. Ce sera nécessairement

$$\rho_n \sim \alpha e^{-bn} .$$

Si au lieu de cela, le pôle était d'ordre k, les autres conditions restant les mêmes, on aurait la formule asymptotique

$$\rho_n \sim \mu n^{k-1} e^{-nb} ,$$

où μ est une constante qui ne dépend que de la fonction.

Voilà assurément des indications bien précieuses sur la manière dont il faut essayer de préciser les résultats plus vagues obtenus tout à l'heure dans des hypothèses plus générales.

Pour terminer, je dirai encore un mot du cas où la fonction à représenter est holomorphe dans tout le plan. Ce cas ne paraît pas avoir été étudié jusqu'ici. Mais, dans cette nouvelle hypothèse, la question de la meilleure approximation présente une analogie plus étroite avec celle de la convergence de la formule de Taylor. C'est le mode de croissance de la fonction qui devient le facteur principal dont dépend la meilleure approximation. Je vais me borner encore à la représentation trigonométrique. Les conclusions principales auxquelles je suis parvenu peuvent alors se formuler dans le théorème suivant :

Soit $f(z)$ *une fonction holomorphe de* $z = x + yi$ *et de période* 2π. *Soit ensuite* $\varphi(y)$ *la plus petite fonction non décroissante de* y *positif qui satisfait, quel que soit* y, *à la condition*

$$|f(x \pm yi)| \overline{\overline{<}} e^{y\varphi(y)} ;$$

soit $\psi(n)$ *la fonction inverse de* φ, *c'est-à-dire la plus petite solution de* $\varphi(y) = n$. *Alors, quelque petit que soit* ε *positif, la meilleure approximation trigonométrique de* $f(x)$ *sur l'axe réel satisfait à la condition*

$$\rho_n < e^{-(1-\varepsilon)n\psi(n^{1-\varepsilon})}$$

à partir d'une valeur suffisamment grande de n, *tandis qu'elle ne satisfait jamais définitivement à la condition*

$$\varrho_n < e^{-(1+\varepsilon)n\psi(n)} .$$

Dans cette trop longue analyse, je n'ai fait qu'effleurer les sujets que j'ai traités, j'en ai passé beaucoup d'autres sous silence. Je n'ai rien voulu de plus que ramener l'attention sur une question que les événements actuels ont fait oublier, mais qui paraissait pleine de promesses. Elle ouvre encore de nombreuses voies qui ne paraissent pas trop difficiles à explorer. Je souhaite que de jeunes mathématiciens s'y engagent et y fassent une ample moisson de découvertes.

INDEX BIBLIOGRAPHIQUE *(articles cités).*

1. Weierstrass. *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen.* Sitzungsberichte der Kgl. Preuss. Akad. der Wiss. 1885. p. 633-639, 789-805. *Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen reeller Argumente.* Werke, Bd. III (1903), p. 1-37.

Runge a démontré le premier théorème presque en même temps que Weierstrass. *Ueber die Darstellung willkürlicher Functionen.* Acta Mathematica, t. VII, 1885, p. 387-392; *Zur Theorie der eindeutigen analytischen Functionen.* Acta Mathematica, t. VI, 1885, p. 229-244.

2. Volterra. *Sul principio di Dirichlet.* Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. XI.

3. de la Vallée Poussin. *Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs dérivées par des polynômes et des suites limitées de Fourier.* Bull. de l'Acad. royale de Belgique (classe des sciences), n° 3 (mars) 1908.

4. Landau. *Ueber die Approximation einer stetigen Function durch eine ganze rationale Function.* Rendiconti del circolo matematico di Palermo, t. XXV, 1908.

5. H. Lebesgue. *Sur l'approximation des fonctions.* Bulletin des sciences math. 2me série, t. XXII; novembre 1898.

6. S. Bernstein. *Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné.* Mémoires publiés par la classe des sciences de l'Académie royale de Belgique. Collection in-4°, 2me série, t. IV, 1912. Ce Mémoire présenté

en réponse à une question de concours posée par la classe, sur ma proposition, en 1910, a été couronné dans la séance du 15 décembre 1911.

7. Tchebycheff. *Sur les questions de minima qui se rattachent à la représentation approximative des fonctions.* Mémoires de l'Acad. impériale des sciences de St-Pétersbourg, sciences math. et phys. sér. 6, t. VII, 1859. Œuvres, t. I.

8. Dunham Jackson. *Ueber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Functionen durch ganze rationale Functionen gegebenen Grades und trigonometrische Summen gegebener Ordnung.* Inaugural-Dissertation. Göttingen, 1911. Ce mémoire a été couronné par la Faculté des sciences de Göttingue, à laquelle il était présenté en réponse à une question de concours. La Faculté demandait, en particulier, de trouver la meilleure approximation d'une ligne polygonale, question que j'avais formulée dans le Mémoire (12 ci-dessous. (Note de la p. 403).

9. Painlevé. Comptes rendus de l'Ac. des sciences de Paris, 7 fév. 1898.

10. H. Lebesgue. *Sur la représentation approchée des fonctions.* Rend. del Circolo matematico di Palermo, t. XXVII, 1908, p. 325-328.

11. H. Lebesgue. *Sur la représentation trigonométrique approchée des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz.* Bull. de la Soc. Math. de France, t. XXXVIII, 1910.

12. de la Vallée Poussin. *Sur la convergence des formules d'interpolation entre ordonnées équidistantes.* Bulletins de l'Académie royale de Belgique (classe des sciences), n° 4 (avril), 1908. Le Mémoire se termine par une *Note sur l'approximation par un polynôme d'une fonction dont la dérivée est à variation bornée.*

13. E. Borel. *Leçons sur les fonctions de variables réelles et les développements en séries de polynômes.* Paris, 1905.

14. de la Vallée Poussin. *Sur les polynômes d'approximation et la représentation approchée d'un angle.* Bull. de l'Académie royale de Belgique (classe des sciences), n° 12 (décembre), 1910.

15. H. Lebesgue. *Sur les intégrales singulières.* Annales de la Faculté de Toulouse, sér. 3, t. I, 1910.

16. S. Bernstein. *Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques admettant des singularités données.* Bull. de l'Académie royale de Belgique (classe des sciences), n° 2 (février), 1913. — Cf. Comptes rendus, 26 nov. 1912.

DEUX RÉCENTS OUVRAGES DE GÉOMÉTRIE

PAR

A. Buhl (Toulouse).

C'est uniquement à propos de deux récents Ouvrages, dus, l'un à Gaston Darboux[1], l'autre à M. Maurice d'Ocagne[2], que ces quelques pages sont écrites. Il ne s'agit pas de faire, de manière originale, une nouvelle apologie des vues générales que des savants français ont eues sur la Géométrie proprement dite, mais il semble excellent de signaler avec quelle facilité chacun pourra s'y initier ou se les remémorer rien qu'en prenant pour guides les deux Ouvrages en question.

Susceptibles d'être éloquemment rapprochés quant à la manière dont ils peuvent se compléter l'un l'autre, une coïncidence fortuite les a fait paraître la même année, en 1917. Représentant l'un un enseignement de la Sorbonne, l'autre un enseignement de l'Ecole polytechnique, établissements opposés parfois l'un à l'autre dans un esprit de rivalité où l'on ne peut voir heureusement que de l'émulation, ils résument deux courants issus des sources les plus hautes et sont manifestement appelés à donner une orientation nouvelle aux cours des Facultés et des classes de Mathématiques spéciales.

Beaucoup de choses tendent à réunir les deux livres. Si nous ouvrons d'abord celui de M. G. Darboux, nous lisons, sous le titre du premier chapitre, que « le but de ces Leçons est l'exposé des principes sur lesquels reposent les décou-

---

[1] *Principes de Géométrie analytique*, 1 vol. in-8° de VI-520 p. et 27 fig. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 20 fr.

[2] *Cours de Géométrie pure et appliquée de l'Ecole polytechnique*. Tome I. Vol. in-8° de XII-375 p. et 135 fig. Paris, Gauthier-Villars. Prix : 16 fr.

vertes qu'on doit à Monge et à son école ». Mais si Monge, dans un ouvrage magnifique, a merveilleusement appliqué l'Analyse à la Géométrie, il est aussi le créateur de la Géométrie descriptive ; sa synthèse, son intuition des tracés ne furent inférieurs en rien aux productions de son analyse. Il est aussi grand maître en Géométrie analytique et en Géométrie pure appliquée ou non. Si G. Darboux se réclame de Monge, comment imaginer que le patronage d'un des fondateurs de l'Ecole polytechnique ne soit accepté, par M. d'Ocagne, avec le même et fécond enthousiasme !

*
* *

La clarté exige, en général, qu'on ne parle point de deux livres à la fois en les entremêlant page à page. Mais, en ce qui concerne les débuts de ceux-ci, c'est plutôt la séparation qui serait maladroite tant ils s'inspirent, avec un même bonheur, des mêmes idées générales qui, appliquées a des exemples différents, se renforcent singulièrement du fait de ces deux expositions dont chacune est également originale.

L'idée fondamentale est celle de transformation ; la transformation la plus simple ne fait appel qu'aux formules du premier degré ; elle est *homographique*. Elle change les droites en droites en conservant le *rapport anharmonique* de quatre points alignés. Voilà, dira-t-on, qui est banal et fixé depuis fort longtemps ! Eh bien, il y a peut-être déjà beaucoup à dire, beaucoup à approfondir, beaucoup à lier avec les régions les plus modernes de la Science.

Quelle est l'origine intime du rapport anharmonique ? Le fait de juger cette notion par son extraordinaire fécondité ne masque-t-il pas la genèse que M. Darboux tient à révéler tout d'abord ?

A quatre points alignés, A, B, M, M′, attribuons les coordonnées homogènes

$$\begin{array}{lllll} x\ , & y\ , & z\ , & t\ , & \text{(A)} \\ x'\ , & y'\ , & z'\ , & t'\ , & \text{(B)} \\ x+\lambda x'\ , & y+\lambda y'\ , & z+\lambda z'\ , & t+\lambda t'\ , & \text{(M)} \\ x+\lambda' x'\ , & y+\lambda' y'\ , & z+\lambda' z'\ , & t+\lambda' t'\ , & \text{(M')} \end{array}$$

On aura

$$\frac{MA}{MB} = -\lambda\frac{t'}{t}, \qquad \frac{M'A}{M'B} = -\lambda'\frac{t'}{t}.$$

On voit que de tels rapports, même s'ils sont géométriquement invariables de par la fixité des points A, B, M, M', varient de par le choix des notations; *il n'en sera plus de même pour le quotient de ces rapports*, quotient qui ne dépend plus du multiplicateur $t' : t$.

Et ce qui vient de naître sous les traits d'une telle invariance, c'est précisément le rapport anharmonique! Peut-être y a-t-il là l'exemple le plus élémentaire d'une genèse qui se présente dans les parties les plus élevées des Mathématiques. Des fonctions elliptiques, fuchsiennes, etc., révèlent précisément leurs si remarquables propriétés exactes comme quotients de fonctions Θ à multiplicateurs se détruisant dans la division.

Mais ne nous éloignons pas du rapport anharmonique qui, défini à l'aide de segments réels, va faire un bond merveilleux dans le domaine imaginaire.

Un angle $AOB = \omega$, ayant son sommet joint aux ombilics I et J de son plan donne ainsi un faisceau O . ABIJ de rapport anharmonique $e^{2i\omega}$. C'est là une remarque faite par Laguerre alors qu'il n'était que candidat à l'Ecole polytechnique; il ne fallait qu'y penser tant la démonstration est simple, élémentaire, immédiate. C'est la possibilité d'étendre aux angles les transformations et démonstrations projectives tant travaillées par Chasles et Poncelet. C'est la porte ouverte sur les géométries non euclidiennes qui naîtront dès que l'on remplacera l'ensemble des points I et J par une conique quelconque. Et cependant, au point de vue didactique, cette si remarquable définition de l'angle n'avait été accueillie jusqu'ici qu'avec une réserve véritablement injuste. E. Duporcq lui avait donné sa véritable place dans ses *Premiers principes de Géométrie moderne*, mais, parmi les collègues immédiats du jeune géomètre si prématurément disparu, personne n'en avait fait une des bases fondamentales d'un ouvrage pédagogique. C'est chose faite maintenant et,

quant à cette introduction dans l'enseignement, G. Darboux et M. d'Ocagne sont admirablement d'accord.

Enormément de choses resteraient à dire quant au développement immédiat de tels préliminaires. Forcé d'être très bref, je signalerai seulement les coordonnées tétraédriques maniées par Plücker et Möbius sans adjonction essentielle à ce qu'on peut tirer de l'homographie générale. La dégénérescence de l'homographie en homologies, les transformations dualistiques, sont ici et resteront toujours les plus vivants exemples de ces transformations qui relèvent autant de l'Analyse que de la Géométrie, puisque pour en saisir complètement toute la puissance et toute la profondeur, il a fallu poursuivre dans le champ imaginaire tous les concepts nés d'abord dans le domaine réel.

* * *

Séparons maintenant deux Ouvrages qui, d'accord sur les points de départ, ont envisagé des problèmes différents. Voyons d'abord celui de Gaston Darboux.

La Seconde Partie est intitulée : Définitions métriques.

Un concept des plus ingénieux consiste, étant donnés deux points quelconques, A et B, à considérer le quadrilatère ABIJ où I et J sont toujours les points cycliques du plan ; en tant que quadrilatère complet, celui-ci a deux autres sommets A′ et B′.

Avec ces segments *associés* AB et A′B′, la définition de l'angle due à Laguerre et de faciles calculs d'exponentielles imaginaires, on reconnaît que les deux propriétés du cercle, comme lieu d'un point d'où l'on voit une corde sous un angle donné et comme lieu d'un point dont les distances à deux points fixes sont en rapport constant, sont associables d'une manière telle qu'on peut découvrir des courbes, de tous les degrés, où ces propriétés sont considérablement généralisées.

De telles considérations sont aisées à transporter du plan à la sphère. Si, sur cette dernière surface, on met en évi-

dence les génératrices rectilignes imaginaires, au moyen des formules bien connues

$$x = \frac{1 - \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \qquad y = i\frac{1 + \alpha\beta}{\alpha - \beta}, \qquad z = \frac{\alpha + \beta}{\alpha - \beta},$$

tout déplacement de la sphère sur elle-même revient à une même substitution linéaire effectuée sur α et β, soit, par exemple,

$$\alpha_1 = \frac{m\alpha + n}{p\alpha + q}, \qquad \beta_1 = \frac{m\beta + n}{p\beta + q}.$$

De ce théorème, dû à Cayley, on peut encore s'élancer dans les plus hautes régions de l'Analyse. Des substitutions linéaires en litige on s'élève aux groupes et aux fonctions polyédriques, proches parents des groupes et fonctions modulaires, des groupes fuchsiens et des fonctions fuchsiennes de Poincaré. Et comme des substitutions linéaires de même structure définissent l'homographie rectiligne avec toutes ses belles conséquences intuitives et constructives qu'on considère d'ordinaire comme appartenant à la Géométrie absolument pure, on est saisi d'une admiration sans bornes en constatant que ces diverses régions des Mathématiques se lient et se déroulent derrière les substitutions du type si simple

$$z_1 = \frac{mz + n}{pz + q}.$$

Les points *associés*, signalés tout à l'heure dans le plan, se retrouvent aisément sur la sphère, car deux génératrices imaginaires passant par A et deux autres, passant par B, forment un quadrilatère. De cette méthode des points associés on conclut aussi, sur la sphère, des courbes analogues aux courbes algébriques planes qui présentaient une généralisation des deux propriétés fondamentales du cercle indiquées plus haut.

La Troisième Partie de l'œuvre de G. Darboux est consacrée aux théorèmes de Poncelet sur les polygones inscrits et circonscrits aux coniques. C'est un sujet intimement lié aux précédents, car les génératrices rectilignes, réelles ou

imaginaires, d'une quadrique donnent, par perspective, des tangentes à une conique. Toutefois, cette remarque faite, il semble préférable d'étudier les choses, dans le plan même de la conique, au moyen d'un système de coordonnées qui permet d'étendre certains théorèmes à la Poncelet aux cubiques et même à des courbes algébriques de degré quelconque.

De ces préliminaires on passe à l'équation d'Euler et aux théorèmes, tels que ceux de Graves et de Chasles, où interviennent des arcs d'ellipse, mais ce qu'il faut bien remarquer, c'est que tout ceci peut contribuer à la théorie des fonctions elliptiques, sans en être issu. Ce point de vue est celui avec lequel Halphen commençait déjà son Traité ; nous le retrouverons encore, tout à l'heure, dans le Cours de M. Maurice d'Ocagne.

Gaston Darboux, dans une Quatrième Partie, traite de la Géométrie cayleyenne.

Nous avons déjà vu comment Laguerre considérait l'angle qui, en Géométrie ordinaire, reste cependant séparé de la notion de distance. Il n'en est pas de même en Géométrie sphérique, les distances sphériques étant aussi des angles. Or une perspective, centrée comme la sphère, permet de définir, dans le plan, des *distances* analogues aux distances sphériques. On imagine alors aisément une quadrique quelconque, dite *absolue,* qu'une droite AB coupe en M et N et qui permet de définir la distance AB par le logarithme du rapport anharmonique des points A, B, M, N. De même l'angle de deux plans P et Q, d'intersection Δ, si l'on mène par Δ deux plans tangents U et V à l'absolu, est défini par le logarithme du rapport anharmonique des plans P, Q, U, V.

La Géométrie cayleyenne ainsi constituée permet aisément de descendre aux Géométries non-euclidiennes. Elle admet des déplacements et une Trigonométrie générale revenant aussi à des combinaisons simples de substitutions linéaires ; elle a ses aires et ses volumes correspondant à l'invariance d'intégrales doubles ou triples.

L'œuvre se termine avec une Cinquième Partie consacrée à l'inversion.

Un des points préliminaires et fondamentaux est relatif à la définition des focales d'une surface, laquelle généralise la définition de Plücker concernant les foyers des courbes planes. Les focales sont les lignes doubles d'une développable circonscrite à la fois à la surface et au cercle imaginaire de l'infini. La notion de développable isotrope joue également un rôle puissant et curieux, mais ce sont les merveilleuses coordonnées pentasphériques qui constituent, à coup sûr, le meilleur moyen d'investigation analytique à associer à l'inversion. Les coordonnées tétraédriques se peuvent facilement interpréter en associant à un point ses distances à quatre plans; de même les coordonnées pentasphériques font intervenir les puissances d'un point par rapport à cinq sphères; elles donnent entre sphères quelconques des formules analogues à celles de la Géométrie analytique ordinaire entre plans.

C'est ici qu'apparaissent des surfaces de quatrième degré aux propriétés extrêmement nombreuses : les cyclides. Etudiées, au point de vue analytique, par Gaston Darboux, au point de vue géométrique par G. Humbert, on peut très simplement les considérer comme enveloppes de sphères; ce sont peut-être les seules surfaces du quatrième degré, de quelque généralité, que l'on puisse étudier profondément en coordonnées cartésiennes. En coordonnées pentasphériques elles sont du second degré et se laissent alors si complétement manier comme des quadriques, qu'on peut construire un système triplement orthogonal formé de cyclides tout comme on construit le système élémentaire formé de quadriques véritables.

C'est tout particulièrement dans cette dernière Partie que l'on retrouvera presque tout ce que G. Darboux avait déjà publié, en 1872, dans un Ouvrage *Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques et sur la Théorie des imaginaires*, Ouvrage déjà si remarquable qu'il en était devenu rarissime malgré une réimpression effectuée en 1896.

Revenons maintenant au livre de M. Maurice d'Ocagne.

Il faut une grande originalité d'esprit pour occuper dignement la chaire de Géométrie de l'Ecole polytechnique. Les besoins pratiques sont impérieux quant à tout ce qui se traite sur épure, mais beaucoup de mathématiciens considèrent cela comme un domaine géométrique monotone où la découverte soudaine et sensationnelle d'un brillant théorème ne semble pas pouvoir être espérée. La conception, nous le verrons plus loin, est peut-être étroite mais, quoi qu'il en soit, les professeurs de l'Ecole ont élargi le champ. Amédée Mannheim, par exemple, s'illustra avec la Géométrie cinématique. Est-il besoin de rappeler que M. d'Ocagne est un créateur en matière de Nomographie ? Les développements nomographiques sont surtout réservés à un Tome II, mais déjà le Tome I, aujourd'hui publié, contient de nombreuses amorces à ce sujet ; les préliminaires relatifs aux transformations en témoignent.

Quant aux transformations pratiques, il fallait naturellement faire une grande place à la perspective. Il est clair que le trait de perspective doit pouvoir résoudre toutes les questions susceptibles d'être rattachées au trait de descriptive, mais c'est surtout là une remarque théorique ; la perspective a ses méthodes qui demandent quelque étude pour elles-mêmes. Et il semble qu'en rattachant à la perspective des questions plus ordinairement traitées en descriptive, l'auteur a fait montre d'une première originalité.

Il montre l'importance de la perspective *axonométrique* en laquelle l'objet à représenter est lié à trois axes rectangulaires qu'on projette avec lui. Puis, par des positions plus particulières de ces trois axes, la perspective devient *isométrique* et enfin *cavalière*. J'imagine que des lecteurs n'ayant point la patience de faire des épures, peuvent cependant être grandement intéressés par l'élégance avec laquelle de telles vues procèdent du général au particulier.

Parmi les questions les plus ingénieusement traitées, je signalerai le contour apparent de la sphère (p. 61), la mise en perspective du cône circulaire (p. 71), l'image d'un point dans un miroir quelconque (p. 81), l'ombre intérieure à un

cylindre circulaire (p. 85). Le problème de la restitution comprend comme cas particulier mais d'une importance pratique capitale, la Métrophotographie du Colonel Laussedat.

La Première Partie de l'Ouvrage ayant été consacrée aux Transformations géométriques, notons que tout ce qui concerne la Perspective et forme une Seconde Partie, n'occupe que 78 pages; c'est d'une condensation fort heureuse, qui conserve l'entière beauté des méthodes sans les disperser sur une multiplicité d'exemples empruntés à la pratique.

Une Troisième Partie est consacrée à la Géométrie infinitésimale.

Dans la transformation infinitésimale des figures planes, l'un des résultats les plus importants est dû au Colonel Mannheim; il lie les six normales aux trajectoires des sommets et aux enveloppes des côtés d'un triangle variable de position et de forme. Avec quelques brefs développements sur la variation de longueur d'un segment, on peut aborder la courbure des coniques et des tractrices, les théorèmes de Graves et de Chasles sur les arcs d'ellipse, la courbure des caustiques et des podaires. A cette Géométrie différentielle, on peut adjoindre sans peine certains résultats concernant les aires, par exemple l'aire de la couronne détachée dans une courbe fermée par un point marqué sur une corde de longueur constante.

Beaucoup d'éléments différentiels obtenus par les méthodes précédentes peuvent s'annuler de manière simple ou symétrique, d'où de très élégants théorèmes de maximum ou de minimum.

Dans l'étude des surfaces développables, M. d'Ocagne arrive au développement en suivant attentivement la déformation de l'arête de rebroussement.

L'étude de la courbure d'une surface autour d'un de ses points comporte des résultats d'une simplicité étonnante et cependant peu connus. Ainsi Mannheim et l'auteur lui-même ont donné une formule liant la courbure d'un contour apparent et la courbure d'une surface en l'un des points de contact avec le cylindre projetant.

Très élégante démonstration géométrique pour le théo-

rème de Malus et de Dupin sur les faisceaux de rayons qui, avant et après réfraction sur une surface quelconque, admettent des surfaces qui leur sont orthogonales. Puis digression des plus utiles sur la notion même de courbure superficielle ; sur une surface, l'idée de courbure a quelque chose d'arbitraire, et différentes définitions semblent généraliser dans des voies diverses la notion qui est si simple pour une courbe plane. C'est ce que montre, par exemple, la courbure moyenne quadratique de Casorati, aisée à adjoindre et à comparer aux courbures moyenne et totale d'aspects beaucoup plus classiques.

Les lignes tracées sur les surfaces nous conduisent aux lignes de courbure dans les systèmes triplement orthogonaux, aux asymptotiques et à leur courbure régie par le théorème de Beltrami, surtout à ces admirables géodésiques qui permettent de généraliser la Géométrie plane sur une surface quelconque. Les lignes de courbure de l'ellipsoïde, si simplement déterminées déjà en faisant entrer cette surface dans le système triple orthogonal bien connu, sont aussi facilement déterminées comme coniques géodésiques à foyers aux ombilics de la quadrique.

Soyons brefs pour la théorie des surfaces gauches en nous bornant à signaler une représentation géométrique du paramètre de distribution due encore à Mannheim.

Le conoïde de Plücker ou cylindroïde, étudié par MM. Appell, Bricard, d'Ocagne, est un exemple sans rival possible.

Après les surfaces réglées il était naturel de placer ces multiplicités rectilignes plus vastes que constituent complexes et congruences. D'où une Quatrième Partie consacrée à la Géométrie réglée. Le complexe linéaire y tient naturellement la place principale avec ses propriétés de polarité qui offrent une curieuse analogie avec les propriétés de polarité des quadriques ; il s'aperçoit aisément, en bloc, comme formé par l'ensemble des binormales d'un ensemble d'hélices circulaires de même axe et de même pas.

La Cinquième et dernière Partie du volume concerne la Géométrie cinématique.

Cette science si captivante entrevue par Cauchy, précisée par Chasles avec la notion du centre instantané, doit encore ses plus admirables développements au Colonel A. Mannheim.

Les *Principes et développements de Géométrie cinématique* constituent l'un des plus beaux Ouvrages dont puissent se glorifier la Science française et l'Ecole polytechnique.

M. d'Ocagne a réussi une exposition fort originale et esthétique; ainsi il est banal d'étudier les trajectoires elliptiques des points d'un segment dont les extrémités glissent sur deux droites rectangulaires, mais on voit, avec un vif intérêt, qu'on peut rattacher à cette question la construction d'une conique déjà rencontrée en Perspective.

Quant au mouvement plan le plus général, il aboutit surtout au théorème de Savary qui lie la courbure d'une trajectoire aux courbures de la courbe roulante et de la courbe rail. Ce théorème est ensuite appliqué et mis en valeur dans le cas des épicycloïdes; pour ces courbes, le lieu des centres de courbure des éléments de trajectoire correspondant aux différents points du cercle roulant est lui-même un cercle, et les développées sont aussi des épicycloïdes. L'auteur a d'ailleurs publié des recherches originales sur ces théorèmes et d'autres de même genre dans une *Etude géométrique* toute récente (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1915, p. 533).

L'exposition est encore d'une clarté particulièrement saisissante dans le déplacement d'un solide par roulement et glissement d'une surface réglée mobile sur une surface réglée fixe. Dans le déplacement instantané, dans la *viration*, toutes les normales possibles aux trajectoires de la figure en mouvement forment un complexe linéaire attaché à un ensemble instantané d'hélices, complexe qui est précisément celui signalé plus haut et étudié dans la Géométrie réglée. Les Géométries cinématique et réglée sont ainsi vivement éclairées l'une par l'autre et à propos d'une question fondamentale. On s'élève de là a des complexes non linéaires formés par les tangentes aux trajectoires et par les caractéristiques des plans en mouvement, mais ils se confondent

avec le complexe des droites telles que leurs conjuguées, par rapport au complexe linéaire précédent, leur soient rectangulaires.

Aux mouvements à deux degrés de liberté correspondent des surfaces trajectoires dont l'ensemble des normales est une congruence linéaire commune aux complexes linéaires correspondant respectivement à deux variations particulières. On en conclut immédiatement que ces normales, pour chaque position de la figure, rencontrent deux droites ; c'est le théorème de Schönemann et Mannheim.

Diverses surfaces hélicoïdales illustrent la théorie des mouvements spatiaux ; vient ensuite la surface de l'onde non sans des préliminaires très généraux sur la cinématique des surfaces apsidales.

Diverses Notes terminent l'ouvrage.

Dans des *Notions complémentaires sur les transformations géométriques*, sont adjointes aux transformations linéaires et à l'inversion étudiées dans le corps du volume des transformations analytiques plus générales, notamment des transformations quadratiques. Pour des quadriques quelconques les représentations planes sont aisées ; pour les surfaces cubiques la chose ne saurait être sans droites existant sur la surface, et c'est en approfondissant cette remarque qu'on peut arriver à mettre en évidence toutes ces droites qui, on le sait, sont au nombre de 27.

Avec la Note *Sur un procédé de mise en perspective sans lignes de construction*, il y a vraiment de quoi s'étonner et s'émerveiller. Sur une épure, des faisceaux homographiques, par certains rayons imaginaires, révèlent des rotations qui résolvent alors immédiatement un problème de perspective ! C'est d'une synthèse admirable et qui montre bien qu'il n'y a plus lieu de distinguer la Géométrie pratique et monotone des atlas, de la Géométrie analytique la plus abstraite ; tout cela est la Géométrie ! Et soyons reconnaissants à M. d'Ocagne qui a poussé loin l'art de nous le faire comprendre.

On pourrait d'ailleurs en dire autant quant à une troisième Note *Sur un procédé de restitution perspective fondé sur l'homologie ;* ici, dans un problème cartographique, des points

éminemment réels sont maniés comme intersections de droites isotropes.

Pour Gaston Darboux, l'imaginaire doit jouer, en Géométrie comme en Analyse, un rôle explicatif fondamental. M. d'Ocagne nous montre, en outre, que dans des problèmes géométriques, indéniablement tenus d'avoir des solutions réelles, les notions imaginaires peuvent jouer un rôle intermédiaire des plus pratiques. Une telle assertion serait banale en Analyse mais combien elle est plus neuve dans le domaine des épures !

Des *Exercices complémentaires relatifs à la Géométrie infinitésimale des courbes planes* exposent les élégantes recherches de M. d'Ocagne sur les adjointes infinitésimales à une courbe donnée. Ces adjointes sont telles que la connaissance d'infiniment petits du $(n-1)^{me}$ ordre y relatifs définit les infiniment petits du n^{me} ordre relatifs à la courbe primitive. C'est ainsi qu'on peut avoir des propriétés de courbure relatives à une certaine courbe connaissant des propriétés des tangentes ou des normales de la courbe adjointe.

Une cinquième et dernière Note *Sur l'attraction d'une couche ellipsoïdale*, montre encore le secours que les remarques géométriques peuvent apporter quant à l'évaluation de certaines intégrales.

Après de telles citations il serait superflu de faire un effort de style pour écrire quelque conclusion grandiose. Félicitons-nous, très simplement, d'avoir vu paraître ensemble deux Ouvrages où apparaît si clairement le génie propre à cette science géométrique dont les plus beaux développements sont dus à des géomètres français.

REMARQUES
SUR LA CONSTRUCTION DES COURBES GAUCHES AVEC APPLICATION A LA PARABOLE CUBIQUE

PAR

Gino Loria (Gênes).

Pour se former une idée exacte de la forme qu'a une ligne à double courbure, dont on connaît la génération et par suite la représentation analytique, on a en général recours aux méthodes de la Géométrie descriptive. Toutefois, pour bien comprendre les épures que cette science apprend à construire, il est nécessaire, et pas toujours suffisant, une habitude considérable; par conséquent on peut penser que le but en question peut être atteint d'une manière plus rapide et plus sûre en traçant réellement dans l'espace les lignes dont on veut se procurer une image précise. Mais comme les physiciens et les chimistes jusqu'à présent ne nous ont appris aucun procédé pour « dessiner dans l'espace », les mathématiciens doivent chercher un expédient dans l'ensemble de leurs outils; et que cette recherche ne soit pas stérile, est prouvée par les lignes suivantes.

Considérons la courbe Γ qui, à l'aide de coordonnées cartésiennes orthogonales, a cette représentation paramétrique:

$$x = \varphi(t) \ , \qquad y = \psi(t) \ , \qquad z = \chi(t) \ . \tag{1}$$

Soient Γ_x, Γ_y, Γ_z ses projections orthogonales sur les plans yz, zx, xy. Γ_z, par exemple, est la base d'un des cylindres qui projettent la courbe; si nous développons ce cylindre sur un plan, la courbe Γ subira une déformation et deviendra une courbe $[\Gamma]$ parfaitement déterminée. Pour

définir cette courbe, nous la rapporterons à un système cartésien orthogonal ayant pour axe des abscisses de ligne Γ_z rectifiée et pour origine un, Ω, de ces points choisis arbitrairement. Alors la première coordonnée du point [P] transformée d'un point quelconque P de la courbe Γ sera donnée par la fonction

$$s = \int_{t_0}^{t} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}\, dt = \omega(t) \,, \tag{2}$$

l'intégrale étant prise de manière que s soit $= 0$ au point Ω; tandis que la seconde coordonnée sera égale $\xi(t)$. Par suite la courbe [Γ] rapportée à un système cartésien peut se représenter par les équations :

$$\xi = \omega(t) \,, \qquad \eta = \chi(t) \,. \tag{3}$$

A l'aide de ces formules la courbe [Γ] pourra être tracée sur le plan. Si, cette opération finie, on replace le cylindre projetant dans sa position originaire, la ligne [Γ] redeviendra Γ et la question que nous avons énoncée au début sera résolue. Dans la pratique, il est bon de tracer la courbe Γ_z sur une table de bois comme un sillon qui la traverse complètement et de dessiner la courbe [Γ] sur une lame de métal très mince et très flexible : alors l'opération de replacement dont nous avons parlé n'offrira d'obstacles insurmontables.

Mais il y a une autre espèce de difficulté qui empêche bien souvent d'appliquer la méthode dont il s'agit ; c'est la détermination de la fonction $\omega(t)$, car en général elle n'appartient à aucune classe connue et, même dans les cas où cela arrive, c'est une fonction si compliquée, qu'il est parfois impossible de tracer avec la précision nécessaire la courbe [Γ].

Entre les cas où cette difficulté peut être vaincue il y en a un qui me paraît digne de remarque, car il se rapporte à la plus simple des courbes gauches algébriques et car il offre une application de la plus ancienne des courbes planes algébriques rectifiables à l'aide d'expressions aussi algébriques : je parle de la cubique gauche osculatrice du plan à l'infini (ou *parabole cubique*) et de la parabole de Neil.

Pour démontrer tout cela, il est nécessaire de se rappeler que la plus simple des paraboles cubiques peut se représenter, si on la rapporte à un système cartésien orthogonal, par les équations suivantes :

$$x = t^3 , \qquad y = t^2 , \qquad z = t . \tag{4}$$

Par suite, ses projections sur les trois plans de repère sont les courbes :

$$x^2 = y^3 , \qquad x = z^3 , \qquad y = x^2 ;$$

or on sait que les deux dernières ne peuvent être rectifiées algébriquement, tandis que, au contraire, cela est possible par rapport à la première.

En effet, on peut encore la représenter par les équations

$$x = t^3 , \qquad y = t^2 ;$$

par suite on a

$$ds = t\sqrt{9t^2 + 4}\, dt ;$$

changeons de variable, en posant

$$\sqrt{9t^2 + 4} = 3u$$

et nous aurons

$$ds = 3u^2 du$$

et

$$s = u^3 + \text{const.} = \left(t^2 + \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} + \text{const.}$$

Si nous supposons qu'on ait $s = 0$ pour $t = 0$, la const. doit être $= -\frac{8}{27}$, et alors

$$s = \left(t^2 + \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} .$$

Tout cela prouve que la courbe [Γ] transformée par développement de la parabole cubique Γ est représentable par les formules

$$\xi = \left(t^2 + \frac{4}{9}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{27} , \qquad \eta = t .$$

par suite elle a l'équation suivante :

$$\left(\xi + \frac{8}{27}\right)^2 = \left(\eta^2 + \frac{4}{9}\right)^3. \tag{5}$$

C'est donc une courbe du 6e ordre qui passe par l'origine des coordonnées. Si on change un des axes en se servant des formules

$$\xi + \frac{8}{27} = \xi', \qquad \eta = \eta'$$

on a, au lieu de l'équation (5), la suivante :

$$\xi'^2 = \left(\eta'^2 + \frac{4}{9}\right)^3;$$

cette équation prouve que la courbe [Γ] est symétrique par rapport aux nouveaux axes ; à toute valeur réelle de η' il correspond un couple de valeurs réelles de ξ', d'où il suit que le point à l'infini de $\Omega'\xi'$ est un point quadruple (les correspondantes tangentes coïncident avec la droite de l'infini du plan) ; et à toute valeur réelle de ξ', satisfaisant à la relation $|\xi'| > \frac{8}{27}$, on a deux valeurs réelles de η'. La courbe (comme le montre la fig. 1) a donc à peu près l'apparence d'un couple de paraboles tournant leurs convexités l'une à l'autre et symétriques entre elles par rapport à $\Omega'\eta'$.

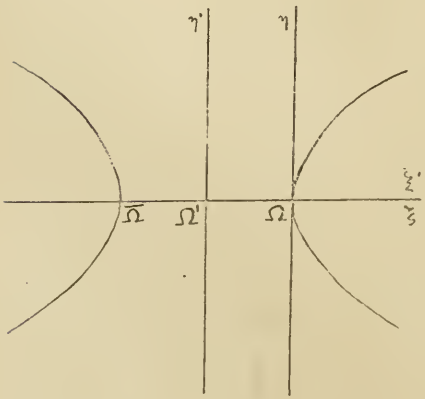


Fig. 1.

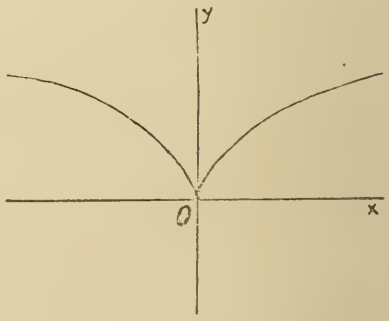


Fig. 2

Remarquons d'ailleurs que la parabole semicubique $x^2 = y^3$ est une courbe de troisième ordre, toute située au-dessus de l'axe Ox, symétrique par rapport à Oy et dont l'origine est un point d'arrêt (voir fig. 2) ; on a de la sorte tous les éléments pour se former une idée de la forme qu'a la parabole cubique : cette courbe s'obtiendra en plaçant le plan $\xi\Omega\eta$ normalement au plan xOy de manière que Ω tombe en O et la droite $\Omega\xi$ se superpose à la parabole semicubique.

Un procédé parfaitement semblable peut s'appliquer à toute courbe gauche dont la projection orthogonale sur un plan convenablement choisi soit rectifiable par des fonctions simples.

Gênes, octobre 1917.

THÉORIE ÉLÉMENTAIRE DE LA TOUPIE GYROSCOPIQUE

PAR

M. Zack (Odessa).

Parmi les théories de la Mécanique, il y en a peu qui aient conduit à un plus grand nombre d'applications directes que la théorie du mouvement gyroscopique. En balistique, en aéronautique, dans la construction des machines et des navires il a été possible, grâce au développement de cette théorie, d'introduire des perfectionnements qui ont eu une influence quelquefois décisive sur l'évolution de ces diverses branches de l'art de l'ingénieur. Pourtant, la plupart des théories soi-disant élémentaires du phénomène gyroscopique sont ou fausses ou, au moins, inexactes. Quelques-unes seulement permettent d'obtenir des résultats purement qualitatifs.

Le but de cet article est de montrer qu'il est facile d'étudier *d'assez près* le mouvement d'une toupie gyroscopique par des méthodes élémentaires.

Les formules ainsi obtenues peuvent être directement appliquées aux différents cas qui se présentent avec une approximation dont le degré peut être rapidement déterminé dans chaque cas particulier.

Les résultats sont applicables surtout lorsque le mouvement de la toupie autour de son axe est entretenu, par exemple électriquement ou de toute autre manière, *indépendamment* du mouvement de l'axe lui-même, comme cela a lieu dans la plupart des applications.

§ 1. — Considérons un solide de révolution ou plutôt un solide dont l'ellipsoïde d'inertie est de révolution autour de Oz. Soit $Oxyz$ un système d'axes trirectangulaires mobile autour du point O, fixe dans l'espace. Supposons le solide en rotation autour de l'axe Oz avec une vitesse angulaire relative constante.

Soit ω la rotation instantanée absolue du système $Oxyz$ au temps t et soient p, q, r les projections de ω sur les axes Ox, Oy, Oz.

Les équations d'Euler dans ce cas s'écriront

$$A\frac{dp}{dt} + (C - A)qr = L \ ,$$

$$A\frac{dq}{dt} + (A - C)pr = M \ ,$$

$$C\frac{dr}{dt} = N \ , \quad \text{puisque } B = A \ .$$

On peut étudier le mouvement propre du système $Oxyz$ en faisant abstraction du mouvement relatif du corps par rapport à $Oxyz$, c'est-à-dire en regardant le corps comme immobile autour de Oz, à condition d'introduire la force d'inertie relative et la force d'inertie complémentaire [1].

Remarque. — Si la vitesse angulaire relative du solide autour de Oz n'est pas constante dans le système *réel* d'en-

[1] V. M. Astier, *Etude sur le phénomène gyroscopique*. R. de M., 1909, 8.

traînement, on peut toujours imaginer un système *fictif* $Oxyz$ d'entraînement dans lequel la vitesse angulaire relative du solide serait constante.

En effet, supposons que la rotation relative du solide autour de Oz soit $\alpha = \beta + \gamma$ où β est constant et γ variable.

Soit r_1 la rotation d'entraînement *réel;* la rotation d'entraînement fictif sera $r = r_1 + \gamma$ et la rotation relative $-\beta$.

On peut immédiatement faire une application de cette remarque au calcul du couple autour de Oz des forces d'inertie provenant du mouvement varié relatif autour de Oz.

On aura

$$C\left(\frac{dr_1}{dt} + \frac{d\gamma}{dt}\right) = 0 ,$$

puisque dans le mouvement absolu il n'y a pas de forces appliquées ; d'autre part

$$C\frac{dr_1}{dt} = N_\nu ,$$

puisque nous considérons le solide comme immobile autour de Oz [1] en introduisant le couple N_ν des forces d'inertie.

De ces deux relations on tire

$$N_\nu = -C\frac{d\gamma}{dt} = -C\frac{d\alpha}{dt} .$$

Revenons aux équations d'Euler.

Soit M un point pris dans le corps et soient x, y, z ses coordonnées au temps t, dans le système $Oxyz$. Les projections de la vitesse relative sur les axes Ox, Oy, Oz sont

$$\frac{dx}{dt} = -\alpha y , \qquad \frac{dy}{dt} = \alpha x , \qquad \frac{dz}{dt} = 0 . \tag{2}$$

Soit m la masse du point M. Les projections de la force d'inertie complémentaire sur les axes Ox, Oy, Oz sont

$$-2m\left(q\frac{dz}{dt} - r\frac{dy}{dt}\right) , \quad -2m\left(r\frac{dx}{dt} - p\frac{dz}{dt}\right) , \quad -2m\left(p\frac{dy}{dt} - q\frac{dx}{dt}\right) , \tag{3}$$

[1] Nous séparons toujours le mouvement *propre* du corps autour de Oz du mouvement provenant du système $Oxyz$; c'est ce premier mouvement qui est supposé nul.

ou, en remplaçant dx, dy, dz par leurs expressions (2),

$$\begin{aligned} &2mr\alpha x \\ &2mr\alpha y \\ &-2mp\alpha x - 2mq\alpha y \,. \end{aligned} \tag{3'}$$

Les projections sur les mêmes axes de la force d'inertie sont

$$m\alpha^2 x \,, \qquad m\alpha^2 y \,, \qquad 0 \,. \tag{4}$$

En faisant la somme des moments de ces forces d'inertie par rapport aux axes Ox, Oy et Oz et en remarquant que ces axes sont les axes principaux d'inertie, nous voyons que les moments des forces d'inertie relative ont des sommes nulles et que les sommes des moments des forces d'inertie complémentaires se réduisent respectivement à

$$-q\alpha C \,, \qquad +p\alpha C \,, \qquad 0 \,.$$

En ajoutant à L, M et N ces moments, nous pourrons écrire les équations d'Euler sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} &A\frac{dp}{dt} + (C - A)qr = L - q\alpha C \,, \\ &A\frac{dq}{dt} + (A - C)pr = M + p\alpha C \,. \\ &C\frac{dr}{dt} = N \,. \end{aligned} \tag{5}$$

Ces équations nous permettront d'étudier le mouvement du système $Oxyz$ autour de O en faisant abstraction de la rotation propre du corps.

§ 2. — Supposons d'abord que l'axe instantané d'entraînement est constamment situé sur un cône de révolution autour de Oz et de plus $N = 0$.

Des équations (5) on tire

$$C\frac{dr}{dt} = 0 \,, \qquad \text{d'où} \qquad r = r_0 \,.$$

L'axe d'entraînement fait avec Oz l'angle $\cos V = \frac{r_0}{\omega}$ et puisque le cône est de révolution $\frac{r_0}{\omega} = C^{te}$, c'est-à-dire $\omega = C^{te}$.

On peut donc écrire $p^2 + q^2 = C^{te}$. En différentiant cette expression nous obtenons (6) $p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} = 0$.

En multipliant la première des équations (5) par p et la seconde par q, en ajoutant et en tenant compte de (6). nous obtenons

$$Lp + Mq = 0 \ . \qquad (7)$$

Cette dernière relation conduit à la proposition suivante :

Si l'axe instantané d'entraînement est constamment situé sur un cône de révolution autour de Oz *et est constant en grandeur*[1], *l'axe du couple des forces extérieures est perpendiculaire au plan passant par l'axe de rotation propre du corps et l'axe instantané d'entraînement.*

Cette proposition a été énoncée pour la première fois, croyons-nous, par M. Clauzel[2], qui l'a démontrée par une méthode géométrique très élégante, sans préciser d'ailleurs les conditions de son application.

Supposons maintenant $Lp + Mq = 0$ et de plus $N = 0$.

En remplaçant L et M par leurs valeurs tirées des équations (5) et en faisant les réductions nécessaires, nous obtenons l'expression

$$p\frac{dp}{dt} + q\frac{dq}{dt} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad p^2 + q^2 = C^{te} \ . \qquad (6)$$

La troisième des équations (5) nous donne $r = r_0$. Nous arrivons ainsi à la proposition suivante :

Si l'axe du couple des forces extérieures est nul ou est constamment perpendiculaire au plan passant par l'axe de rotation propre du corps et l'axe instantané d'entraînement, l'axe instantané d'entraînement est situé sur un cône de révolution autour de Oz *et est constant en grandeur.*

Cette proposition peut être regardée comme l'inverse de la proposition de M. Clauzel.

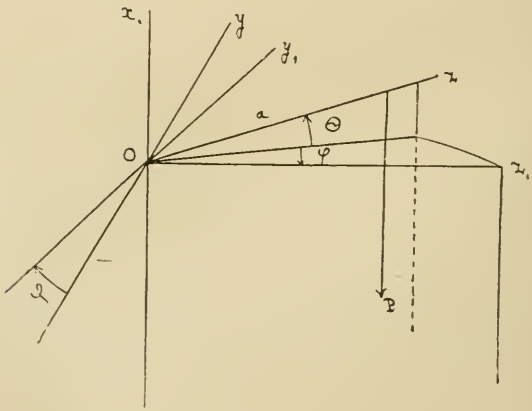
§ 3. — Nous étudierons deux cas particuliers du mouvement d'une toupie gyroscopique sous l'influence de la pesanteur. Une toupie gyroscopique est généralement constituée

[1] La seconde condition peut être remplacée par la condition $N = 0$, ce qui revient au même.

[2] G. Clauzel, *Effets gyroscopiques, etc.* R. d. M., 1912.

par un disque assez lourd monté sur un axe auquel on imprime un mouvement de rotation rapide et qui repose par un de ses points sur un support fixe. Les deux cas que nous analyserons seront : 1° le cas où l'axe de la toupie forme avec l'horizontale un angle voisin de $\frac{\pi}{2}$, c'est-à-dire est presque vertical et 2° le cas où l'axe de la toupie forme avec l'horizontale un angle voisin de 0, c'est-à-dire est presque horizontal.

Nous introduirons les angles θ et φ qui déterminent la position de la toupie à chaque instant. L'angle θ détermine la position de l'axe Oz par rapport à l'horizontale et $\frac{d\theta}{dt}$ sera la vitesse angulaire de nutation ; l'angle φ détermine l'azimuth de l'axe Oz et $\frac{d\varphi}{dt}$ sera la vitesse angulaire de précession. Ces deux angles définiront complètement la position de la toupie puisque nous la considérons (fictivement) comme immobile autour de son axe, à condition d'introduire les forces d'inertie.



Les seules forces réelles qui agissent sur la toupie sont la réaction au point O dont le moment est nul et le poids appliqué à une distance a de O et dont les projections sur les axes Ox, Oy et Oz sont

$$L = 0 , \qquad M = Pa \cos\theta . \qquad N = 0 .$$

Les projections de la rotation instantanée d'entraînement ω sur les axes Ox, Oy et Oz sont

$$p = \frac{d\varphi}{dt}\cos\theta\ , \qquad q = \frac{d\theta}{dt}\ , \qquad r = \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\ . \tag{8}$$

1° Supposons d'abord l'angle θ voisin de $\frac{\pi}{2}$ pendant tout le mouvement. L'expression $Lp + Mq$ se réduit ici à $Mq = -Pa\cos\theta\frac{d\theta}{dt}$. Or, puisque θ est voisin de $\frac{\pi}{2}$, $\cos\theta$ est voisin de 0; d'autre part quand θ s'écarte le plus de $\frac{\pi}{2}$, $\frac{d\theta}{dt}$ est nul puisque θ est alors minimum ou maximum. Nous pouvons donc admettre que pendant tout le mouvement Mq est *approximativement* nul et appliquer les résultats du précédent paragraphe.

Nous pouvons écrire $p^2 + q^2 + r^2 = \omega_0^2$ avec $r = r_0$ où ω_0 et r_0 sont les valeurs initiales de la rotation instantanée d'entraînement et de sa projection sur Oz.

En remplaçant p, q et r par leurs valeurs en fonction de θ et φ nous obtenons

$$\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \omega_0^2 \qquad \text{et} \qquad \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta = r_0\ . \tag{9}$$

La dernière relation peut encore s'écrire

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r_0}{\sin\theta}\ . \tag{10}$$

On voit donc que la vitesse angulaire de précession $\frac{d\varphi}{dt}$ augmente quand $\sin\theta$ diminue, c'est-à-dire quand l'axe de la toupie s'écarte de la verticale.

Choisissons comme position initiale la position dans laquelle $\theta = \frac{\pi}{2}$, et comme instant initial le moment quand la vitesse angulaire autour de l'axe Oy est négative : $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0 < 0$. θ ira en diminuant et $\frac{d\varphi}{dt}$ augmentera jusqu'au moment où $\frac{d\theta}{dt}$ dont la valeur absolue ira en même temps en diminuant (équation (9)) deviendra nul, à cet instant $\frac{d\varphi}{dt}$ sera égal à ω_0

et $\sin\theta_1$, sera égal à r_0. Après cela θ augmentera de nouveau jusqu'à $\frac{\pi}{2}$ pendant que $\frac{d\varphi}{dt}$ diminuera jusqu'à r_0, $\frac{d\theta}{dt}$ étant positif, θ continuera à augmenter jusqu'à une valeur $\sin\theta_2 = \frac{r_0}{\omega_0}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$ augmentera jusqu'à ω_0.

On voit ainsi que la vitesse angulaire de précession ne devient jamais nulle et oscille entre les valeurs r_0 et ω_0, que l'angle θ varie entre deux valeurs symétriques par rapport à Oz définies par $\arcsin\frac{r_0}{\omega_0}$ et que la vitesse angulaire de nutation varie entre 0 et $\pm\sqrt{\omega_0^2 - r_0^2}$. Du reste r_0 diffère peu de ω_0 puisque θ s'écarte peu de $\frac{\pi}{2}$.

Nous avons supposé au début que $\frac{d\theta}{dt}$ s'annule rapidement quand θ s'écarte de $\frac{\pi}{2}$. Cherchons les conditions pour qu'il en soit ainsi.

La deuxième des équations (5) prendra dans le cas qui nous occupe la forme suivante :

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} + (A - C)r_0^2\frac{\cos\theta}{\sin\theta} = -Pa\cos\theta + C\alpha r_0\frac{\cos\theta}{\sin\theta}. \qquad (5')$$

Cette équation s'obtient en remplaçant p et q par leurs expressions (8), r par r_0 et $\frac{d\varphi}{dt}$ par son expression (10).

Multiplions cette équation par $\frac{d\theta}{dt}$ et intégrons.

On obtient :

$$\frac{A}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = -Pa\sin\theta + C\alpha r_0 \operatorname{Log}\sin\theta + (C - A)r_0^2 \operatorname{Log}\sin\theta + D, \qquad (11)$$

où D est déterminé par l'équation suivante :

$$\frac{A}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_{\substack{t=0\\ \theta=\frac{\pi}{2}}} = -Pa + D, \quad \text{c'est-à-dire} \quad D = Pa + \frac{A}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0^2.$$

On obtient ainsi pour $\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$ l'expression suivante :

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{2\{Pa(1 - \sin\theta) + [C\alpha r_0 + (C - A)r_0^2]\operatorname{Log}\sin\theta}{A} + \left(\frac{d\theta}{dt}\right)_0^2. \qquad (12)$$

L'équation (12) nous montre 1° que si α et r_0 sont nuls, $\frac{d\theta}{dt}$ ne s'annule jamais et augmente lorsque θ augmente ou diminue et 2° que plus α est grand[1] moins θ s'écarte de $\frac{\pi}{2}$, puisque $\frac{d\theta}{dt}$ s'annule d'autant plus rapidement[2].

On voit donc que la supposition que nous avons faite au début est justifiée par un disque tournant *rapidement* autour de son axe. Cherchons maintenant la période d'oscillation de la toupie autour de l'axe vertical. On y arrive facilement en faisant quelques approximations.

L'équation (5') peut être écrite de la façon suivante :

$$\sin\theta\frac{d^2\theta}{d^2t} + \frac{(A - C)r_0^2\cos\theta + Pa\cos\theta\sin\theta - C\alpha r_0\cos\theta}{A} = 0 . \quad (5'')$$

Puisque $\sin\theta$, pendant tout le mouvement, est voisin de 1, remplaçons $Pa\sin\theta$ par Pa et posons $\cos\theta = u$.

On aura

$$\cos\theta = u ,$$

$$-\sin\theta\frac{d\theta}{dt} = \frac{du}{dt} ,$$

$$-\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} - \cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{d^2u}{dt^2} .$$

Remarquons que $\cos\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2$, pendant tout le mouvement, est voisin de zéro, négligeons-le et écrivons

$$-\sin\theta\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2u}{dt^2} .$$

L'équation (5'') deviendra alors

$$\frac{d^2u}{dt^2} + m^2u = 0 \qquad \text{où} \qquad m^2 = \frac{C\alpha r_0 - Pa + (C - A)r_0^2}{A} ; \quad (13)$$

la dernière expression pour α assez grand est positive.

L'équation (13) nous permet de calculer la période T d'une

[1] Nous ne parlons pas de r_0 puisque $(C - A)$ peut être négatif.

[1] Log $\sin\theta$ est nul ou négatif puisque $\sin\theta \leq 1$.

oscillation simple de la toupie autour de l'axe vertical. On trouve $T = \frac{2\pi}{m}$. On voit que T diminue 1° lorsque α augmente et 2° lorsque Pa diminue.

2° Passons maintenant à l'autre cas où θ est voisin de zéro.

Les équations (5) peuvent s'écrire en remplaçant p, q et r par leurs expressions (8) de la façon suivante :

$$A\frac{d^2\varphi}{dt^2}\cos\theta - Ar_0\frac{d\theta}{dt} + (C - A)r_0\frac{d\theta}{dt} = -C\alpha\frac{d\theta}{dt}$$

$$A\frac{d^2\theta}{dt^2} + (A - C)r_0\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta = -Pa\cos\theta + C\alpha\frac{d\varphi}{dt}\cos\theta \qquad (14)$$

$$\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta = r_0 \qquad \text{puisque } N = 0 .$$

Remarquons que r_0 est voisin de 0 puisque θ en diffère très peu. Pour la même raison nous pouvons, au lieu de $\cos\theta$, écrire 1 dans les équations (14), c'est-à-dire écrire

$$\begin{aligned} &A\frac{d^2\varphi}{dt^2} + [C(\alpha + r_0) - 2Ar_0]\frac{d\theta}{dt} = 0 , \\ &A\frac{d^2\theta}{dt^2} - [C(\alpha + r_0) - Ar_0]\frac{d\varphi}{dt} + Pa = 0 . \end{aligned} \qquad (14')$$

Posons

$$m^2 = \frac{C(\alpha + r_0) - 2Ar_0}{A} \qquad \text{et} \qquad n^2 = \frac{C(\alpha + r_0) - Ar_0}{A} ,$$

m^2 et n^2 sont positifs si α est supposé grand. Posons d'autre part $\frac{d\varphi}{dt} = u$. Les équations (14') s'écriront

$$\begin{aligned} &\frac{du}{dt} + m^2\frac{d\theta}{dt} = 0 , \\ &\frac{d^2\theta}{dt^2} - n^2u + \frac{Pa}{A} = 0 . \end{aligned} \qquad (15)$$

De la première de ces équations nous pouvons tirer : $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{m^2}\frac{du}{dt}$; portons ceci dans la seconde équation, nous obtenons :

$$\frac{d^2u}{dt^2} + m^2n^2u - m^2\frac{Pa}{A} = 0 . \qquad (16)$$

Posons

$$u = \frac{Pa}{An^2} + \frac{1}{m^2 n^2} A_0 e^{-\xi t} .$$

L'équation (16) pourra alors s'écrire

$$\frac{1}{m^2 n^2} \xi^2 A_0 e^{-\xi t} + A_0 e^{-\xi t} + m^2 \frac{Pa}{A} - m^2 \frac{Pa}{A} = 0 , \qquad (16')$$

d'où nous tirons

$$\xi^2 + m^2 n^2 = 0 , \quad \text{d'où} \quad \xi_1 = imn \quad \text{et} \quad \xi_2 = - imn .$$

Nous avons donc

$$u = \frac{Pa}{An^2} + A_1 \cos mnt + A_2 \sin mnt . \qquad (17)$$

En nous servant des relations posées plus haut, nous obtenons successivement :

$$\frac{d\theta}{dt} = - \frac{1}{m^2} \frac{du}{dt} = \frac{n}{m} A_1 \sin mnt - \frac{n}{m} A_2 \cos mnt ,$$

$$\theta = - \frac{1}{m^2} A_1 \cos mnt - \frac{1}{m^2} A_2 \sin mnt + K' ,$$

$$\varphi = \frac{Pa}{An^2} t + \frac{1}{mn} A_1 \sin mnt - \frac{1}{mn} A_2 \cos mnt + K'' .$$

En nous donnant les quatre valeurs initiales (pour $t = 0$) de θ, φ, $\frac{d\theta}{dt}$ et $\frac{d\varphi}{dt}$, soit θ_0 [1], φ_0, θ'_0 et u_0, nous pourrons écrire quatre équations pour déterminer les quatre constantes A_1, A_2, K' et K''.

Nous aurons

$$\theta_0 = - \frac{1}{m^2} A_1 + K' , \qquad \theta'_0 = - \frac{n}{m} A_2 .$$
$$\varphi_0 = - \frac{1}{mn} A_2 + K'' , \qquad u_0 = \frac{Pn}{An^2} + A_1 . \qquad (18)$$

On en tire

$$A_2 = - \frac{m}{n} \theta'_0 , \qquad A_1 = u_0 - \frac{Pa}{An^2} ,$$
$$K'' = \varphi_0 - \frac{1}{n^2} \theta'_0 , \qquad K' = \theta_0 + \frac{n_0}{m^2} - \frac{Pa}{Am^2 n^2} . \qquad (18')$$

[1] θ_0 doit être voisin de 0.

Considérons le cas particulier où $\varphi_0 = \theta_0 = u_0 = \theta'_0 = 0$. On aura :

$$A_2 = 0 , \quad K'' = 0 . \quad A_1 = -\frac{Pa}{An^2} , \quad K' = -\frac{Pa}{An^2 m^2} ,$$

θ et φ s'écriront alors

$$\theta = \frac{Pa}{An^2 m^2} \cos mnt - \frac{Pa}{An^2 m^2} = -Pa(1 - \cos mnt) ,$$

$$\varphi = \frac{Pa}{An^2} t .$$

On voit que l'axe de la toupie décrit une cycloïde [1].

Remarquons encore que si α est très grand on peut négliger r_0 devant α et écrire $m^2 = n^2 = \frac{C\alpha}{A}$, θ et φ deviennent alors

$$\theta = -\frac{Pa}{Am^4}(1 - \cos m^2 t) ,$$

$$\varphi = \frac{Pa}{Am^4}(m^2 t - \sin m^2 t) .$$

Plus α augmente, plus m augmente et plus la cycloïde s'aplatit et la période d'oscillation de l'axe de la toupie autour de l'horizontale $\frac{2\pi}{m^2}$ diminue.

Nous avons supposé au début que θ s'écarte peu de 0. Cherchons les conditions pour qu'il en soit ainsi. Il est évident qu'il faut d'abord que θ_0 soit ou nul ou très peu différent de zéro.

Ecrivons l'expression générale de θ. On aura

$$\theta = -\frac{u_0}{m^2} \cos mnt + \frac{Pa}{An^2 m^2} \cos mnt + \frac{1}{mn} \sin mnt + \frac{u_0}{m^2} - \frac{Pa}{An^2 m^2} + \theta_0$$

$$= \left[\frac{u_0}{m^2} - \frac{Pa}{An^2 m^2}\right][1 - \cos mnt] + \frac{1}{mn}\theta'_0 \sin mnt + \theta_0 .$$

On voit tout de suite que pour que θ s'écarte peu de θ_0 (qui lui-même est nul ou très petit), il faut que m et n soient très grands, c'est-à-dire α très grand.

§ 4. — Cherchons les conditions d'une précession simple

[1] Au lieu de θ et φ il faut considérer les coordonnées $-m\theta$ et $n\varphi$.

(sans nutation) et uniforme, c'est-à-dire les conditions pour que pendant tout le mouvement $\theta = \theta_0$ et $\frac{d\varphi}{dt} = u_0$ où θ_0 et u_0 sont déterminés par les conditions initiales.

La deuxième équation (14) pour $\theta = \theta_0$ prendra la forme

$$\cos\theta[Ar_0 - C(\alpha + r_0)]\frac{d\varphi}{dt} + Pa\cos\theta = 0 \ . \qquad (19)$$

Cette équation admet comme première solution $\cos\theta = 0$ ou $\theta = \theta_0 = \frac{\pi}{2}$, $\frac{d\varphi}{dt}$ prend alors la valeur constante $u_0 = r_0$.

L'axe de la toupie étant au début vertical, reste vertical et la toupie tourne autour de son axe avec une vitesse angulaire constante $(\alpha + r_0)$. Nous avons vu plus haut que la toupie amenée dans une position légèrement différente de la verticale oscille autour de cette position si α est suffisamment grand. C'est donc une position stable.

Passons maintenant à la seconde solution. L'équation (19) peut être transcrite de la façon suivante

$$[Ar_0 - C(\alpha + r_0)]\frac{d\varphi}{dt} + Pa = 0 \ , \qquad (19')$$

ou en remarquant que $r_0 = \frac{d\varphi}{dt}\sin\theta$

$$[(A - C)u^2\sin\theta = C\alpha u - Pa \ , \qquad (19'')$$

où $\frac{d\varphi}{dt}$ a été remplacé par u. On obtient pour $\sin\theta$ l'expression suivante

$$\sin\theta = \frac{C\alpha u - Pa}{(A - C)u^2} \ . \qquad (20)$$

Supposons pour plus de généralité que l'axe de la toupie est articulé sur son support. On aura alors les conditions suivantes $-1 \leqq \sin\theta \leqq 1$, ce qui revient à

$$-(A - C)u^2 \leqq C\alpha u - Pa \leqq (A - C)u^2 \ , \qquad (21)$$

Supposons $A \neq C$. Les conditions (21) peuvent être écrites sous la forme d'inégalités suivantes :

$$(A - C)u^2 - C\alpha u + Pa \geqq 0 \ , \qquad (I)$$

$$(A - C)u^2 + C\alpha u - Pa \geqq 0 \ . \qquad (II)$$

Les racines de (I) égalé à zéro sont

$$u = \frac{C\alpha \pm \sqrt{C^2\alpha^2 - 4Pa(A - C)}}{2(A - C)} .$$

Les racines de (II) égalé à zéro sont

$$u = \frac{-C\alpha \pm \sqrt{C^2\alpha^2 + 4Pa(A - C)}}{2(A - C)} .$$

Nous ne considérerons que les cas où α est suffisamment grand pour que les racines ne soient pas imaginaires. Soit $A > C$[1]. On voit tout de suite que les racines de (I) sont toutes deux positives, et puisque pour $u = 0$, (I) est positif, u doit être situé *en dehors* de l'intervalle des racines. De même, les racines de (II) sont l'une positive et l'autre négative, et puisque pour $u = 0$ (II) est négatif, u doit être situé *en dehors* de l'intervalle des racines. Il est facile de s'en convaincre graphiquement.

Soit maintenant $A < C$. On voit tout de suite que les racines de (I) sont l'une positive et l'autre négative, et puisque pour $u = 0$, (I) est positif, u doit être situé *dans* l'intervalle des racines. De même, les racines de (II) sont toutes deux positives, et puisque pour $u = 0$, (II) est négatif, u doit être situé *dans* l'intervalle des racines. Il est facile de s'en convaincre graphiquement.

On voit donc que pour qu'il y ait précession simple et uniforme dans les cas où $A \neq C$, u doit prendre une valeur satisfaisant aux conditions trouvées plus haut.

Soit encore $A = C$. L'équation (19″) s'écrira

$$C\alpha u - Pa = 0 .$$

d'où

$$u = \frac{Pa}{C\alpha} . \tag{22}$$

On voit tout de suite que $\sin\theta$ peut prendre une valeur quelconque tandis que u est déterminé par (22).

§ 5. — Etudions maintenant la stabilité du mouvement de précession simple et uniforme. Ce mouvement est déterminé

[1] C'est ce qui arrive le plus souvent.

par θ_0 et u_0, qui sont des constantes satisfaisant aux équations (14). Supposons qu'on amène l'axe de la toupie dans une position $\theta = \theta_0 + x$ et qu'on fasse varier sa vitesse de précession d'une quantité $\frac{dy}{dt}$, de sorte que $\frac{d\varpi}{dt} = u_0 + \frac{dy}{dt}$. Nous supposons que x et $\frac{dy}{dt}$ sont des infiniment petits. Cherchons s'ils sont des fonctions périodiques du temps. Si cela avait lieu, le mouvement serait évidemment stable.

En développant $\cos\theta$ et $\sin\theta$ suivant les puissances de x et en négligeant les infiniment petits du second ordre, on obtient :

$$\cos\theta = \cos\theta_0 - x\sin\theta_0 , \tag{23}$$

$$\sin\theta = \sin\theta_0 + x\cos\theta_0 . \tag{24}$$

D'autre part, puisque θ_0 et u_0 sont des constantes, on peut écrire :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{dx}{dt} , \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2} , \qquad \frac{d^2\varpi}{dt^2} = \frac{d^2y}{dt^2} , \tag{25}$$

Remplaçons dans les équations (14) r_0 par $\frac{d\varpi}{dt}\sin\theta$ et portons ensuite dans les équations obtenues les valeurs (23), (24) et (25).

En négligeant les infiniment petits de second ordre et en remarquant que u_0 et θ_0 sont des solutions de ces équations, on obtiendra

$$\begin{gathered} A\frac{d^2y}{dt^2}\cos\theta_0 - Au_0\sin\theta_0\frac{dx}{dt} + (C - A)u_0\sin\theta_0\frac{dx}{dt} + C\alpha\frac{dx}{dt} = 0 , \\ A\frac{d^2x}{dt^2} + (A - C)2u_0\frac{dy}{dt}\sin\theta_0\cos\theta_0 - Pax\sin\theta_0 - C\alpha\frac{dy}{dt}\cos\theta_0 \\ + C\alpha u_0 x\sin\theta_0 = 0 . \end{gathered} \tag{26}$$

Posons maintenant

$$x = F\sin(\rho t + f) \qquad \text{et} \qquad y = G\cos(\rho t + f) .$$

On aura :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \rho F\cos(\rho t + f) , & \frac{d^2x}{dt^2} &= -\rho^2 F\sin(\rho t + f) \\ \frac{dy}{dt} &= -\rho G\sin(\rho t + f) , & \frac{d^2y}{dt^2} &= -\rho^2 G\cos(\rho t + f) . \end{aligned} \tag{27}$$

En portant ces expressions dans (26) et en divisant la première équation par $\cos(\rho t + f)$ et la seconde par $\sin(\rho t + f)$ on obtient

$$\begin{aligned} &- A\rho^2 G \cos\theta_0 - A u_0 \sin\theta_0 \rho F + (C - A) u_0 \sin\theta_0 \rho F + C\alpha\rho F = 0 \\ &- A\rho^2 F - (A - C) 2u_0 \sin\theta_0 \cos\theta_0 \rho G - Pa \sin\theta_0 F \\ &\qquad + C\alpha \cos\theta_0 \rho G + C\alpha u_0 \sin\theta_0 F = 0 . \end{aligned} \tag{28}$$

De la première de ces équations on tire

$$F = G\rho \cos\theta_0 \frac{A}{C\alpha + (C - A) u_0 \sin\theta_0 - A u_0 \sin\theta_0} .$$

Portons cette expression de F dans la deuxième des équations de (28) et divisons par $G\rho \cos\theta_0$, nous aurons

$$\begin{aligned} A^2\rho^2 + [C\alpha + (C - A) u_0 \sin\theta_0 - A u_0 \sin\theta_0][(A - C) 2u_0 \sin\theta_0 - C\alpha] \\ + APa \sin\theta_0 - AC\alpha u_0 \sin\theta_0 = 0 . \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \rho^2 = &\frac{[(A - C) u_0 \sin\theta_0 + A u_0 \sin\theta_0 - C\alpha][(A - C) 2u_0 \sin\theta_0 - C\alpha]}{A^2} \\ &- \frac{Pa \sin\theta_0}{A} + \frac{C\alpha u_0 \sin\theta_0}{A} . \end{aligned} \tag{29}$$

Pour que ρ soit réel, c'est-à-dire ρ^2 positif, il faut que α soit suffisamment grand ; x et $\frac{dy}{dt}$ seront alors périodiques et le mouvement u_0, θ_0 sera stable. Plus α est grand, plus ρ est grand aussi et plus la période de x et $\frac{dy}{dt}$ est petite, cette période étant égale à $\tau = \frac{2\pi}{\rho}$.

Si α est assez grand on peut écrire :

$$\rho^2 = \frac{C^2\alpha^2}{A^2} + \frac{C\alpha u_0 \sin\theta_0}{A} - \frac{Pa \sin\theta_0}{A} .$$

Il y a intérêt à ce que Pa soit petit, le mouvement est alors plus stable, τ étant plus petit.

Pour $\theta_0 = 0$, (29) devient $\rho^2 = \frac{C^2\alpha^2}{A^2}$ et on retrouve le résultat du § 3. En effet, la période est définie pour $\theta_0 = 0$ par $\tau = \frac{2\pi}{\rho}$ où $\rho = \frac{C\alpha}{A}$ et dans le § 3 par $\tau = \frac{2\pi}{mn}$, ce que pour $\theta_0 = 0$ devient $\frac{2\pi}{mn}$ où $mn = \frac{C\alpha}{A}$ puisque $r_0 = 0$.

Zurich, 1917.

CHRONIQUE

Société suisse des professeurs de mathématiques.

Réunion de Baden, 6 octobre 1917.

Cette société a tenu son assemblée annuelle à Baden, le 6 octobre 1917. Une quarantaine de personnes étaient présentes. Le président, M. K. Matter, professeur à Aarau, rappela, dans son rapport annuel, le débat de l'an dernier, relatif à la réforme de l'enseignement moyen ; les thèses établies alors par les trois rapporteurs ont été unifiées, puis transmises au Département fédéral de l'Intérieur.

L'objet principal, soumis aux délibérations de l'assemblée, était la préparation des futurs professeurs de mathématiques. La « Société suisse des professeurs du corps enseignant secondaire » (Gymasiallehrerverein) avait mis à l'ordre du jour de sa séance du lendemain la *formation du personnel enseignant secondaire*. Il s'agissait d'informer les Universités et écoles supérieures suisses des réformes, désirées par les maîtres secondaires actuels, relatives à la préparation de leurs futurs collègues. Dans ce but, les maîtres enseignant la même branche avaient été invités à formuler leurs désirs ; ceux-ci devaient être discutés dans la séance, pour être ensuite adressés, après unification, aux établissements d'instruction supérieure.

Dans le but de préparer la réponse de la Société des professeurs de mathématiques, son président avait fait une enquête auprès des membres et condensé les réponses obtenues en un projet de vœux qu'il demandait à l'assemblée d'examiner ; celle-ci a adopté ce projet, après l'avoir un peu modéré. Nous faisons suivre ce compte-rendu d'une version française du texte adopté et nous bornons à quelques observations.

En 1912 déjà, la société avait demandé aux universités l'introduction d'une préparation pédagogique pratique des candidats à l'enseignement des mathématiques. L'École polytechnique fédérale, les universités de Bâle et Zurich répondirent favorablement

en instituant un cours de méthodologie mathématique ; les universités de Berne, Genève et Lausanne firent aussi quelques pas, plus ou moins timides, dans cette voie. Un premier groupe de vœux réclame des établissements d'instruction supérieure toute l'attention que la question mérite, ainsi que la considération des résultats déjà obtenus et des expériences faites. Plus que tout autre enseignement, celui des mathématiques peut avoir sur le développement de l'esprit de l'enfant une influence heureuse ou néfaste suivant qu'il est bien ou mal compris. Le jeune maître doit donc être averti de ses responsabilités, des difficultés qui l'attendent, des expériences faites par ses aînés, qui lui en épargneront de pénibles pour lui et ses élèves ; il doit aussi être exactement informé du but à poursuivre et mis au courant d'une ou ou deux des méthodes les meilleures, divergentes si possible, employées pour atteindre le but. L'assemblée était unanime à considérer une telle initiation comme indispensable.

L'enseignement universitaire actuel donne aux futurs maîtres une préparation scientifique reconnue comme parfaitement suffisante, en général. Cependant, il laisse un peu trop de côté la revision des principes. Les étudiants ont rarement l'occasion de revoir les questions d'arithmétique, d'algèbre ou de géométrie élémentaires. Or, l'enseignement de ces matières à l'école moyenne exige que le maître les domine complètement. Il est donc urgent que nos universités organisent, à l'usage des candidats à l'enseignement, des cours de mathématiques élémentaires envisagés d'un point de vue supérieur et destinés, d'une part, à donner une vue d'ensemble sur le domaine des mathématiques dites élémentaires, d'autre part, à en approfondir les chapitres les plus importants, de façon à pénétrer jusqu'aux principes fondamentaux des mathématiques et du raisonnement logique, et à faire entrevoir les rapports de ces principes avec la théorie de la connaissance.

Les applications des mathématiques tendent à jouer dans l'enseignement un rôle de plus en plus important. Imitant leurs collègues primaires dans les leçons d'arithmétique, les professeurs de mathématiques cherchent aujourd'hui à établir le contact entre leur enseignement et la vie de tous les jours ; leur but est de tenir en éveil l'intérêt des élèves en leur montrant le rôle, de plus en plus grand, que jouent les mathématiques dans les diverses branches de l'activité humaine. En conséquence, l'enseignement universitaire doit viser à donner aux futurs maîtres une vue d'ensemble des applications des mathématiques et les initier aux méthodes des mathématiques dites « appliquées ».

Les maîtres actuels réclament donc la création de cours et d'exercices nouveaux destinés à combler les lacunes qui viennent d'être signalées. En revanche, ils demandent la suppression de

toutes les matières du programme jusqu'ici obligatoires, qui ne contribuent que peu à la préparation scientifique ou professionnelle des candidats.

Enfin, et c'est là le vœu qui a été le plus discuté et modéré par l'assemblée, il a paru à beaucoup que certains enseignements universitaires devaient être réformés dans le sens d'une plus grande activité des étudiants. Celle-ci, dans les cours-conférences est plutôt réceptive, alors qu'une active collaboration de l'élève serait plus féconde. Il est désirable que les leçons d'exercices, les séminaires, les discussions de questions d'actualité ou de principe soient rendues plus nombreuses et prennent peu à peu la place de beaucoup des leçons dans lesquelles le professeur « expose » son cours.

Dans la seconde partie de la séance, M. Schüepp, professeur à Zurich, présenta un intéressant rapport[1] sur « *les séries infinies, objet d'enseignement à l'école moyenne* ». L'auteur développa cette idée que les applications de la théorie des séries, soit au calcul des logarithmes et des fonctions circulaires, soit aux sciences naturelles ou techniques, n'offrent pas une récompense suffisante des efforts qu'exige l'étude de ce sujet si difficile ; seul le but d'établir sur des bases solides la notion de limite en serait une justification. Mais alors, l'enseignement dépasserait le niveau moyen des élèves. Ceux-ci ne pourraient plus être actifs et la valeur de cet enseignement en serait considérablement diminuée. Le mieux est de bannir ce sujet du programme. Le rapporteur proposa de demander à l'Ecole polytechnique fédérale de radier de son programme d'admission le sujet « notions sur les séries ».

Précisément une lettre de M. Grossmann, professeur à l'Ecole polytechnique de Zurich, vint annoncer que cet établissement allait reviser ses règlements, en particulier son programme d'admission. L'assemblée, en présence de l'importance de cette question pour l'avenir des écoles moyennes, chargea son comité de faire les études et démarches nécessaires afin que notre société puisse faire entendre sa voix.

La discussion du travail de M. Schüepp fut renvoyée à une prochaine séance, tandis que M. Merz, professeur à Coire, présenta une étude très goûtée sur le sujet *Zur Erkenntnistheorie über Raum und Zahl.* (L'espace et le nombre dans la théorie de la connaissance. Nous ne pouvons résumer ici cette intéressante conférence, le texte en sera, du reste, envoyé aux membres de la Société.

C. Jaccottet (Lausanne).

---

[1] Reproduit dans le *16tes Jahrbuch des Vereins schweizerischer Gymnasiallehrer*, Verlag Sauerländer & Cie, Aarau.

Propositions relatives à la préparation professionnelle des futurs professeurs de mathématiques,

à présenter aux établissements suisses d'instruction supérieure
de la part de la Société suisse
des professeurs de mathématiques.

1. La plupart des universités suisses ne donnent pas à la préparation pédagogique pratique des futurs maîtres de mathématiques la considération qui lui revient ; cette préparation est indispensable à une bonne formation du personnel enseignant secondaire. C'est pourquoi la S. S. P. M. renouvelle aux établissements suisses d'instruction supérieure l'appel pressant, qu'ils veuillent bien vouer toute leur attention au vœu déjà ancien des professeurs enseignant actuellement les mathématiques dans les écoles moyennes, savoir : *les candidats à l'enseignement doivent être initiés à leur tâche future par des maîtres capables, expérimentés, en activité dans les écoles moyennes.*

2. La S. S. P. M. désire que, dans l'organisation de cet enseignement, les expériences faites dans les deux établissements zurichois soient mises à profit ; ces expériences ont fait l'objet d'un travail de M. Brandenberger, publié dans les numéros 13, 14 et 16 de la *Schweizerische Lehrerzeitung*, année 1917. Nous en transcrivons ici les points principaux :

a) La préparation pédagogique pratique doit coïncider avec la seconde partie de la préparation scientifique.

b) Cette préparation se fait par le moyen de *cours, deux heures hebdomadaires pendant deux semestres ; le cours du premier semestre* est consacré à la *didactique générale* et peut être suivi par tous les candidats à l'enseignement des sciences ; celui du *second semestre* est réservé à la *didactique spéciale* de l'enseignement mathématique. Le but visé par cet enseignement doit toujours être la préparation pratique des candidats.

3. La fréquentation de ces cours doit être rendue obligatoire pour les candidats à l'enseignement.

4. Les établissements d'instruction supérieure ne donnent aux futurs professeurs que peu d'occasions d'approfondir les matières qu'ils auront à enseigner et, par là, d'arriver à une compréhension parfaitement claire de ces matières ; il manque le plus souvent à ces candidats à la fois une vue d'ensemble et une pénétration qui aille jusqu'aux idées fondamentales, en petit nombre d'ailleurs.

Avant toute autre chose, il est donc nécessaire d'organiser un « Cours, avec exercices, de *mathématiques élémentaires envisagées d'un point de vue supérieur* » cours qui devrait comprendre aussi des notions d'histoire des mathématiques.

La préparation relative aux *applications mathématiques* est aussi insuffisante. Pour satisfaire aux exigences de l'enseignement, tel qu'il est actuellement conçu, il est désirable que les universités et écoles techniques supérieures de notre pays organisent un ou plusieurs cours spéciaux destinés à initier les futurs maîtres aux applications des mathématiques.

Nous pensons en première ligne aux observations astronomiques avec des moyens rudimentaires, à la connaissance des méthodes et des instruments astronomiques les plus importants, aux exercices de topographie en vue de l'école, et, surtout, aux exercices de travaux manuels, afin que les futurs professeurs puissent, plus tard, guider leurs élèves dans la confection de modèles divers, etc. Ici se place le désir, maintes fois exprimé, que le futur professeur de mathématiques soit, par l'université, mis au courant des questions économiques et politiques en rapport avec sa branche (comptabilité, affaires de bourse et de banque, questions d'assurances) de façon qu'il puisse collaborer à l'instruction civique des élèves. Enfin, il faut relever le fait, que dans plusieurs universités, la préparation en géométrie, spécialement en géométrie descriptive, laisse à désirer en ce que les étudiants ne sont pas suffisamment astreints à la construction d'épures exactes, sur la planche à dessin.

5. La S. S. P. M. se rend parfaitement compte que la réalisation de ses vœux n'est possible que si le programme des études est allégé dans d'autres domaines. Il adresse aux établissements d'instruction supérieure la requête qu'on veuille bien décharger les candidats à l'enseignement des mathématiques des cours qui n'ont de valeur ni pour leur culture scientifique mathématique, ni pour leur vocation future, cela en vue de la réalisation des propositions qui viennent d'être faites. En tout cas, seules les sciences mathématiques et les sciences exactes voisines devraient faire partie du programme d'étude.

6. La S. S. P. M. recommande aux professeurs universitaires d'accorder plus de temps que cela n'a été coutume jusqu'ici aux leçons d'exercices, et moins, aux leçons d'exposition, dans le but d'introduire les étudiants à l'étude directe des traités existants et des mémoires originaux. L'enseignement supérieur devrait considérer comme tâches principales : l'établissement solide des notions fondamentales et l'examen des problèmes à la lumière de la théorie de la connaissance et de l'histoire.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Danemark. — M. P. Heegaard, professeur à l'Université de Copenhague, est nommé professeur à l'Université de Christiania.

M. T. Bonnesen est nommé professeur de géométrie descriptive à l'École polytechnique de Copenhague.

France. — *Académie des Sciences.* — M. G. Kœnigs est nommé membre de la section de mécanique, en remplacement de M. H. Léauté, décédé.

Italie. — *Académie royale dei Lincei.* — M. G. Castelnuovo, professeur à l'Université de Rome, a été nommé associé national. — MM. Borel, Goursat, Hadamard (Paris) et Lamb (Manchester) ont été nommés associés étrangers.

Académie des Sciences de Turin. — Ont été nommés membres correspondants, dans la section des mathématiques pures, MM. Berzolari, (Pavie), Marcolongo (Naples), Pincherle (Bologne), Ricci et Severi (Padoue); dans la section des mathématiques appliquées et sciences techniques : MM. Albenga, Colonnetti et Maggi (Pise), Reina (Rome).

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents M. E.-G. Togliatti, pour la géométrie projective et descriptive, à l'Université de Turin; M. A. Vergerio, pour l'analyse infinitésimale, à l'Université de Bologne.

Periodico di Matematica. — La direction du *Periodico di Matematica* et du *Supplemento* annonce qu'en raison de la guerre, elle se voit obligée de suspendre temporairement la publication de ses deux périodiques.

Suisse. — M. E. Hecke, professeur à l'Université de Bâle, est nommé professeur à l'Université de Gœttingue.

M. H. Weyl, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, est nommé professeur à l'Université de Breslau.

Société mathématique suisse. — La prochaine assemblée annuelle aura lieu à Lugano le 10 septembre 1918.

Nécrologie.

Georges Cantor. — On annonce la mort, survenue le 6 janvier 1918, de M. Georges Cantor, professeur à l'Université de Halle. Fils d'un négociant danois établi à Pétrograd, Georges Cantor naquit dans cette ville le 3 mars 1845. Il fit ses études à l'Ecole polytechnique de Zurich et aux universités de Gœttingue et de Berlin. Admis en qualité de privat-docent à l'Université de Halle en 1869, il fut nommé professeur extraordinaire en 1872, professeur ordinaire en 1879.

Doué d'un esprit inventif d'une grande originalité, G. Cantor ouvrit des voies nouvelles aux sciences mathématiques. Son nom restera indissolublement lié à la *théorie des ensembles* dont il fut le véritable créateur. On sait qu'il resta d'abord sceptique au sujet de la portée de sa théorie et qu'il hésita pendant près de dix ans à la faire connaître. Il ne la fit paraître que lorsqu'il fut

persuadé que l'emploi de la notion d'ensemble devenait indispensable en Analyse. Il publia ses recherches dans les *Mathem. Annalen*, à partir de 1879. Une traduction française de ses premiers travaux parut dans les *Acta Mathematica* (Tome II, 1883).

M. E.-E. Levi, professeur d'analyse infinitésimale à l'Université de Gênes, capitaine du génie, est tombé le 28 octobre 1917 à l'âge de 34 ans. Il comptait déjà parmi les meilleurs mathématiciens italiens. Ses recherches pénétrantes sur les équations aux dérivées partielles du type parabolique et sur les fonctions analytiques de plusieurs variables ont apporté des contributions de tout premier ordre.

E.-R. Neovius. — Le 26 septembre 1917 est décédé à Copenhague le mathématicien finlandais Edvard Rudolf Neovius. Né le 14 novembre 1851, à Frederikshamn en Finlande, il fit ses études aux Ecoles polytechniques de Zurich et de Dresde. En 1876 il fut nommé professeur de mathématiques à l'Ecole polytechnique de Helsingfors, puis en 1883 à l'Université. Il porta surtout son attention sur la théorie des surfaces minima et sur les problèmes de statistique.

Membre du parti des anciens, Neovius devint ministre des finances en 1900. Après les changements politiques survenus en 1905, il se retira à Copenhague dans le pays d'origine de sa femme.

M. Max Simon, professeur honoraire de l'Université de Strasbourg, est décédé en janvier 1918, dans sa 74e année. Il prit une large part au développement de l'enseignement mathématique en Allemagne. On lui doit aussi d'intéressantes contributions à l'Histoire des mathématiques.

M. A. Viterbi, professeur de géodésie à l'Université de Pavie, est tombé le 18 novembre 1917 sur les bords de la Piave, pendant qu'il y organisait la résistance en qualité de capitaine du génie. Il était né à Mantoue le 27 septembre 1873. Ses nombreux travaux scientifiques se rapportent non seulement à la géodésie, mais encore à l'analyse et à la mécanique.

BIBLIOGRAPHIE.

Annuaire du Bureau des Longitudes pour l'année 1918. — 1 vol. in-16 de x-870 p. avec 33 fig., 5 cartes célestes, 3 planches magnétiques et 1 portrait ; 2 fr. net, franco 2 fr. 35 ; Gauthier-Villars & C°, Paris.

Cet excellent Recueil renferme cette année, après les documents astronomiques, des tableaux relatifs à la métrologie, aux monnaies, aux heures légales, à la météorologie, à la réfraction astronomique, au magnétisme terrestre, aux données physiques et chimiques.

Cet Ouvrage ne se trouvera pas seulement sur la table du technicien, du physicien, du mathématicien ; chacun voudra le consulter pour avoir sous les yeux la liste des constantes usuelles, et aussi pour lire les intéressantes Notices de cette année : *Les cadrans solaires*, par G. Bigourdan ; *Le calendrier égyptien*, par G. Bigourdan ; *L'heure en mer*, par J. Renaud ; *Le Soleil et le magnétisme terrestre*, par M. Hamy ; *La vie et l'œuvre de Gaston Darboux*, par Emile Picard. Le *Supplément* qui donne le *Calendrier pour l'année 1919* sera vivement apprécié également de nombre de lecteurs.

R. Fueter. — **Synthetische Zahlentheorie.** — 1 vol. in-8°, viii-271 p.; G. J. Göschen, Leipzig, 1917.

La théorie des nombres est peut-être de toutes les disciplines mathématiques, celle dans laquelle les traités à l'usage des étudiants ont le moins été renouvelés par les progrès de la théorie. Un véritable fossé y existe entre la plupart des traités dits élémentaires et les ouvrages qui traitent des parties élevées de la théorie. Aussi, beaucoup d'étudiants, de mathématiciens même, n'apercevant dans les parties élémentaires qu'un agglomérat de théorèmes non sans beauté, il est vrai, croient la théorie des nombres inorganique, sans méthodes ou notions générales et de ce fait n'en abordent guère les parties supérieures.

Montrer que la théorie des nombres est un tout organique, que sa tâche est de construire des domaines de nombres algébriques (corps, modules, idéaux, rayons, etc.), de les relier entre eux par le calcul, d'en étudier les relations et les actions réciproques est le but de la théorie *synthétique* de M. Fueter. Synthétique ne s'oppose donc pas ici à analytique, mais veut exprimer la tendance du livre à montrer l'unité de la théorie des nombres dans toutes ses parties, élémentaire et supérieure. En vertu de cette conception, M. Fueter introduit déjà les domaines de nombres dans le corps des nombres rationnels et il développe les éléments de telle manière que les mêmes concepts et les mêmes méthodes se retrouvent dans tout le livre.

Limité par les conditions de la collection dans laquelle paraît ce livre,

M. Fueter a cru préférable de renoncer à exposer la théorie générale des corps algébriques, mais d'exposer par contre, le plus complètement possible la théorie des corps des racines l^{mes} de l'unité. Ces corps sont en effet ceux dont la nature est la plus simple et c'est en eux qu'éclate le mieux l'harmonie et la belle ordonnance de la théorie.

Voici d'ailleurs la table des matières.

Introduction, p. 1-3. — Chapitre I. Domaines de nombres rationnels, p. 4-34. Les opérations fondamentales. Le module. Multiplication et division des modules et des idéaux. Décomposition univoque des idéaux. Idéaux premiers. Le rayon. Répartition en classes d'idéaux. Les congruences. — Chapitre II. Le guide d'un idéal premier, p. 35-67. Nombre des classes. Notions fondamentales sur la théorie des groupes. Le groupe des classes d'idéaux, théorème de Fermat. Nombres primitifs, calcul des indices. Restes quadratiques. — Chapitre III. Les racines l^{mes} de l'unité, p. 68-96. La fonction exponentielle. Les racines de l'unité. Représentation géométrique et théorie algébrique des racines de l'unité. Le corps des racines l^{mes} de l'unité. La base et le nombre entier. — Chapitre IV. La théorie des corps de racines l^{mes} de l'unité, p. 97-132. Le module. L'idéal. Décomposition univoque des idéaux, idéaux premiers. Rayon, congruence, classe. — Chapitre V. La recherche des idéaux premiers, p. 133-162. Généralités. Les nombres premiers $p \neq l$. Recherche des idéaux premiers de $p \neq l$. Le nombre premier l — Chapitre VI. Les unités, p. 163-186. Théorèmes sur les unités. Unités indépendantes. Le système des unités indépendantes. Les unités fondamentales. — Chapitre VII. Le calcul du nombre des classes, p. 187-209. La fonction ζ. La fonction ζ généralisée. La racine $(l-1)^{me}$ de l'unité. Le calcul de $\zeta_K(x)$. Simplification et transformation. Le nombre des classes. — Chapitre VIII. Les lois de réciprocité, p. 223-257. Position du problème. Sous-groupe et sous-corps, qui appartiennent à l. Le calcul de $K_2(l_1)$ et de $K_3(l_1)$. Les lois de décomposition dans $K_2(l_1)$, loi de réciprocité quadratique. Les lois de décomposition dans $K_3(l_1)$. Loi de réciprocité cubique.

Je ne puis m'étendre ici sur l'ordonnance du livre et le soin apporté à rendre claires et précises les notions fondamentales de la théorie des nombres, à illustrer le livre de remarques historiques intéressantes. Le livre de M. Fueter se lit aisément, le texte en est clair, concis sans obscurité, la disposition typographique excellente. Il est de plus facile à consulter grâce aux nombreuses tables qui le précèdent et le suivent. Nos étudiants trouveront en lui un guide qui leur fera voir l'harmonie et l'ordre qui règnent dans la théorie des nombres. M. Plancherel (Fribourg).

J.-G. Gale. — **Matemáticas Financieras**, primera parte : Intereses y annalidades ciertas. — 1 vol. in-8° de 231 p. ; A. G. Santos, Buenos-Aires, 1916.

Ce traité de mathématiques financières est en quelque sorte le premier volume d'une nouvelle édition de « l'Algèbre financière » du même auteur, parue en 1910. Cette nouvelle édition est notablement augmentée et développée afin de satisfaire aux exigences actuelles. Il se trouve en effet que grâce à la création d'une Faculté des Sciences économiques, cette étude a pris, dans la République Argentine, un nouvel essor.

Ce volume est consacré aux notions générales relatives à l'intérêt, à l'es-

compte et aux annuités certaines. Les questions concernant plus spécialement les calculs dépendant d'événements aléatoires, tels que l'assurance sur la vie humaine, feront ultérieurement l'objet d'une seconde partie. L'auteur a suivi, dans cet ouvrage, le plan assez généralement adopté pour ce genre d'études. Premièrement l'intérêt simple et composé et l'escompte. Deuxièmement les annuités certaines, soit les annuités de placement, commencement ou fin de périodes, avec intérêt simple et composé et comparaison des deux méthodes; les amortissements, les annuités temporaires, différées et anticipées; les rentes perpétuelles; les annuités variables; enfin les emprunts par obligations à lots et sans lots. Un appendice d'une quinzaine de pages donne aussi les premiers éléments du calcul des probabilités et des notions sommaires de calcul des différences finies.

Les notations employées sont celles des actuaires anglais. Ce livre est appelé à rendre service tout spécialement aux débutants, car les sujets y sont présentés avec clarté et simplicité, mais sans grands développements. Ils n'exigent pas du lecteur des connaissances mathématiques très étendues et de plus sont accompagnés d'applications numériques propres à les concrétiser. R. Masson (Paris).

Alfred Pringsheim. — **Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre** (Reelle und komplexe Zahlen, unendliche Algorithmen). Erster Band. Zweite Abteilung; *Unendliche Reihen mit reellen Gliedern.* — 1 vol. gr. in-8°, 222 p.; 12 M. 40; B. G. Teubner, Leipzig.

Le fascicule II des Leçons de M. Pringsheim est entièrement consacré à la *théorie des séries à termes réels* dont il fournit une étude très approfondie. Après avoir examiné avec soin les conditions nécessaires et suffisantes pour la convergence et la divergence des séries et de l'extension aux séries de la notion de limite d'après Cauchy, l'auteur étudie d'abord les séries à termes positifs d'après le principe de la comparaison des séries. Il passe ensuite en revue les différents critères de convergence qu'il établit sur des principes tout à fait généraux. Puis viennent les séries à termes positifs et négatifs, leur convergence absolue, les séries semi-convergentes, le calcul numérique et la transformation des séries. Un dernier chapitre traite des séries à double entrée et de leur application à la multiplication des séries.

Cet ouvrage constitue une excellente introduction à la théorie des fonctions d'une variable réelle. H. F.

L. Selme. — **Principe de Carnot contre formule empirique de Clausius.** — 1 vol. p. in-8°, 148 p., 4 fr. 50; H. Dunod et E. Pinat, Paris, 1917.

Pour tout système physique, quelle que soit sa constitution, il existe une fonction de l'état du système, appelée entropie, dont la valeur, si le système est isolé, c'est-à-dire complètement séparé du reste de l'univers, ne peut être diminuée d'aucune façon. Voici le contenu simple et clair de la formule empirique de Clausius. Il n'y a pas lieu de l'opposer au principe de Carnot dont elle interprète admirablement bien la signification mathématique. Nous ne pouvons donc approuver le titre choisi par M. Selme pour son essai sur la thermodynamique. Les deux principes en question sont absolument équivalents en ce qui concerne les phénomènes observables.

Quant à la signification profonde et hypothétique du principe de Carnot, il

est impossible de le ramener aux équations de la mécanique, si l'on admet l'existence réelle des transformations irréversibles. Citons à ce propos l'opinion émise par H. Poincaré à la fin de son traité de thermodynamique :

« Toutes les tentatives de cette nature doivent être abandonnées; les seules qui aient quelque chance de succès sont celles qui sont fondées sur l'intervention des lois statistiques, comme, par exemple, la théorie cinétique des gaz. »

M. Selme tend à tourner la difficulté en niant la réalité des phénomènes irréversibles. Cette manière de voir étant en contradiction manifeste avec l'expérience journalière et immédiate, l'artifice ne donne aucune satisfaction. On ne peut en effet se contenter, dans cette question, des raisonnements généraux mais on doit demander des preuves ou, à défaut de preuves, des modèles mécaniques impossibles à fournir, comme nous avons vu plus haut.

Malgré ces objections de forme et de fond, nous avons lu avec beaucoup d'intérêt l'ouvrage de M. Selme, et nous y avons trouvé à côté d'erreurs manifestes, beaucoup de vues justes et d'idées saisissantes. L'auteur, en se proposant d'amener de la clarté sur certaines questions, simples en apparence, qu'on traite généralement d'une façon fort embrouillée, y a réussi dans beaucoup de cas. C'est dire que son livre mérite d'être lu et qu'il sera lu avec profit. A. Schidlof (Genève).

G. Vivanti. — **Nuovi Esercizi di Analisi infinitesimale** tratti dalle Matematiche applicate. — 1 vol. gr. in-8°, 520 p.; 20 lires; Mattei & C°, Pavie.

Nous avons déjà eu l'occasion de signaler les *Lezioni di Analisi infinitesimale* et les *Esercizi di Analisi* publiés par M. Vivanti. Ce nouveau recueil d'Exercices vient compléter ces ouvrages en tenant plus spécialement compte des besoins de l'enseignement technique supérieur et des cours de mathématiques générales destinés aux physiciens et aux chimistes. Il est donc appelé à rendre de grands services à une catégorie toujours plus nombreuse d'étudiants, et il sera tout particulièrement bien accueilli par ceux qui sont chargés de l'enseignement pratique des mathématiques supérieures.

Les problèmes, au nombre de 300, appartiennent aux domaines les plus variés. L'auteur les a groupés par branches dans l'ordre suivant :

Cinématique. — Statique. — Théorie du potentiel. — Dynamique. — Hydromécanique et Hydraulique. — Physique. — Chimie physique et thermodynamique. — Technique. — Astronomie et Géodésie. — Calcul des probabilités, économie et statistique. — Problèmes divers.

Un indice systématique donne un groupement des problèmes suivant les propriétés mathématiques sur lesquelles s'appuie leur résolution.

Un indice des termes techniques familiarise l'étudiant avec les principaux termes qui interviennent dans les problèmes de ce recueil. H. F.

A. N. Whitehead. — **The Organisation of Thougt.** — 1 vol. cart. in-8°; VII-228 p.; 6 £; Williams and Norgate, Londres, 1917.

Au premier abord ce volume semble être d'un contenu disparate. Les chapitres qui le composent, à l'exception du dernier, ne sont pas autre chose que des discours, présidentiels pour la plupart, dont le sujet est adapté à des circonstances spéciales et dont voici les titres :

I. Buts de l'éducation ; un plan de réforme. — II. Education technique ; ses rapports avec la science et la littérature. — III. Une école polytechnique pendant la guerre. — IV. Le cycle des études mathématiques. — V. Les principes des mathématiques ; leurs rapports avec l'enseignement élémentaire. — VI. L'organisation de la pensée. — VII. Analyse de quelques idées scientifiques. — VIII. Espace, temps et relativité.

A les lire cependant, ces études si riches donnent malgré leur diversité une impression une et forte qui tient à la personnalité de leur auteur. M. Whitehead est non seulement un savant distingué dont les travaux sur la logique sont universellement connus et appréciés ; mais c'est un homme à l'esprit et au cœur largement ouverts, qui comprend d'une façon remarquable les besoins à la fois simples et complexes de l'âme enfantine.

Aussi le petit volume que nous analysons est-il rempli de réflexions générales du plus haut intérêt et dont la valeur pédagogique est incontestable.

Le maître doit adapter son enseignement aux besoins de l'enfant et non l'inverse. « Un maître d'école est en fait un missionnaire ; les sauvages ce sont « les idées qui règnent dans l'esprit de l'enfant ; le missionnaire manquerait à sa tâche principale s'il craignait d'exposer son corps aux attaques des cannibales » (p. 102).

Dans cette lutte du maître avec l'élève, deux commandements essentiels doivent être observés : « Ne pas enseigner trop de choses et ce que l'on enseigne, l'enseigner à fond » (p. 3). Il faut en outre proscrire impitoyablement les idées inertes, c'est-à-dire les idées qui sont reçues d'une manière passive par l'âme de l'enfant, sans pouvoir être utilisées, ou prouvées, ou introduites dans de nouvelles combinaisons » (p. 4).

Le travail enfin doit être une joie pour le maître comme pour l'élève ; sans joie, pas de travail véritable ni d'invention féconde. Le proverbe selon lequel « la nécessité est la mère de l'invention » est faux, car la découverte scientifique a toujours sa source dans l'exercice joyeux de la curiosité scientifique (p. 32).

Quant à l'instruction proprement dite, on peut la concevoir sous trois types différents : littéraire, scientifique, technique. Chacun d'eux a sa place marquée dans le développement de la civilisation, à condition de ne pas être exclusif. En particulier l'éducation technique bien comprise a pour le développement de l'esprit une importance plus grande qu'on ne le croit généralement. Il y a une coordination incessante entre la pensée et la sensation ; leur activité mutuelle se conditionne constamment. Dans l'ajustement de la pensée au réel la main joue un rôle de premier ordre et c'est une question de savoir si la main de l'homme a créé son cerveau, ou bien l'inverse (p. 42).

Ce qui précède suffit à montrer dans quel esprit M. Whitehead aborde le grave problème concernant l'éducation mathématique.

Il faut en soumettre la matière à une rigoureuse sélection toujours adaptée au but poursuivi (p. 72) ; il faut pour cela s'en tenir aux lois principales et aux théorèmes essentiels.

L'enseignement des mathématiques a pour premier but d'apprendre aux enfants par la pratique le maniement des idées abstraites et le pouvoir de déduction logique. Mais c'est à l'expérience de fixer dans chaque cas donné le degré d'abstraction et de déduction dont l'esprit de l'élève est capable. Par suite, il faut souvent renoncer à prouver tout ce qui logiquement pour-

rait l'être ; il faut se borner à faire comprendre par des exercices appropriés des propositions dont la démonstration trop délicate surchargerait inutilement le cerveau de l'enfant.

En géométrie par exemple, l'on insistera sur l'idée de congruence en montrant qu'elle se ramène à une corrélation point par point ; on insistera également sur l'idée de *similarité* comme étant une extension de la première. L'on passera ensuite à l'étude de la trigonométrie qui permet d'introduire l'idée de *périodicité* (p. 84 et sq).

C'est dans le même esprit que l'on traitera la géométrie analytique, l'algèbre et et les éléments du calcul différentiel et intégral. Nous ne pouvons analyser ici le programme à la fois rigoureux et clair que M. Whitehead trace de l'enseignement de ces branches, ni mentionner les conseils judicieux et expérimentés qu'il donne à ce propos.

Les pages consacrées aux rapports de la logique et des mathématiques nous paraissent toutefois mériter une mention spéciale, tant elles sont suggestives et originales.

Dans l'étude de ces rapports on peut, nous dit M. Whitehead, distinguer quatre sections : Arithmétique, algébrique, fonctions générales, analytique (p. 116 et sq).

La 1re section en effet traite du rapport des propositions entre elles exactement comme l'*arithmétique* traite des nombres définis. Soit un agrégat de propositions données, p, q, r, s, etc., dont quelques-unes sont posées comme vraies ou fausses ; le problème consiste à établir par le moyen de ces dernières la vérité et la fausseté de toutes les autres.

La 2me section ou section algébrique comprend des opérations qui offrent avec l'*algèbre* une analogie frappante. Comme on le sait, l'algèbre remplace les nombres par des lettres (variables ou paramètres) et s'attache surtout à l'étude des formes. La fonction propositionnelle introduite en logique par M. Russell tend au même but. Par exemple « la chaleur spécifique de x est de 0,033 » est une fonction propositionnelle à une seule variable. Parmi les valeurs que l'on peut substituer à x les unes transforment la fonction propositionnelle en des propositions dépourvues de sens, telles que : « la chaleur spécifique de la vertu est de 0,033 ». Mais il en est d'autres qui aboutissent à des propositions vraies ou fausses. Leur ensemble constitue le type de l'argument x. Enfin la série de valeurs (et celle-là seulement) pour lesquelles f (x) devient une proposition vraie se nomme une classe. Par exemple, la classe des corps tels que le mercure dont la chaleur spécifique est 0,033.

Les mêmes raisonnements s'appliquent aux fonctions propositionnelles à 2, 3, etc., variables.

La troisième section de la logique est constituée par la théorie des *fonctions générales*. Elle s'occupe du passage de l'intensivité à l'extension ainsi que du problème de la dénotation, et voici comment. Il peut arriver que la même série de valeurs satisfasse à deux et même plusieurs fonctions proportionnelles à une variable. Ces valeurs, comme nous l'avons vu, constituent une classe. Il est donc nécessaire de caractériser cette dernière pour elle-même et indépendamment des circonstances particulières par lesquelles elle peut être obtenue.

D'une façon analogue, mais plus compliquée, certains problèmes concernant les fonctions propositionnelles à 2 variables impliquent la notion de « corrélation » exactement comme les fonctions d'un argument impliquent

des classes. Lorsqu'il y a trois variables, la corrélation est triangulaire et ainsi de suite.

Les idées mises en lumière dans cette troisième section logique sont essentielles à la construction des fonctions logiques « dénotantes » qui renferment comme cas spécial les fonctions mathématiques élémentaires (sinus, logarithme, etc.) et c'est pourquoi cette section est appelée théorie de fonctions.

La section *analytique* enfin recherche les propriétés des constructions logiques spéciales, c'est-à-dire, des classes et des corrélations d'un genre spécial. L'ensemble des mathématiques, ni plus ni moins, y est renfermé, mais en en tant qu'il comporte des idées qui jusqu'alors n'y avaient pas été rattachées. Il est impossible d'expliquer même brièvement comment les mathématiques se développent par construction au moyen des concepts de classe, de corrélation simple et multiple qui ont été établies dans la troisième section.

Il est d'autres sujets non moins délicats que M. Whitehead aborde et qu'il éclaire d'un jour nouveau, en particulier les problèmes relatifs au temps, à l'espace et à la relativité. Nous ne pouvons que rappeler la maîtrise et la perspicacité avec lesquelles M. Whitehead les traite.

Il serait en tout cas à désirer que son ouvrage fût traduit en langue française. Par sa concision, par la clarté et la largeur de ses vues, par la variété même des questions qu'il aborde, il rendrait des services importants à tous ceux que préoccupe le problème d'une éducation qui, sans rien sacrifier aux exigences d'une pensée rigoureuse, serait cependant adaptée à l'âme de l'enfant et aux besoins si multiples de la vie moderne.

Arnold Reymond, Université de Neuchâtel (Suisse).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Acta mathematica, rédigé par G. Mittag-Leffler, Stockholm. — T. 41, fasc. 1 et 2. — A. Wiman : Ueber den Zusammenhang zwischen dem Maximalbetrage einer analytischen Funktion und dem grössten Betrage bei gegebenem Argumente der Funktion. — Jean Chazy : Sur la limitation du degré des coefficients des équations différentielles algébriques à points critiques fixes. — Fr. Riesz : Ueber lineare Funktionalgleichungen. — G. Polya : Ueber die Potenzreihen, deren Konvergenzkreis natürliche Grenze ist. — G. H. Hardy and J. E. Littlewood : Contributions to the theory of the Riemann Zeta-function and the theory of the distribution of primes.

American Journal of Mathematics. Volume XXXIX, Nos 3 et 4. — T. Cohen : A Comitant Curve of the Plane Quartic. — W. C. Graustein : On two Related Transformations of Space Curves. — P. R. Rider : The Space Problem of the Calculus of Variations in Terms of Angle. — S.

Beatty: Derivation of the Complementary Theorem from the Riemann-Roch Theorem. — E. W. Chittenden: On the Equivalence of Relations $K_{q_1 q_2 m}$. — E. Kircher: Some Properties of Certain Finite Algebras. — W. A. Manning: The Primitive Groups of Class 15. — B. H. Camp; Multiple Integrals Over Infinite Fields and the Fourier Multiple Integral. — G. Greenhill: The potential of a Lens, and Allied Physical Problems. — R. D. Carmichael: On the Asymptotic Character of Functions Defined by series of the Form $\Sigma c_n g(x+n)$. — G. A. Miller: Possible Characteristic Operators of a Group. — William L. Hart; Linear Differential Equations in Infinitely Many Variables. — Howard H. Mitchell: On the Asymptotic Value of Sums of Power Residues. — J. A. Bullard: On the Structure of Finite Continous Groups.

Annales de la Faculté des sciences de Toulouse. 3e série, tome VI, année 1914. — S. Lattès: Sur une forme canonique nouvelle des substitutions linéaires. — A. Buhl: Sur les transformations et extensions de la formule de Stokes. — Ch. Riquier: Sur les systèmes partiels linéaires composés d'équations en nombre égal à celui de leurs fonctions inconnues. — P. Duhem: Sur les oscillations électriques. — A. Buhl: Sur les transformations et extensions de la formule de Stokes.

Archiv der Mathematik und Physik. 26. Band. — C. Caratheodory und H. Rademacher: Ueber die Eindeutigkeit im Kleinen und im Grossen stetiger Abbildungen von Gebieten. — E. Magin: Die stereographische Projektion der Kegelschnitte. — K. Popoff: Sur la notion de l'aire d'une surface. — E. Jahnke: Zur Theorie der vierdimensionalen Vektoren und Dyaden.— H. Du Bois: Gewisse ebene Blattkurven und deren elektromagnetische Bedeutung. — L. Braude: Ueber die Einhüllenden gewisser Kreis- und Kugelscharen. — E. Müller. Kreise als Loxodromen. Fr. A. Willers: Graphische Integration einiger gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung mittels Strahlkurven. — K. Knopp: Einheitliche Erzeugung und Darstellung der Kurven von Peano, Osgood und v. Koch. — W. Blaschke: Ueber eine Ellipseneigenschaft und über gewisse konvexe Kurven. — Th. Wahlen: Beiträge zur Ballistik. — O. Szasz: Ueber arithmetische Eigenschaften gewisser unendlicher Zahlenfolgen und zugehöriger Potenzreihen. — J. Horn: Analytische Lösungen von Summengleichungen Rezensionen.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Roma 2e semestre, 1917. — L. Bianchi: Sulle superficie secondarie nei sistemi tripli ortogonali pseudosferici. — Id.: Ricerche sulle congruenze di sfere e sul rotolamento di superficie applicabili. — Id.: Sul teorema generale di permutabilità per le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi N-pli ortogonali. — M. Bottasso: Sulle trasformazioni asintotiche delle curve. — O. Chisini: Osservazioni sui punti singolari delle curve multiple di una superficie algebrica. — A. Del Re: Hamiltoniani e gradienti di hamiltoniani e di gradienti, laplassiani, parametri differenziali. — F. Enriques: Sull'analisi delle singolarità puntuali delle superficie algebriche mediante divisioni di polinomi. — R. Giordano: Ricerche in analisi estensiva. — Id.: Proprietà invariantive degli hamiltoniani e dei gradienti nell' analisi generale di Grassmann. — G. A. Maggi: Nuove applicazioni di una formola commutativa. — R. Marcolongo: Su alcuni operatori superficiali. — A. M. Molinari: Sulla deriva-

zione ad indice qualunque. — G. Sannia : Le serie di funzioni sommate col metodo di Borel generalizzato. — P. Scalizzi : Soluzione di alcune equazioni del tipo di Abel. — G. Scorza : Il rango di una matrice di Riemann.

E. Almansi : L'ordinaria teoria dell'elasticità et la teoria delle deformazioni finite. — A. Antoniazzi : Sopra il movimento di rotazione diurna della Terra. — G. Colonnetti : Su certi stati di coazione elastica che non dependono da azioni esterne. — O. Lazzarino : Rappresentazione cinematica della rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti interni stazionari. — Id. : Assi permanenti nel moto di rotazione di un corpo nel quale sussistono dei moti imterni stazionari. — Sulla rotazione di un corpo di rivoluzione nel quale sussistono dei moti interni variabili. — T. Levi-Civita : *ds* einsteiniani in campi newtoniani. — Id. : Generalità et prima approssimazione. — G. Armellini : Ricerche sopra le perturbazioni del satellite di Nettuno.

Bulletin des Sciences Mathématiques, rédigé par E. Picard et P. Appell; secrétaire de la Rédaction. E. Lebon. Tome XL, juillet-décembre 1917. — E. Goursat : Sur les transformations ponctuelles qui conservent les volumes. — P. Drouin : Sur l'impossibilité d'une certaine généralisation des transformations de contact. — E. Picard : Les Sciences mathématiques en France depuis un demi-siècle. — E. Delassus : Sur la notion générale de mouvement des systèmes soumis à des liaisons d'ordre quelconque. — Sierpinski : Un théorème sur les ensembles fermés. — N. Kryloff : Sur quelques formules de l'interpolation généralisée. — H. Vergne : Sur les équations générales de la Mécanique analytique. — A. Buhl : Sur les sommes abéliennes de volumes cyclidoconiques.

Bulletin de la Société Mathématique de France. — Tome XLIV, fasc. 4. — Heegaard : Sur l'Analysis situs.

Tome XLV, fasc. 1 et 2. — M. Fréchet : Le théorème de Borel dans la théorie des ensembles abstraits. — F. Turrière : Sur la détermination des surfaces par une relation entre des segments de normales. — Globa Mikhailenko : Sur le mouvement d'une bille de billard. — Maillet : Sur l'équation indéterminée $a^m + B^m = c^m$ en nombres entiers différents de zéro, quand m est fractionnaire et sur une équation analogue plus générale. — M. Fouché : Sur la transformation de Lie. — Ch. de la Vallée Poussin : Sur les expressions qui s'écartent le moins de zéro dans un intervalle. — E. Cartan : La déformation des hypersurfaces dans l'espace conforme réel à $n \geqq 5$ dimensions.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. 2me semestre 1917. — *2 juillet.* — M. Akimoff : Transcendantes de Fourier-Bessel à plusieurs variables. — *9 juillet.* — A. Thibaut : Sur les courbes tautochrones. — *16 juillet.* — J. Priwaloff : Sur la convergence des séries trigonométriques conjuguées. — E. Vessiot : Sur les équations canoniques et sur les développements en séries de la Mécanique céleste. — Amsler : Sur le développement en fraction continue d'une irrationnelle quadratique. — *23 juillet.* — Leau : Sur la mesure des ensembles linéaires. — *6 août.* — G. Humbert : Sur la fraction continue de Stephan Smith. — *13 août.* — G. Humbert : Sur la réduction (mod. 2) des formes quadratiques binaires. — E. Cahen : Sur la suite de meilleure spproximation absolue pour un nombre. — *27 août.* — G. Humbert : Quelques propriétés de formes quadratiques binaires indéfinies. — *3 septembre.* — G. Remoundos : Sur la classification

des points transcendants des inverses des fonctions entières ou méromorphes. — G. Humbert : Quelques propriétés des formes quadratiques binaires indéfinies. — *10 septembre.* — H. Duport : Sur les systèmes orthogonaux. — P. Humbert : Sur les ombilics de la surface piriforme. — M. Frechet : Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits. — *17 septembre.* — M. Petrovitch : Un nouveau procédé d'évaluation numérique des coefficients de séries. — *1er octobre.* — Angelesco : Sur un procédé de sommation des séries trigonométriques. — W. Sierpinski et N. Lusin : Sur une décomposition d'un intervalle en une infinité non dénombrable d'ensembles non mesurables. — *8 octobre.* — W.-H. Young : Sur la théorie des séries trigonométriques. — *15 octobre.* — G. Scorza : Les fonctions abéliennes non singulières à multiplication complexe. — N. Lusin et W. Sierpinski : Sur une propriété du continu. — *22 octobre.* — Sur l'intégration de certains systèmes d'équations différentielles. — S. Bays : Sur les systèmes cycliques de Steiner. — H. Larose : Sur le mouvement uniforme d'un fil dans un milieu résistant. — M. Brillouin : Champ électromagnétique d'un élément de courant constant dans un milieu anisotrope biaxe. — *5 novembre.* — W. de Tannenberg : Sur une équation fonctionnelle et les courbes unicursales sphériques. — *12 novembre.* — Maurice Frechet : Les fonctions prolongeables. — *19 novembre.* — W.-H. Young : Sur les séries des polynomes de Legendre. — G. Humbert : Sur le développement en fraction continue de Stephen Smith, des irrationnelles quadratiques. — Pierre Humbert : Réduction de l'équation des jacobiens critiques. — Paul Appell : Expériences de M. Carrière sur le mouvement aérien de balles sphériques légères, tournant autour d'un axe perpendiculaire au plan de la trajectoire. — C. Guichard : Sur les réseaux C tels que l'équation de Laplace qui y correspond soit intégrale. — Pierre Humbert : Expression de la fonction de Legendre de seconde espèce. — C. Humbert : Sur le développement en fraction continue de Stephan Smith, des irrationnelles quadratiques. — *26 novembre.* — Félix Ventre : Théorème sur les charges roulantes. — Emile Picard : Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie de la distribution de l'électricité avec la loi de Neumann. — W. de Tannenberg : Sur une question d'analyse indéterminée. — *3 décembre.* — J. Bosler : Les météorites et l'excentricité terrestre. — *10 décembre.* — Séance annuelle. — *17 décembre.* P. Fajon : Sur les substitutions rationnelles. — E. Baticle : Sur la détermination des dimensions les plus avantageuses des principaux éléments d'une installation de force hydraulique. — Mesnager : Sur la démonstration des formules rigoureuses des poutres et des plaques. — *24 décembre.* — Hardy et Littlewood : Sur la convergence des séries de Fourier et des séries de Taylor. — Guillet : Mesure de l'intensité du champ de la pesanteur : Pendule de Galilée et tube de Newton. — *31 décembre.* — Humbert : Sur une communication de G. Julia intitulée « Sur les substitutions rationnelles ». — G. Julia : Sur les substitutions rationnelles. — Akimoff : Transcendantes de Fourrier-Bessel à plusieurs variables.

2. Livres nouveaux :

Annuaire pour l'an 1918 publié par le Bureau des Longitudes. Avec des notices scientifiques de MM. Bigourdan, Renaud et Hamy. — 1 vol. in-16, 676 p. ; 2 fr. ; Gauthier-Villars, Paris.

L. Bieberbach. — **Differential- und Integralrechnung**, I — 1 vol. in-2; M. 8 (Teubner's Leitfäden); B. G. Teubner, Leipzig.

E. Borel. — **Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe**, rédigé par G. Julia. — 1 vol. in-8°, 166 p.; 7 fr. 50; Gauthier-Villars, Paris.

C. Caratheodory. — **Vorlesungen über reelle Funktionen.** — 1 vol. gr. in-8°, 704 p.; 28 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Flamard. — **Calcul des systèmes élastiques de la Construction.** — 1 vol. in 8°, 197 p.; 12 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

Zoel G. de Galdeano. — **Tratado General de Matemáticas** comprendiendo en la introducción las lecciones il a la 20 del curto de extension universitaria de 1915 a 1916 (Extension Universitaria). — 1 vol. in-8°, 112 p.; 2,50 ptas.; G. Casanal, Zaragoza.

Zoel G. de Galdeano. — **Correlaciones matemática-fisico-quimicas.** lecciones explicadas por el profesor en los cursos especiales y de ampliacion organizados per la junta de la Facultad de Ciencias de Zaragoza en el curso de 1915-1916 (Extension Univarsitaria). — 1 vol. in-8°, 88 p.; 2 ptas.; C. Casanal, Zaragoza.

Zoel G. de Galdeano. — **Mis Ultimos programas de Elementos de Cálculo infinitesimal y Complementos** con nociones de las teorias correspondientes. — 1 vol. in-8°, 116 p.; 4 ptas.; G. Casanal, Zaragoza.

L. Kollros. — **Géométrie descriptive.** — 1 vol. cart. in-8°, 154 p., 170 fig.; 5 fr.; Orell Füssli, Zurich.

Edm. Landau. — **Einführung in die elementare u. analytische Theorie der algebraischen Zahlen u. der Ideale.** — 1 vol. in-8°, 143 p.; 6 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

L. Lecornu. — **Cours de Mécanique** professé à l'Ecole polytechnique, tome III. — 1 vol. in-8°, 668 p.; 25 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

W. Lietzmann. — **Was ist Geld?** (Mathem. Bibliothek. Band 30.) — 1 vol. in-8°, 55 p.; 1 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

M. d'Ocagne. — **Cours de Géométrie pure et appliquée** de l'Ecole polytechnique. Tome II: Cinématique appliquée. Stéréométrie. Statique graphique. Calcul graphique. Calcul grapho-mécanique. Nomographie. — 1 vol. in-8°, IV-364 p., avec 170 fig.; 18 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

E. Picard. — **Œuvres de Charles Hermite** publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences. Tome IV. — 1 vol. in-8°, 596 p.; 25 fr.; Gauthier-Villars; Paris.

L. Zoretti. — **Tables numériques usuelles** à l'usage des ingénieurs, des étudiants des Facultés, des élèves des Lycées et des Ecole primaires supérieures, etc. — 1 vol. in-8°, 52 p.; 3 fr.; Gauthier-Villars, Paris.

SUR LES CONGRUENCES LINÉAIRES DE CUBIQUES GAUCHES DOUÉES D'UNE SEULE COURBE SINGULIÈRE

PAR

Lucien GODEAUX (Armée belge).

Dans un travail publié il y a quelques années, j'avais abordé le problème de la détermination des congruences linéaires de coniques douées d'une seule courbe singulière [1]. J'avais ensuite pu étendre ma méthode au cas de congruences linéaires de courbes planes, sans points singuliers, dotées d'une ou deux courbes singulières (l'une de ces dernières n'étant pas une droite [2]).

A la fin de mon premier travail, j'avais émis l'idée que la même méthode pourrait être utilisée dans la recherche des congruences linéaires de cubiques gauches. C'est dans cet ordre d'idées qu'est écrit le travail suivant. J'ai abordé l'étude des congruences linéaires de cubiques gauches dotées d'une seule courbe singulière. Le résultat auquel je suis arrivé est malheureusement négatif, en ce sens que j'établis que :

Il n'existe aucune congruence linéaire de cubiques gauches douée d'une seule courbe singulière.

J'ajouterai que la même méthode peut être appliquée à la recherche des complexes linéaires de cubiques gauches,

---

[1] *Recherches sur les systèmes de coniques de l'espace* (Thèse présentée à l'Université de Liége). *Mémoires de la Soc. R. des Sc. de Liége*, 1911.

Je rappelle à cette occasion que, par une autre méthode, M. MONTESANO avait auparavant déterminé toutes les congruences linéaires de coniques (*Rend. R. Accad. di Napoli*, 1895).

[2] *Sulle congruence lineari di curve piane dotate di una sola curva singolare* (*Rend. Circ. di Palermo*, 1912). — *Sur les congruences linéaires de courbes planes* (*Bull. de l'Acad. des Sciences de Cracovie*, 1912).

dans un espace linéaire à quatre dimensions, comme j'espère le montrer dans un prochain travail.

La méthode employée ici ne fait appel qu'à des propriétés élémentaires de Géométrie; elle est presque entièrement basée sur cette remarque que dans une congruence linéaire de courbes, une courbe de la congruence ne peut rencontrer une surface engendrée par ∞^1 courbes de la congruence, qu'en des points singuliers.

1. — Soit Σ une congruence linéaire, irréductible, de cubiques gauches, dotée d'une seule courbe singulière C, d'ordre h. Supposons que les courbes de Σ ne touchent, le long de C, aucune surface circonscrite à cette courbe.

Désignons par m le nombre de courbes de Σ s'appuyant sur deux droites gauches, ne rencontrant ni l'une, ni l'autre C, par μ le nombre de ces courbes passant par m point de C et s'appuyant sur une droite ne rencontrant pas C.

Les cubiques de Σ, s'appuyant sur une droite d, forment donc, en général, une surface F_d d'ordre m, passant μ fois par C.

Une cubique de Σ, n'appartenant pas à F_d, rencontre cette surface en des points situés sur C, sans quoi Σ ne serait pas linéaire. De plus, ces points sont en général distincts, sans quoi les courbes de Σ toucheraient, le long de C, une surface passant par cette courbe. On sait que les cubiques gauches d'une congruence linéaire ont dix points singuliers. On a donc

$$3m = 10\mu ,$$

c'est-à-dire, ε étant un entier positif,

$$m = 10\varepsilon , \qquad \mu = 3\varepsilon .$$

Deux surfaces F_d, $F_{d'}$ ont en commun la courbe C, les m courbes de Σ s'appuyant sur les droites d, d' et les courbes exceptionnelles éventuelles de Σ. De plus, F_d et $F_{d'}$ ne se touchent pas, en général, le long de C; on a donc pour l'intersection de ces deux surfaces, une expression de la forme

$$m^2 = 3m + h\mu^2 + \rho ,$$

$\rho \geqq 0$ provenant de l'existence éventuelle de courbes exceptionnelles.

Par suite,

$$\rho = (100 - 9h)\varepsilon^2 - 30\varepsilon .$$

On a donc

$$(100 - 9h)\varepsilon \geqq 30 ,$$

d'où $h \leqq 11$.

D'autre part, si la courbe C appartenait à une surface cubique, les courbes de Σ rencontreraient celle-ci en dix points et seraient entièrement sur cette surface, ce qui est absurde. Une courbe d'ordre inférieur à sept se trouvant toujours sur une surface cubique, on a donc $h > 6$. Nous parvenons donc à ce premier résultat que :

La courbe singulière de Σ a l'ordre 7, 8, 9, 10 *ou* 11.

2. — Les courbes exceptionnelles de Σ peuvent se ranger en deux catégories ; celles de la première catégorie sont des droites qui, comptées chacune trois fois, forment des cubiques de Σ. De telles droites ne font pas, en général, partie des surfaces F_d ; elles s'appuyent en dix points sur C et ne peuvent par suite exister que si $h = 11$.

Les courbes exceptionnelles de la deuxième catégorie sont des droites ou des coniques qui, avec ∞^1 courbes (coniques ou droites) forment des cubiques de Σ. Soit r une telle courbe. Désignons par R la surface lieu des courbes qui, avec r, forment des courbes de Σ.

Il ne peut exister une cubique de Σ, non dégénérée, s'appuyant sur r en un point non situé également sur C, car une telle cubique appartiendrait à toutes les surfaces F_d, ce qui est absurde. La surface lieu des cubiques de Σ s'appuyant sur r se scinde donc en la surface R et les surfaces lieux des courbes de Σ passant par les points communs à C et à r (surfaces d'ordre $\mu = 3\varepsilon$). Il convient d'examiner en détail les différents cas qui peuvent se présenter.

a) Supposons que r soit une droite qui, avec ∞^1 coniques, forme des courbes de Σ. Une de ces coniques ne peut rencontrer une surface F_d en dehors de C et de r, par suite, si α désigne le nombre de ses points d'appui sur C, r est multiple d'ordre $2m - \alpha\mu$, c'est-à-dire d'ordre $20\varepsilon - 3\alpha\varepsilon$ pour

F_d. D'autre part, ces coniques étant en nombre ∞^1, doivent satisfaire à sept conditions dont l'une est la condition de rencontrer r et les autres des conditions d'appui sur C. On a donc $\alpha \geqq 6$, d'où $\alpha = 6$. Il en résulte que r s'appuie en quatre points distincts ou non sur C. Soit β le nombre de ces points d'appui distincts. La surface Fr, relative à r, se scinde en la surface R, d'ordre $20\varepsilon - 3\alpha\varepsilon = 2\varepsilon$ et β surfaces d'ordre $\mu = 3\varepsilon$, lieu des cubiques de Σ passant par les points d'appui de r sur C. On a donc

$$10\varepsilon = 2\varepsilon + 3\beta\varepsilon ,$$

équation impossible en nombres entiers. Il n'existe donc pas de droite exceptionnelle de l'espèce étudiée ici.

b) Supposons que r soit une conique qui, avec ∞^1 droites, forme des courbes de Σ.

On trouve, en raisonnant comme plus haut, que la conique r s'appuie en huit points distincts ou non sur C et est multiple d'ordre 4ε pour les surfaces F_d. On doit donc avoir, les cubiques de Σ s'appuyant sur r formant une surface d'ordre $2m = 20\varepsilon$,

$$2m = 4\varepsilon + \beta\mu ,$$

β étant le nombre d'appuis distincts de r sur C. On en conclut $\beta = \frac{16}{3}$, ce qui est absurde.

c) Supposons enfin que r soit une droite qui, comptée deux fois, forme avec ∞^1 droites, engendrant une surface R, ∞^1 courbes de Σ. On trouve cette fois que ces ∞^1 droites s'appuyent en deux ou en trois points sur C.

1° Les ∞^1 droites s'appuyent en deux points sur C. Alors r est multiple d'ordre 4ε pour les surfaces F_d et s'appuie en huit points distincts ou non, sur C. Si β est le nombre d'appuis distincts de r sur C, on doit avoir

$$m = 4\varepsilon + \beta\mu ,$$

ou $\beta = 2$. La courbe C a son ordre au moins égal à 10.

2° Les ∞^1 droites s'appuyent en trois points sur C. Alors r est multiple d'indice ε pour F_d et s'appuie en sept points

sur C. Si β a la même signification que tantôt, on doit avoir

$$m = \varepsilon + \beta\mu ,$$

d'où $\beta = 3$. C a l'ordre au moins égal à 10.

3. — Soient, pour fixer les idées, x_1 le nombre de droites exceptionnelles multiples d'ordre 4ε pour F_d, x_2 celui des droites exceptionnelles multiples d'ordre ε pour ces surfaces. On a

$$\rho \geqq (16x_1 + x_2)\varepsilon^2 ,$$

le signe $>$ n'étant valable que s'il y a contact entre les surfaces F_d le long des droites exceptionnelles.

On en déduit

$$(100 - 9h - 16x_1 - x_2)\varepsilon \geqq 30 .$$

Si $h = 7$, $x_1 = x_2 = 0$, $\rho = 0$ et on a $\varepsilon = \frac{30}{31}$, ce qui est absurde.

Si $h = 8$, $x_1 = x_2 = 0$, $\rho = 0$ et $\varepsilon = \frac{30}{28}$, ce qui est impossible.

Si $h = 9$, $x_1 = x_2 = 0$, $\rho = 0$, $\varepsilon = \frac{30}{19}$, ce qui est impossible.

Lorsque $h = 10$, on a

$$(10 - 16x_1 - x_2)\varepsilon \geqq 30 ,$$

d'où $x_1 = 0$.

Remarquons d'ailleurs que x_2 ne peut être supérieur à 2, car si $x_2 = 3$, la quadrique passant par les trois droites exceptionnelles rencontre C en 21 points et contient donc cette courbe et par suite, toutes les cubiques de Σ, ce qui est absurde.

Lorsque $h = 11$, on a

$$(1 - 16x_1 - x_2)\varepsilon \geqq 30 .$$

d'où $x_1 = x_2 = 0$, $\rho = 0$, $\varepsilon = 30$.

Nous aurons donc quatre cas à examiner.

1° $h = 10$, $x_2 = 0$, $\rho = 0$.

2° $h = 10$, $x_2 = 1$.

3° $h = 10$, $x_2 = 2$.

4° $h = 11$, $\rho = 0$.

4. — Lorsque la courbe C est d'ordre 10 et que $x_2 = 0$, Σ ne possède aucune courbe exceptionnelle. On a nécessairement $\rho = 0$, $\varepsilon = 3$. Les surfaces F_d sont d'ordre 30 et passent neuf fois par C.

La courbe C possède certainement des trisécantes, car autrement, en la projetant d'un de ses points sur un plan, on verrait que son genre est égal à 28 ; mais alors, elle appartiendrait à une infinité de quadriques, ce qui est absurde.

Considérons la surface F_d lorsque d est une trisécante de C. F_d se scinde en quatre surfaces dont trois sont les surfaces d'ordre 9, lieux des cubiques de Σ passant par les points d'appui de d sur C. La quatrième est par suite une surface cubique. Nous avons déjà vu que C ne peut se trouver sur une surface cubique, donc les cubiques de Σ s'appuyant sur une trisécante de C, forment une surface cubique et s'appuyent sur C en des points fixes. La surface F_d passant neuf fois par C, il en résulte qu'une surface, lieu des courbes de Σ passant par un point de C, passe trois fois par cette courbe. Mais une courbe de Σ, n'appartenant pas à une telle surface, ne peut la rencontrer en dehors de C. Or on trouve qu'elle la rencontre, sur C en $10 \times 3 = 30$ points, ce qui est impossible. On est conduit à une absurdité et on ne peut donc avoir $d = 10$, $x_2 = 0$.

5. — Nous traiterons simultanément les cas où l'on a $h = 10$, $x_2 = 1$ ou $x_2 = 2$. Nous avons vu qu'une droite exceptionnelle r est multiple d'ordre ε pour une surface F_d. Les plans tangents à cette surface et passant par r sont les plans comptant les ε droites qui, avec r, forment des courbes de Σ, qui s'appuyent sur d. Ils sont donc variables avec d et on a, par suite,

$$\rho = x_2 \varepsilon^2 , \qquad \text{c'est-à-dire} \qquad \varepsilon = \frac{30}{10 - x_2} .$$

Or, ni pour $x_2 = 1$, ni pour $x_2 = 2$, ε n'est entier. On ne peut donc avoir $h = 10$, $x_2 > 0$.

On en conclut que si Σ existe, sa courbe singulière C est d'ordre 11.

6. — Si $h = 11$, on a $\rho = 0$ et, par conséquent, $\varepsilon = 30$. Les surfaces F_d sont d'ordre 300 et passent 90 fois par C.

Considérons un point P non situé sur C. Par ce point il passe une droite s'appuyant en deux points sur chaque cubique de Σ. Le lieu de ces points d'appui est une surface Φ_P. Soit n la classe de Σ, c'est-à-dire le nombre de cubiques de Σ ayant pour bisécante une droite arbitraire. La surface Φ_P est rencontrée par une droite passant par P, et en dehors de ce point, en $2n$ points. D'autre part, Φ_P contient la cubique de Σ passant par P et les droites projetant cette cubique de P sont tangentes à Φ_P en P. Le point P est donc double pour Φ_P et cette surface est d'ordre $2(n + 1)$.

Les cubiques de Σ passant par un point de C forment une surface d'ordre 90 passant 27 fois par C, car une cubique quelconque de la congruence ne peut rencontrer cette surface en dehors de C. On peut encore dire que pour deux points de C passent 27 cubiques de Σ. Si ν est la multiplicité de C pour la surface Φ_P, cela signifie que la droite joignant P à un point P′ de C est la corde de ν courbes de Σ passant par P′. Il en résulte que la droite PP′ rencontre la surface lieu des cubiques de Σ passant par P′ en ν points en dehors de P′, ou encore que P′ est multiple d'ordre $90 - \nu$ pour cette dernière surface.

Considérons une courbe de Σ et soit Q un point où cette courbe rencontre Φ_P, en dehors de C. La droite PQ rencontre Φ_P en dehors de P et de Q en $2n - 1$ points dont l'un, d'après la définition de Φ_P, est nécessairement situé sur la courbe de Σ envisagée. Comme il n'y a qu'une corde de cette courbe passant par P, cette courbe doit rencontrer Φ_P en deux seuls points extérieurs à C. On a donc

$$6(n + 1) = 10\nu + 2 , \qquad \text{ou} \qquad 3n + 2 = 5\nu .$$

Considérons maintenant la surface F_d relative à une droite d trisécante de C. Elle se scinde en trois surfaces lieux des courbes de Σ passant par les points d'appui et en une surface F_d^* lieu des courbes de Σ s'appuyant sur d en dehors de C, si toutefois la trisécante d ne fait pas partie d'une courbe dégénérée de Σ. Laissons ce cas de côté pour l'ins-

tant. La surface F_d^* est d'ordre $300 - 3 \times 90 = 30$ et passe 9 fois par C, car une cubique de Σ ne peut la rencontrer en dehors de C sans lui appartenir. Un plan passant par d, rencontre encore la surface F_d^* en une courbe d'ordre 29, passant 8 fois par les points d'appui de d sur C. Il y a donc cinq points de rencontre de d avec cette courbe en dehors de C. Ces points peuvent provenir de courbes de Σ s'appuyant en deux points sur d, ou de cubiques de Σ passant par un des points d'appui de d sur C et rencontrant encore d, ou enfin de courbes de Σ touchant le plan choisi sur d. Dans tous les cas, comme il y a 27 courbes de Σ passant par deux des points d'appui de d sur C, on peut écrire que la classe de la congruence est $n = 3 \times 27 + x$, x étant positif et au plus égal à 5, ou nul. Portons cette valeur de n dans la formule trouvée plus haut. On trouve

$$\nu = 49 + \frac{3x}{5},$$

d'où $x = 0$ ou $x = 5$, $\nu \leqq 52$.

D'après ce que nous avons vu ci-dessus, il en résulte que le point P′ de C est multiple d'ordre $90 - \nu \geqq 38$ pour la surface lieu des cubiques de Σ passant par P′. Mais alors une trisécante de C passant par P′ rencontre cette surface, d'ordre 90, en $2 \times 27 = 54$ points sur C en dehors de P′ et en au moins 38 points en P′, elle fait donc partie de cette surface. Mais cela ne peut se faire que si la trisécante en question fait partie d'une courbe dégénérée de Σ, hypothèse que nous avions exclue. Donc, si la courbe C possède des trisécantes, celles-ci sont des parties de courbes dégénérées de Σ.

Si une trisécante fait partie d'une courbe dégénérée de Σ, elle ne peut rencontrer une surface F_d arbitraire en dehors de C ; or elle rencontre une telle surface en $300 - 3 \times 90 = 30$ points en dehors de C. Nous parvenons donc à cette conclusion que la courbe singulière C de Σ ne peut posséder de trisécantes.

7. — Il est facile de prouver qu'il n'existe pas de courbe gauche d'ordre 11 ne possédant pas de trisécantes pouvant

nous convenir. Supposons que la courbe C possède un point P_1 multiple d'ordre x_1, un point P_2 multiple d'ordre x_2, ... un point P_i multiple d'ordre x_i.

Projetons la courbe d'un de ses points simples. On doit avoir

$$36 - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i} x_i(x_i - 1) = 0 .$$

Projetons la courbe de P_1. La courbe étant rationnelle, on a

$$\frac{1}{2}(10 - x_1)(9 - x_1) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{i} x_i(x_i - 1) = 0 ,$$

d'où, par soustraction,

$$x_1^2 - 10x_1 + 9 = 0 .$$

Evidemment $x_1 > 1$, d'où $x_1 = 9$ et $i = 1$. Mais alors, la courbe C est sur un cône quadratique et ce cône contiendrait toutes les courbes de Σ, ce qui est absurde.

Ainsi est établi le théorème énoncé dans le préambule de notre article.

Front belge, 29 novembre 1917.

SUR LA GERBE DE CUBIQUES GAUCHES PASSANT PAR CINQ POINTS

PAR

F. GONSETH (Zurich).

---

1. — On trouve dans les *Memorie di Geometria* de CAPORALI (p. 49-51), une suite d'énoncés concernant la congruence des triangles conjugués à la fois à une conique c_2, et à une cubique plane c_3 (et par conséquent à toute autre cubique passant par les points d'intersection de c_2 et de c_3). Je relève en particulier les suivants :

a) Chaque triangle est en général déterminé par un sommet.

b) Font exception dix points A_{ik}, dont chacun est le sommet d'une simple infinité de triangles ayant le côté opposé commun, a_{ik}. Les énoncés suivants montrent, en résumé, que la configuration des points A_{ik} et des droites a_{ik} est semblable à celle qu'on obtient en coupant par un plan les dix droites et les dix plans qui passent par cinq points de l'espace. En fait, je veux démontrer que :

La congruence (T) *des triangles en question peut être obtenue en coupant par un plan* π, *arbitraire, la gerbe des cubiques gauches qui passent par cinq points de l'espace,* $M_1, \ldots M_5$. Il en résultera naturellement que les points A_{ik} et les droites a_{ik} sont effectivement les intersections, par π, des droites et des plans passant par les points $M_1, \ldots M_5$.

2. — Je nomme A_{ik} le point d'intersection de π et de la droite M_iM_k; a_{ik} la droite d'intersection de π et du plan joignant les trois points restants. On sait[1] que les dix points

---

[1] SERRET, *Géométrie de situation.*

A_{ik} sont les pôles des droites a_{ik} suivant une conique Γ (*la conique conjuguée au pentagone gauche* $M_1, \ldots M_5$). Cette conique est aussi l'intersection par π de la quadrique dont $M_1 \ldots M_4$ est un tétraèdre conjugué, et suivant laquelle M_5 et π sont pôle et plan polaire. Reye[1] a de plus remarqué que toute cubique gauche passant par les cinq points M_i perce π aux trois sommets d'un triangle conjugué à Γ ; en particulier en chaque point de Γ une cubique touche, *et en six points*, B_i, *oscule*, le plan π.

On déduit facilement de ce qui précède que :

Si les quatre points $M_1 \ldots M_4$ restent fixes, à chaque position de M_5 correspond une conique Γ, et réciproquement (Γ sera la *correspondante* de M_5) ; si M_5 prend toutes les positions possibles, les Γ correspondantes forment un système linéaire, ponctuel, de dimension 3 ; si M_5 décrit une cubique gauche S contenant les quatre premiers points, la correspondante décrit un faisceau ponctuel. Enfin S devant percer π aux sommets d'un triangle conjugué à la correspondante de chacun de ses points, on arrive à l'énoncé suivant, dont la démonstration à faire découlera :

La congruence (T) *est formée des triangles conjugués à la fois à une conique fixe,* c_2 *et à une conique variable dans un réseau* (R). R ne doit d'ailleurs pas comprendre c_2.

3. — Un triangle est conjugué à une courbe plane de 3e ordre, c_3, lorsque ses trois sommets forment une courbe de 3e classe (dégénérée), apolaire à c_3. D'autre part un triangle conjugué à une conique c_2 l'est aussi à toute cubique formée de c_2 et d'une droite[2]. Par conséquent les groupes de sommets des triangles de la congruence (T) sont compris comme courbes dégénérées parmi les courbes de 3e classe apolaires à la fois à c_2 et à une conique variable du réseau R. Je m'en vais d'abord faire voir que ces *courbes forment un système linéaire,* de dimension 5. Elles sont, en effet, comprises premièrement dans le système linéaire, de dimension 6, des apolaires à c_2. S'il était en outre vrai que le sys-

[1] Reye, *Geometrie der Lage*, II, chap. 26.
[2] Caporali, *Memorie di Geometria*, p. 153.

tème (linéaire) des apolaires de 3e classe à c_2 et à une conique $c_2^{(1)}$ arbitraire de R, et le système semblable déduit de c_2 et d'une seconde conique $c_2^{(2)}$ de R, eussent un faisceau de courbes en commun, un raisonnement très facile en déduirait le résultat désiré. Il faudrait donc montrer que les courbes de 3e classe apolaires à la fois à c_2, $c_2^{(1)}$ et $c_2^{(2)}$ forment un faisceau. Or une courbe de 3e classe est en général apolaire à un réseau de coniques. D'autre part, il y a ∞^8 réseaux de coniques possibles, et il existe ∞^9 courbes de 3e classe. Donc :

Les triangles de (T) *sont compris dans un système linéaire* L, *de dimension* 5, *de courbes de 3e classe.*

4. — Les six points B_i d'osculation, dont il est question au paragraphe 2, sont des courbes spéciales de ce système réduites à un point triple; ces courbes sont naturellement apolaires à c_2 et à toutes les cubiques qui les contiennent. Elles forment d'autre part une base suffisante du système L; et comme la relation d'apolarité est linéaire, il en résulte que : Tous les groupes de trois sommets des triangles de (T) forment des courbes de 3e classe apolaires à c_2^1 et à toute cubique qui passe par les B_i; ou encore :

Les triangles de (T) *sont conjugués à* c_2 *et à toute cubique qui passe par les six* B_i.

5. — M_5 est maintenu fixe, de même que c_2. Soit Φ une quadrique passant par c_2, et pour laquelle M_5 et π sont pôle et plan polaire. A chaque tétraèdre polaire de Φ correspondra une congruence de triangles (T). Pour que les congruences correspondant à deux de ces tétraèdres coïncidassent, il faudrait que ces derniers fussent homologiques, puisque les sommets en devraient être alignés deux à deux sur M_5; et les plans se couper deux à deux sur le plan π. Il faudrait aussi, par conséquent, que la quadrique Φ fût transformée en elle-même par la même homologie, de centre M_5, et de plan axial π.

Or, parmi les homologies admettant même centre et même plan axial, il en est une et une seule qui réalise ce dernier fait : c'est l'homologie harmonique. Au tétraèdre primitif $M_1M_2M_3M_4$ correspond dans cette dernière un second té-

traèdre polaire à Φ, qui définit réellement la même congruence (T) que le premier.

Il existe une sextuple infinité de tétraèdres polaires à Φ; et par conséquent une sextuple infinité de groupes B_i peuvent être définis de la sorte.

Il n'y a donc aucune relation entre les points B_i.

SUR LES TRAJECTOIRES D'UN MOBILE SOUMIS A UNE FORCE CENTRALE ET A UNE RÉSISTANCE DE MILIEU

PAR

C. Cailler (Genève).

Je ne sais si une propriété mécanique, extrêmement simple, de la spirale logarithmique a été signalée jusqu'ici. La voici :

Une force attractive étant donnée, fonction quelconque de la distance au centre, il est toujours possible de lui adjoindre une résistance fonction de la vitesse, de telle manière que parmi les différentes trajectoires décrites par le mobile soumis aux deux forces figure une spirale logarithmique.

Soient m la masse du corps, $m\mathrm{R}(r)$ la force attractive, $mv\mathrm{G}(v)$ la résistance; R et G désignent ainsi deux fonctions des variables r et v respectivement, toutes deux positives.

Choisissons pour variables le rayon r et l'angle i que forme la vitesse v avec le rayon vecteur prolongé, de manière que $v \cos i = \frac{dr}{dt}$. Ecrivons les équations des aires et des forces vives.

Le moment[1], relatif au centre, des deux forces agissantes est égal à

$$- mvGr \sin i \; ;$$

[1] Le moment est compté positif dans le sens où tourne le rayon vecteur.

on a donc d'abord

$$d(vr\sin i) = -vGr\sin i dt = -G\,\mathrm{tg}\, i r dr\ ;$$

c'est l'équation des aires.

En second lieu, le travail des deux forces réunies est égal à

$$-mRdr - mv^2Gdt\ ,$$

ou encore

$$-m\left(Rdr + vG\frac{dr}{\cos i}\right)\ ;$$

par suite, débarrassée du facteur m, l'équation des forces vives sera

$$d\left(\frac{v^2}{2}\right) = -\left(R + \frac{vG}{\cos i}\right)dr\ .$$

En résumé, les équations cherchées sont

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{dr}(vr\sin i) = -Gr\,\mathrm{tg}\, i\ , \\ &\frac{d}{dr}\left(\frac{v^2}{2}\right) + R = -\frac{vG}{\cos i}\ ; \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

elles sont du premier ordre par rapport aux inconnues v et i, la variable indépendante étant r. Une fois intégré le système (1), le problème du mouvement peut être considéré comme résolu : en effet, θ étant l'angle polaire du rayon vecteur, nous aurons encore

$$d\theta = \mathrm{tg}\, i\frac{dr}{r}\ , \qquad dt = \frac{dr}{v\cos i}\ . \qquad (2)$$

Ces formules déterminent la trajectoire, et le temps, en fonction de la variable r.

Récrivons le système (1) sous la forme

$$\left.\begin{aligned} &r\left(\frac{dv}{dr} + \frac{G}{\cos i}\right) + v\left(1 + r\cot i\frac{di}{dr}\right) = 0\ , \\ &v\left(\frac{dv}{dr} + \frac{G}{\cos i}\right) + R = 0\ , \end{aligned}\right\} \qquad (3)$$

et supposons que la trajectoire soit une spirale logarithmique. Dans ce cas, i est constant, et (3) devient

$$r\left(\frac{dv}{dr} + \frac{G}{\cos i}\right) + v = 0\ , \qquad v\left(\frac{dv}{dr} + \frac{G}{\cos i}\right) + R = 0\ ,$$

ou bien

$$v^2 - rR = 0 \,, \qquad G = -\frac{\cos i}{r}\frac{d(vr)}{dr} \,. \tag{4}$$

Si l'attraction R est donnée en r, la première formule définit la vitesse le long de la trajectoire spirale, la seconde détermine en fonction de r, ou de v, la résistance G capable de produire le mouvement dont il s'agit. Enfin le temps sera donné par l'équation (2), qui est devenue

$$dt = \frac{dr}{\cos i \sqrt{rR}} \,. \tag{5}$$

Par exemple, dans le cas de l'attraction newtonienne, comment faut-il choisir la loi de résistance pour que la spirale logarithmique soit l'une des trajectoires possibles ?

Nous avons ici $R = \frac{k^2}{r^2}$, donc

$$v^2 = \frac{k^2}{r} \,, \qquad r = \frac{k^2}{v^2} \,, \qquad rv = \frac{k^2}{v}$$

et de là, d'après la seconde formule (4)

$$G = -\frac{\cos i}{2k^2} v^3 \,.$$

Et comme, sauf le facteur m, la résistance est égale, à $vG(v)$, cette force est donc

$$F = -\frac{\cos i}{2k^2} v^4 \,,$$

elle varie comme la 4e puissance de la vitesse.

Nous devons avoir $F > 0$, ainsi le mouvement n'est possible que si $\cos i < 0$; autrement dit, le mobile décrit la spirale en s'approchant de son pôle. Le temps de chute est fini, car on a

$$dt = +\frac{1}{k\cos i}\sqrt{r}\,dr \,, \qquad t = +\frac{1}{k\cos i}\int_r^0 \sqrt{r}\,dr = -\frac{2r^{3/2}}{3k\cos i} \,.$$

Il importe de remarquer que dans le cas où la résistance $F = lv^4$ est donnée a priori, la spirale est complètement connue, à l'orientation près ; on doit avoir

$$\cos i = -2lk^2$$

et ainsi, pour la possibilité du mouvement en question, il faut que les coefficients des deux forces vérifient la condition

$$lk^2 < \frac{1}{2} .$$

Le calcul précédent se généralise à l'instant. Faisons

$$R = ar^p , \qquad F = vG(v) = bv^q .$$

D'après la première équation (4), la force R ne saurait jamais être répulsive, il faut donc, pour la possibilité d'une solution, que a soit positif.

On trouve alors tout de suite qu'on doit avoir

$$q = \frac{2p}{p+1} , \qquad b = -\frac{1}{2}(p+3)a^{\frac{1}{1+p}} \cos i , \qquad v = \sqrt{a}\, r^{\frac{1+p}{2}} . \qquad (6)$$

Mais q doit être positif pour que la force F croisse avec la vitesse, par conséquent p ne peut pas être compris entre 0 et -1. Alors, suivant que p est $\gtrless -3$, la quantité $\cos i$ est $\lessgtr 0$, et le mobile, quand il sera placé dans les conditions initiales voulues, s'approchera du centre attractif ou s'en écartera en suivant l'arc de spirale logarithmique. L'angle i que forme cette spirale avec ses rayons vecteurs est déterminé par la seconde formule (6); il faut donc, pour qu'il y ait une solution, que les paramètres a et b des forces R et F vérifient encore l'inégalité

$$\left| \frac{2b}{p+3} \right| a^{-\frac{1}{1+p}} < 1 \text{ [1]} .$$

Ces différentes conditions nécessaires pour la description de la spirale sont assez limitatives. Quand elles ne sont pas remplies, le problème exige l'intégration du système (3); il est facile de voir que dans le cas qui vient d'être examiné

$$R = ar^p , \qquad F = bv^{\frac{2p}{p+1}} .$$

ce système peut être réduit à une seule équation du premier ordre.

---

[1] En tenant compte des *dimensions* des quantités a et b, on constate aisément l'homogénéité de cette condition.

SUR CERTAINES IDENTITÉS VECTORIELLES ET LEUR INTERPRÉTATION DANS LA GÉOMÉTRIE SPHÉRIQUE ET PLANE

PAR

M.-Fr. Daniëls (Fribourg, Suisse).

Nous nous proposons de démontrer dans cet article qu'on trouve, en utilisant certaines identités vectorielles, non seulement des démonstrations simples et élégantes de théorèmes connus, mais que ces identités, lorsqu'on interprète différemment les vecteurs qu'elles contiennent, conduisent facilement encore à des théorèmes nouveaux.

Dans un second article nous traiterons de la même manière certaines identités grassmanniennes.

1. — Il suffira de se rappeler :

a) qu'un vecteur (OR) $\equiv \mathfrak{r}$, le centre de la sphère étant O, détermine sur la surface sphérique un point et qu'un multiple positif de ce vecteur-unité détermine le même point.

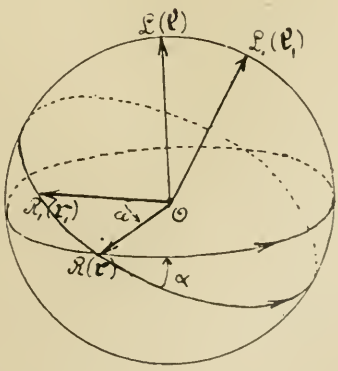


Fig 1

b) qu'une droite sphérique ou grand cercle, parcouru dans le sens indiqué par la flèche, est déterminé par le vecteur (OL) $\equiv \mathfrak{l}$ normal à son plan et que tout multiple positif de ce vecteur-unité détermine la même droite, parcourue dans le même sens.

c) que le vecteur de la droite passant par les points $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{r}_1$

est le produit vectoriel ou externe $V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}$, vecteur dont la grandeur est $\sin a$, lorsque a est la distance sphérique minima des points en question.

d) que le vecteur du point d'intersection des droites $\mathfrak{l}$ et $\mathfrak{l}_1$ est de même $V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}$, la grandeur de ce vecteur étant $\sin\alpha$ lorsque α est l'angle des deux droites.

e) que le vecteur $\alpha\mathfrak{r} - \alpha_1\mathfrak{r}_1$ appartient à un point P situé sur la droite déterminée par $\mathfrak{r}$ et $\mathfrak{r}_1$ et tel que $\sin(PR) : \sin(PR_1) \equiv (RR_1P) = \alpha_1 : \alpha$.

f) que le vecteur $\beta\mathfrak{l} - \beta_1\mathfrak{l}_1$ appartient à une droite p passant par l'intersection des droites l $\mathfrak{l}$ et l_1 $\mathfrak{l}_1$) et telle que $\sin(pl) : \sin(pl_1) \equiv (ll_1p) = \beta_1 : \beta$.

g) que trois points sont collinéaires et que trois droites sont concourantes lorsque les trois vecteurs correspondants multipliés par certains facteurs donnent une somme nulle.

h) qu'une droite de vecteur $\mathfrak{l}$ ne passe par un point de vecteur $\mathfrak{r}$ que lorsque le produit scalaire ou interne de leurs vecteurs est nul.

i) que la droite dont le vecteur est $V\mathfrak{r}\mathfrak{l}$ passe par le point $\mathfrak{r}$ tout en étant normale à la droite dont le vecteur est $\mathfrak{l}$.

I

2. — Considérons maintenant les identités vectorielles :

$$\begin{aligned}(\beta_2\mathfrak{l}_2 - \beta_3\mathfrak{l}_3) + (\beta_3\mathfrak{l}_3 - \beta_1\mathfrak{l}_1) + (\beta_1\mathfrak{l}_1 - \beta_2\mathfrak{l}_2) &\equiv 0\,.\\ (\alpha_2\mathfrak{r}_2 - \alpha_3\mathfrak{r}_3) + (\alpha_3\mathfrak{r}_3 - \alpha_1\mathfrak{r}_1) + (\alpha_1\mathfrak{r}_1 - \alpha_2\mathfrak{r}_2) &\equiv 0\,.\end{aligned} \qquad \text{(I)}$$

Si les vecteurs des côtés et ceux des sommets opposés d'un triangle sphérique sont $\mathfrak{l}_i$ et $\mathfrak{r}_i$, la première nous apprend que trois transversales angulaires, pour lesquelles le produit des rapports est *un* sont concourantes (1, *g*). Il ressort de la seconde que trois points appartenant aux trois côtés, pour lesquels le produit des rapports est *un,* sont collinéaires.

D'après (1, *d*) le point d'intersection dans le premier cas est déterminé par le produit vectoriel

$$V(\beta_2\mathfrak{l}_2 - \beta_3\mathfrak{l}_3)(\beta_3\mathfrak{l}_3 - \beta_1\mathfrak{l}_1) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sin A_1}{\beta_1}\mathfrak{r}_1 + \frac{\sin A_2}{\beta_2}\mathfrak{r}_2 + \frac{\sin A_3}{\beta_3}\mathfrak{r}_3$$

lorsque les angles extérieurs du triangle sphérique sont A_i. Les coordonnées barycentriques du point d'intersection sont par conséquent $\sin A_i/\beta_i$.

De même on trouve dans le second cas pour la droite des trois points le vecteur

$$V(\alpha_2 \mathfrak{r}_2 - \alpha_3 \mathfrak{r}_3)(\alpha_3 \mathfrak{r}_3 - \alpha_1 \mathfrak{r}_1) \qquad \text{ou} \qquad \frac{\sin a_1}{\alpha_1}\mathfrak{l}_1 + \frac{\sin a_2}{\alpha_2}\mathfrak{l}_2 + \frac{\sin a_3}{\alpha_3}\mathfrak{l}_3$$

lorsque les a_i sont les côtés du triangle sphérique. Les coordonnées barycentriques de cette droite sont $1/\alpha_i$. Dans le cas-limite du triangle plan, les $\sin A_i$ et $\sin a_i$ peuvent être remplacés par les côtés a_i eux-mêmes.

3. — *a)* La première médiane, dont le vecteur a la forme $\beta_2 \mathfrak{l}_2 - \beta_3 \mathfrak{l}_3$ passe par le milieu du côté opposé $\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3$. Le produit interne de ces deux vecteurs étant par conséquent $(1, h)$ nul, il s'ensuit :

$$\beta_2 \sin h_2 - \beta_3 \sin h_3 = 0 \qquad \text{ou} \qquad \beta_2 \sin A_3 - \beta_3 \sin A_2 = 0$$

lorsque les h_i sont les hauteurs du triangle sphérique. Les trois médianes

$$\sin A_2 \mathfrak{l}_2 - \sin A_3 \mathfrak{l}_3 \,, \qquad \sin A_3 \mathfrak{l}_3 - \sin A_1 \mathfrak{l}_1 \,, \qquad \sin A_1 \mathfrak{l}_1 - \sin A_2 \mathfrak{l}_2$$

sont donc concourantes ; de même les trois symédianes

$$\frac{\mathfrak{l}_2}{\sin A_2} - \frac{\mathfrak{l}_3}{\sin A_3} \,, \qquad \frac{\mathfrak{l}_3}{\sin A_3} - \frac{\mathfrak{l}_1}{\sin A_1} \,, \qquad \frac{\mathfrak{l}_1}{\sin A_1} - \frac{\mathfrak{l}_2}{\sin A_2} \,.$$

Les premières passent d'après le paragraphe précédent par le point, dont les coordonnées barycentriques sont $(1, 1, 1)$; les secondes passent par le point de Lemoine ou Græbe $(\sin^2 a_1, \sin^2 a_2, \sin^2 a_3)$ qui, dans le cas-limite du triangle plan, devient (a_1^2, a_2^2, a_3^2).

b) La droite dont le vecteur $\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3$ appartient au premier côté du triangle est par là même normale à ce côté ; elle passe par le milieu de ce côté $\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3$, vu que le produit scalaire des deux vecteurs en question est nul $(1, h)$. Le point d'intersection des normales concourantes

$$\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3 \,, \qquad \mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_1 \,, \qquad \mathfrak{r}_1 - \mathfrak{r}_2$$

est déterminé (1, *d*) par le produit externe de deux de ces vecteurs

$$V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 + V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 + V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 .$$

C'est le centre du cercle circonscrit.

4. — Posons maintenant dans notre identité du paragraphe 2

$$\alpha_1 \equiv \mathfrak{r}_3 . \mathfrak{r}_3 = \cos a_1 \qquad \alpha_2 \equiv \mathfrak{r}_3 . \mathfrak{r}_1 = \cos a_2 \qquad \alpha_3 \equiv \mathfrak{r}_1 . \mathfrak{r}_2 = \cos a_3 .$$

Elle prendra alors la forme[1]

$$V\mathfrak{r}_1 V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 + V\mathfrak{r}_2 V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 + V\mathfrak{r}_3 V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \equiv 0 \qquad \text{(II)}$$

ou encore

$$V\mathfrak{r}_1 , \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 + V\mathfrak{r}_2 , \mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 + V\mathfrak{r}_3 , \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \equiv 0$$

lorsque pour éviter une accumulation de V, on n'écrit que le dernier en remplaçant les autres par des virgules. Or, $V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$ est le premier côté et $V\mathfrak{r}_1 , \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$ d'après (1, *i*) la normale abaissée sur cette droite du sommet opposé $\mathfrak{r}_1$; l'identité nous apprend donc que dans un triangle sphérique les trois hauteurs sont concourantes. L'orthocentre x_i étant sur la première hauteur, nous avons, en écrivant par abréviation s_i et S_i, c_i et C_i pour $\sin a_i$, $\sin A_i$, $\cos a_i$ et $\cos A_i$ d'après (1, *h*)

$$(x_1\mathfrak{r}_1 + x_2\mathfrak{r}_2 + x_3\mathfrak{r}_3) . V\mathfrak{r}_1 , \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 \equiv x_3 V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 . V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 - x_2 V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 . V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$$

$$= x_3 s_1 s_2 C_3 - x_2 s_1 s_3 C_2 = 0$$

$$x_1 : x_2 : x_3 = \operatorname{tang} A_1 : \operatorname{tang} A_2 : \operatorname{tang} A_3 .$$

5. — En multipliant l'identité du paragraphe précédent scalairement par le vecteur $\mathfrak{r}_4$, nous obtenons la nouvelle identité :

$$V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_4 . V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 + V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_4 . V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 + V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4 . V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \equiv 0 . \qquad \text{(III)}$$

Elle nous apprend d'abord : si dans un quadrangle complet $(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4)$ sphérique ou plan non seulement les côtés $(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)$ et $(\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4)$ sont *perpendiculaires ou conjugués par rapport à une conique sphérique ou plane*, mais encore les côtés $(\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_4)$

[1] On a en effet $\mathfrak{r}_3 . \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_2 . \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 \equiv V\mathfrak{r}_1 V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$.

et $(\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1)$, il en sera de même des côtés $(\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4)$ et $(\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2)$, vu que la disparition des deux premiers produits scalaires entraîne celle du dernier.

On peut évidemment écrire notre identité :

$$V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4 . V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 + V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_4 . V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 + V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_4 . V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 \equiv 0$$

et considérer les vecteurs comme appartenant aux quatre côtés d'un quadrilatère sphérique complet. Dans ce cas les six produits vectoriels déterminent les sommets $(1, d)$, et l'identité nous apprend : si les distances des sommets $V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4$ et $V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3$ et des sommets $V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_4$ et $V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1$ sont des quadrants, ou bien si ces sommets sont conjugués deux à deux par rapport à une conique il en est de même pour les sommets $V\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_4$ et $V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2$.

6. — Reprenons encore l'identité I et posons-y :

$$\alpha_1 = V\mathfrak{r}_2\mathfrak{l} . V\mathfrak{l}\mathfrak{r}_3 \equiv \mathfrak{r}_2 . V\mathfrak{l} , \mathfrak{l}\mathfrak{r}_3 \equiv \mathfrak{r}_3 . V\mathfrak{l} . \mathfrak{l}\mathfrak{r}_2$$
$$\alpha_2 = V\mathfrak{r}_3\mathfrak{l} . V\mathfrak{l}\mathfrak{r}_1 \equiv \mathfrak{r}_3 . V\mathfrak{l} , \mathfrak{l}\mathfrak{r}_1 \equiv \mathfrak{r}_1 . V\mathfrak{l} , \mathfrak{l}\mathfrak{r}_3$$
$$\alpha_3 = V\mathfrak{r}_1\mathfrak{l} . V\mathfrak{l}\mathfrak{r}_2 \equiv \mathfrak{r}_1 . V\mathfrak{l} , \mathfrak{l}\mathfrak{r}_2 \equiv \mathfrak{r}_2 . V\mathfrak{l} , \mathfrak{l}\mathfrak{r}_1 .$$

Nous rappelant que

$$\mathfrak{r}_3 . \mathfrak{x}\ \mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_2\ \mathfrak{x}\ \mathfrak{r}_3$$

est le produit externe des vecteurs

$$\mathfrak{x} \quad \text{et} \quad V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3$$

nous voyons sans peine qu'un des trois termes de notre identité avec un changement de signe devient le produit externe des vecteurs :

$$V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 \quad \text{et} \quad V\mathfrak{l} , \mathfrak{l}\mathfrak{r}_1$$

ou encore[1] de

$$\mathfrak{l}_1 \quad \text{et} \quad V\mathfrak{l} , \mathfrak{l} , \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 .$$

L'identité toute entière prend par conséquent la forme :

$$V\mathfrak{l}_1 , \mathfrak{l} , \mathfrak{l} , \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 + V\mathfrak{l}_2 , \mathfrak{l} , \mathfrak{l} , \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 + V\mathfrak{l}_3 , \mathfrak{l} , \mathfrak{l} , \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 \equiv 0 . \qquad \text{(IV)}$$

---

[1] Se rappeler que $V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 = \sin a_1 \mathfrak{l}_1$ et $V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 = \sin A_1 \mathfrak{r}_1$. On multiplie donc en réalité par le module du triangle sphérique des $\mathfrak{r}_i$, c'est-à-dire par $\sin A_i : \sin a_i$.

L'interprétation géométrique de cette identité est bien simple. En effet, si les $\mathfrak{l}_i$ sont les côtés d'un trilatère sphérique et si $\mathfrak{l}$ est le vecteur d'une droite quelconque l, on a successivement pour le premier sommet A_1, pour la normale p_1 abaissée sur la droite l, pour son intersection P_1 avec l, et pour la normale q_1 du point P_1 sur le premier côté du triangle, en appliquant alternativement $(1, d)$ et $(1, i)$

$$A_1 \equiv V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 , \quad p_1 \equiv V\mathfrak{l} . \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 , \quad P_1 \equiv V\mathfrak{l} . \mathfrak{l} . \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 , \quad q_1 \equiv V\mathfrak{l}_1 . \mathfrak{l} . \mathfrak{l} . \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 .$$

Nous obtenons deux droites analogues $q_2 q_3$ en partant des deux autres sommets du trilatère. L'identité nous apprend que les trois droites sphériques q_i sont concourantes. Leur point commun est *l'orthopôle de la droite sphérique*[1]. D'après l'extension connue donnée au produit externe de deux vecteurs, l'identité IV peut encore s'interpréter de la manière suivante :

Si l'on mène par les sommets A_i des droites p_i, conjuguées à une droite quelconque l par rapport à une conique donnée, les points d'intersection étant P_i, les droites q_i, qui passant par les P_i sont conjuguées aux côtés a_i du triangle sphérique passent par un point.

7. — On trouve les coordonnées barycentriques x_i de l'orthopôle correspondant à la droite sphérique u_i en formant $(1, d)$ le produit externe de

$$q_1 \equiv \alpha_2\mathfrak{r}_2 - \alpha_3\mathfrak{r}_3 \qquad \text{et} \qquad q_2 \equiv \alpha_3\mathfrak{r}_3 - \alpha_1\mathfrak{r}_1$$

c'est-à-dire qu'on a d'une manière générale

$$x_1\mathfrak{r}_1 + x_2\mathfrak{r}_2 + x_3\mathfrak{r}_3 = \alpha_2\alpha_3 V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 + \alpha_3\alpha_1 V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 + \alpha_1\alpha_2 V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$$

ce qui, multiplié successivement par

$$V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 , \qquad V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 , \qquad V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$$

---

[1] M. J. Neuberg a énoncé ce théorème en 1875 dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (démonstration par H. van Aubel, *N. C. M.*, t. II, p. 316, et par E. Lemoine, *J. M. E.*, 1884, p. 50). Il a étudié la correspondance entre l'orthopolaire et l'orthopôle dans la *N. C. M.*, 1878, p. 379. (Voir *Mathesis*, t. IV, avril 1914, p. 92.)

donne pour les coordonnées de l'orthopôle

$$\begin{aligned} x_1 : x_2 : x_3 \\ = \alpha_2 \alpha_3 \Omega_{11} + \alpha_3 \alpha_1 \Omega_{12} + \alpha_1 \alpha_2 \Omega_{13} \\ : \alpha_2 \alpha_3 \Omega_{12} + \alpha_3 \alpha_1 \Omega_{22} + \alpha_1 \alpha_2 \Omega_{23} \\ : \alpha_2 \alpha_3 \Omega_{13} + \alpha_3 \alpha_1 \Omega_{23} + \alpha_1 \alpha_2 \Omega_{33} \end{aligned}$$

si l'on pose par abréviation pour les coefficients des produits $\alpha_r \alpha_s$

$$\Omega_{ik} \equiv \sin a_i \sin a_k \cos A_{ik} \equiv \Omega_{ki} \ .$$

Il suffira maintenant de se rappeler que Δ étant $[\mathfrak{l}_1 \mathfrak{l}_2 \mathfrak{l}_3]$, nous avons :

$$\alpha_1 \equiv V\mathfrak{r}_2 \mathfrak{l} . V\mathfrak{l}\mathfrak{r}_3 \equiv \mathfrak{l}.\mathfrak{r}_2 \ \ \mathfrak{l}.\mathfrak{r}_3 - \mathfrak{r}_2.\mathfrak{r}_3 \ \ \mathfrak{l}.\mathfrak{l} = \Delta^2 u_2 u_3 - \cos a_1 \Omega(uu) \ .$$

La première coordonnée x_1 de l'orthopôle devient alors la somme de

$$\alpha_2 \alpha_3 \Omega_{11} = [\Delta^4 u_1^2 u_2 u_3 - \Delta^2 (c_2 u_1 u_2 + c_3 u_1 u_3) \Omega(uu) + c_2 c_3 \Omega^2 (uu)] s_1 s_1$$

$$\alpha_3 \alpha_1 \Omega_{12} = [\Delta^4 u_2^2 u_3 u_1 - \Delta^2 (c_3 u_2 u_3 + c_1 u_2 u_1) \Omega(uu) + c_3 c_1 \Omega^2 (uu)] s_1 s_2 C_3$$

$$\alpha_1 \alpha_2 \Omega_{13} = [\Delta^4 u_3^2 u_1 u_2 - \Delta^2 (c_1 u_3 u_1 + c_2 u_3 u_2) \Omega(uu) + c_1 c_2 \Omega^2 (uu)] s_1 s_3 C_2$$

8. — Lorsqu'on passe au cas-limite du plan, les termes qui contiennent la quatrième puissance de

$$\Delta \equiv \sin A_i \sin A_k \sin a_{ik}$$

deviennent infiniment petits par rapport aux autres. Il ne reste, lorsqu'on pose

$$\lim \Delta \equiv \lim \sin A_i \sin A_k \sin a_{ik} = \sin A_i \sin A_k . a_{ik} \equiv \bar{\Delta} \quad \text{et} \quad \lim \cos a_i = 1$$

qu'une première partie qui devient à la limite

$$- \bar{\Delta}^2 a_1 [(a_2 C_3 + a_3 C_2) u_2 u_3 + (a_1 + a_3 C_2) u_3 u_1 + (a_1 + a_2 C_3) u_1 u_2]$$

ou

$$\bar{\Delta}^2 a_1 [a_1 u_2 u_3 + a_2 \cos A_3 . u_3 u_1 + a_3 \cos A_2 . u_1 u_2]$$

et d'une seconde partie du même ordre

$$\Omega(uu)[c_2 c_3 (1 - c_1^2) + c_1 c_2 (c_1 c_3 - c_2) + c_1 c_3 (c_1 c_2 - c_3)] \equiv$$
$$\Omega(uu)(c_1 c_2 - c_3)(c_1 c_3 - c_2) \equiv \Omega(uu) \sin^2 a_1 \sin a_2 \sin a_3 \cos A_2 \cos A_3$$

qui devient à la limite $a_1^2 a_2 a_3 \cos A_2 \cos A_3 . \Omega(uu)$. Si enfin nous introduisons au lieu des coordonnées u_i de la droite ses distances p_i aux sommets du triangle en posant[1] $\bar{\Delta} u_i = \sqrt{\Omega(uu)} . p_i$ nous obtenons comme première coordonnée barycentrique de l'orthopôle

$$a_1 [a_1 a_2 a_3 C_2 C_3 + a_1 p_2 p_3 + a_3 C_2 p_1 p_2 + a_2 C_3 p_1 p_3] .$$

Les deux autres s'en déduisent par permutation cyclique des indices.

9. — Lorsqu'il s'agit inversement de trouver la droite sphérique $\mathfrak{l}(u_i)$, son orthopôle $\mathfrak{r}_0$ étant donné, il suffira d'exprimer que $\mathfrak{r}_0$ est situé sur les droites q_i, ce qui fournit les équations

$$\mathfrak{r}_0 \vee \mathfrak{l}_1 , \mathfrak{l} , \mathfrak{l}\mathfrak{r}_1 \equiv [\mathfrak{l}\mathfrak{r}_0 \mathfrak{l}_1] \mathfrak{l} . \mathfrak{r}_1 + [\mathfrak{l}_1 \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_1] \mathfrak{l} . \mathfrak{l} = 0$$

$$\mathfrak{r}_0 \vee \mathfrak{l}_2 , \mathfrak{l} , \mathfrak{l}\mathfrak{r}_2 \equiv [\mathfrak{l}\mathfrak{r}_0 \mathfrak{l}_2] \mathfrak{l} . \mathfrak{r}_2 + [\mathfrak{l}_2 \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_2] \mathfrak{l} . \mathfrak{l} = 0$$

$$\mathfrak{r}_0 \vee \mathfrak{l}_3 , \mathfrak{l} , \mathfrak{l}\mathfrak{r}_3 \equiv [\mathfrak{l}\mathfrak{r}_0 \mathfrak{l}_3] \mathfrak{l} . \mathfrak{r}_3 + [\mathfrak{l}_3 \mathfrak{r}_0 \mathfrak{r}_3] \mathfrak{l} . \mathfrak{l} = 0$$

du second degré par rapport aux u_i. Lorsqu'une droite u_i satisfait à deux de ces équations, elle suffira à cause de l'identité (IV) également à la troisième. Il y a donc sur la sphère quatre *orthopolaires* correspondant au point $\mathfrak{r}_0$ comme orthopôle ; ce sont les tangentes communes aux courbes de seconde classe.

Il est facile de trouver les six foyers des trois coniques sphériques[2]. En effet, $\mathfrak{l} . \mathfrak{l} \equiv \Omega(uu) = 0$ étant l'équation de la courbe absolue, le premier terme dans chacune de ces équations égalé à zéro, donne l'équation de deux foyers, de sorte que les six foyers en question sont :

$$\mathfrak{r}_1 , \quad \mathfrak{r}_0 \vee \mathfrak{l}_1 ; \qquad \mathfrak{r}_2 , \quad \mathfrak{r}_0 \vee \mathfrak{l}_2 ; \qquad \mathfrak{r}_3 , \quad \mathfrak{r}_0 \vee \mathfrak{l}_3 .$$

Trois de ces foyers coïncident avec les sommets ; les trois autres sont situés sur les côtés du triangle à des distances $\pi/_2$ du point $\mathfrak{r}_0$. Lorsqu'on passe au plan, les trois derniers

---

[1] Soit : $\sin A_1 . u_1 \mathfrak{l}_1 + \sin A_2 . u_2 \mathfrak{l}_2 + \sin A_3 . u_3 \mathfrak{l}_3 = u_4 \mathfrak{l} = \sqrt{\Omega(uu)} . \mathfrak{l}$. En multipliant par $\mathfrak{r}_1$ nous aurons $\sin A_1 \sin h_1 u_1 = u_4 \sin p_1$ ou $\Delta . u_1 = \sqrt{\Omega(uu)} \sin p_1$ et $\bar{\Delta} . u_1 = \sqrt{\Omega(uu)} . p_1$.

[2] « Essai de géométrie sphérique », p. 250-251.

foyers s'éloignent à l'infini ; dans le plan les coniques sont par conséquent des paraboles ayant leurs foyers aux sommets du triangle et leurs axes parallèles aux côtés opposés.

10. — Si dans l'identité IV on prend, au lieu des quatre droites, quatre points, c'est-à-dire au lieu du trilatère $\mathfrak{l}_i$ et de la droite $\mathfrak{l}$, le triangle $\mathfrak{r}_i$ et le point $\mathfrak{r}$, on obtient

$$V\mathfrak{r}_1 . \mathfrak{r} . \mathfrak{r} . \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 + V\mathfrak{r}_2 . \mathfrak{r} . \mathfrak{r} . \mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 + V\mathfrak{r}_3 . \mathfrak{r} . \mathfrak{r} . \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2 \equiv 0 ,$$

identité qui exprime simplement le théorème réciproque ; nous n'en parlons pas.

11. — Nous arrivons à un autre théorème qu'on pourrait appeler le théorème *semi-réciproque*, en gardant dans notre identité les côtés du trilatère $\mathfrak{l}_i$, mais en remplaçant la droite quelconque $\mathfrak{l}$ par un point quelconque $\mathfrak{r}$. Dans sa nouvelle forme :

$$V\mathfrak{l}_1 . \mathfrak{r} . \mathfrak{r} . \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 + V\mathfrak{l}_2 . \mathfrak{r} . \mathfrak{r} . \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 + V\mathfrak{l}_3 . \mathfrak{r} . \mathfrak{r} . \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 \equiv 0 , \qquad (V)$$

l'identité nous apprend : *Lorsque par un point quelconque* $P(\mathfrak{r})$ *d'un triangle sphérique ou plan* A_i *on fait passer des droites* q_i *normales ou conjuguées aux droites* $p_i \equiv A_iP$, *leurs points d'intersection* Q_i *avec les côtés correspondants sont collinéaires* [1].

En effet, on a successivement pour le sommet A_1, pour la droite p_1, pour la normale q_1 et pour son point d'intersection Q_1 avec le premier côté du triangle

$$A_1 \equiv V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 , \qquad p_1 \equiv V\mathfrak{r} . \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3$$
$$q_1 \equiv V\mathfrak{r} . \mathfrak{r} . \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 , \qquad Q_1 \equiv V\mathfrak{l}_1 . \mathfrak{r} . \mathfrak{r} . \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 ,$$

L'identité V nous montre que le point Q_1 et les deux autres Q_2 et Q_3 qu'on obtient en partant des sommets A_2 et A_3 sont bien collinéaires. q. e. d.

---

[1] Voir encore ma « Note sur la géométrie du triangle et du tétraèdre » dans l'*Ens. Math.*, 1917, pp. 273-275, à propos de laquelle M. A. Kiefer m'a fait remarquer que pour le cas spécial où P est le centre du cercle inscrit, le théorème se trouve chez Steiner parmi les « Vermischte Sätze und Aufgaben » (*Ges. Werke*, Bd. 2, S. 673) et chez A. Kiefer, « Ueber eine Dreiecksaufgabe und bezügliche Sätze » (*Archiv der Mathematik und Physik*, III, Reihe XII, Heft 1, S. 30).

12. — Si les coordonnées x_i du point $\mathfrak{r}$ sont données, il est facile d'exprimer les coordonnées u_i de la droite correspondante en fonction des x_i. Nous devons en effet chercher la droite sphérique qui relie les points

$$Q_1 \equiv \alpha_2 \mathfrak{r}_2 - \alpha_3 \mathfrak{r}_3 \; ; \qquad Q_2 \equiv \alpha_3 \mathfrak{r}_3 - \alpha_1 \mathfrak{r}_1$$

lorsque les coefficients α_i sont déterminés par les équations :

$$\alpha_1 = V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r} . V\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_3 \; ; \qquad \alpha_2 = V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r} . V\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_1 \; ; \qquad \alpha_3 = V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r} . V\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_2 \; .$$

Nous trouvons son vecteur en formant le produit vectoriel ou externe. Ceci nous permet de conclure (2), que les coordonnées u_i de la droite cherchée satisfont à

$$u_1 : u_2 : u_3 = \alpha_2 \alpha_3 : \alpha_3 \alpha_1 : \alpha_1 \alpha_2 \; .$$

Quant aux coefficients α_i, on voit donc sans peine que

$$\alpha_1 \equiv V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r} . V\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_3 \equiv \mathfrak{r}.\mathfrak{r}_2\;\mathfrak{r}.\mathfrak{r}_3 - \cos a_1\,\mathfrak{r}.\mathfrak{r} = \omega(x_2)\,\omega(x_3) - \cos a_1\,\omega(xx)$$

pourvu que $\omega(x_2)$ et $\omega(x_3)$ soient les demi-dérivées partielles par rapport à x_2 et x_3 de la forme quadratique

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}.\mathfrak{r} \equiv \omega(xx) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2\cos a_1 x_2 x_3 + 2\cos a_2 x_3 x_1 + 2\cos a_3 x_1 x_2 \\ &\equiv (x_1 + x_2 + x_3)^2 - 4x_2 x_3 \sin^2\frac{a_1}{2} - \ldots = l_\infty^2 - 4x_2 x_3 \sin^2\frac{a_1}{2} - \ldots\end{aligned}$$

13. — Dans le cas-limite du plan la valeur trouvée pour α_1

$$\begin{aligned}&\left(l_\infty - 2x_1 \sin^2\frac{a_3}{2} - 2x_3 \sin^2\frac{a_1}{2}\right)\left(l_\infty - 2x_2 \sin^2\frac{a_1}{2} - 2x_1 \sin^2\frac{a_2}{2}\right) \\ &\quad - \left(1 - 2\sin^2\frac{a_1}{2}\right)\left(l_\infty^2 - 4x_2 x_3 \sin^2\frac{a_1}{2} - 4x_3 x_1 \sin^2\frac{a_2}{2} - \ldots\right)\end{aligned}$$

devient

$$x_1^2(a_1^2 - a_2^2 - a_3^2) + x_1 x_2 (a_1^2 - a_2^2 + a_3^2) + x_1 x_3 (a_1^2 + a_2^2 - a_3^2) + 2x_2 x_3 a_1^2$$

etc. Nous pouvons cependant donner aux α_i, donc aux u_i de la droite, une forme plus simple. Nous avons en effet :

$$\alpha_1 \equiv V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r} . V\mathfrak{r}\,\mathfrak{r}_3 = -\sin PA_2 \,\sin PA_3 . \cos\Phi_1$$

si nous appelons Φ_1 l'angle formé par les droites PA_2 et PA_3.

De cette manière nous trouvons pour le cas de la sphère

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{\sin PA_1}{\cos \Phi_1} : \frac{\sin PA_2}{\cos \Phi_2} : \frac{\sin PA_3}{\cos \Phi_3}$$

et dans le cas d'un triangle plan

$$u_1 : u_2 : u_3 = \frac{PA_1}{\cos \Phi_1} : \frac{PA_2}{\cos \Phi_2} : \frac{PA_3}{\cos \Phi_3} .$$

14. — Reprenons l'identité (V) et multiplions-la scalairement par le vecteur quelconque $\mathfrak{l}_4$. Dans sa nouvelle forme[1]

$$V\mathfrak{r} . \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 . V\mathfrak{r} . \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4 + V\mathfrak{r} . \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1 . V\mathfrak{r} . \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_4 + V\mathfrak{r} . \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2 . V\mathfrak{r} . \mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_4 \equiv 0 \quad \text{(VI)}$$

l'identité nous fournit une démonstration très simple du *théorème*, généralisé pour la sphère, de *Bodenmiller*[2] :

Le lieu géométrique du point P *tel que les droites sphériques qui le relient à deux points donnés de la surface sphérique sont normales ou conjuguées est une conique; les trois coniques qui correspondent aux trois couples de sommets d'un quadrilatère appartiennent à un même faisceau.*

En effet, lorsque les côtés du quadrilatère sont $\mathfrak{l}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), nous aurons en $V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3$ et $V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4$ deux sommets opposés. Les droites qui le relient au point $\mathfrak{r}$ sont $V\mathfrak{r} . \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3$ et $V\mathfrak{r} . \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4$, et ces droites sont normales (ou conjuguées) lorsque $\mathfrak{r}$ satisfait à l'équation de la conique

$$V\mathfrak{r} . \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 . V\mathfrak{r} . \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4 = 0 .$$

Nous obtenons d'autres coniques en partant des deux autres couples de sommets opposés ; l'identité nous montre que les points communs aux deux premières satisfont également à la troisième, ou bien que les trois coniques appartiennent à un même faisceau.

---

[1] Il est en effet

$$\mathfrak{l}_4 . V\mathfrak{l}_1 . \mathfrak{r} . \mathfrak{r} . \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 \equiv V\mathfrak{r} . \mathfrak{r} . \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 . V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_1 \equiv - V\mathfrak{r} . \mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3 . V\mathfrak{r} . \mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_1 .$$

[2] C. Gudermann *Grundriss der analytischen Sphärik*, 1830, S. 138.

II

15. — Les identités étudiées dans le chapitre précédent sont toutes des conséquences de l'identité (I). Nous arrivons maintenant à une relation identique entre six vecteurs qui ne peut pas être ramenée à la même source. Supposons en effet que nous ayons quatre vecteurs quelconques $\mathfrak{r}_0 . \mathfrak{r}_1 . \mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3$. Le vecteur composé

$$[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]\mathfrak{r}_0 - [\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_0]\mathfrak{r}_1 + [\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1]\mathfrak{r}_2 - [\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2]\mathfrak{r}_3$$

est nul, vu que ses projections sur les trois vecteurs non-coplanaires

$$V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3 , \qquad V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1 , \qquad V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2$$

sont nulles. Dès lors sa projection sur tout autre vecteur $V\mathfrak{r}_4\mathfrak{r}_5$ disparaît également, et nous aurons l'identité :

$$[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3][\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_4\mathfrak{r}_5] - [\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_0][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_4\mathfrak{r}_5] + [\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_4\mathfrak{r}_5] - [\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2][\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4\mathfrak{r}_5] \equiv 0 \qquad \text{(VII)}$$

qui constitue une relation entre les « sinus » de huit parmi les « angles trièdres » qu'on obtient en reliant six points de la surface sphérique au centre. Lorsqu'on remplace chacun des produits pseudoscalaires par le déterminant correspondant, on retrouve l'identité bien connue entre huit déterminants de *Cayley*.

16. — Dans le cas spécial où deux des six points en question, $\mathfrak{r}_0$ et $\mathfrak{r}_5$ par exemple, coïncident, l'identité devient

$$[\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_4][\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3] + [\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_4][\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1] + [\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4][\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2] \equiv 0 . \qquad \text{(VIII)}$$

Elle établit une relation entre les sinus de six parmi les angles trièdres formés, lorsque les sommets d'un pentagone sphérique sont reliés au centre de la sphère. Or, un produit pseudoscalaire comme $[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]$ étant égal à $\sin a_1 \mathfrak{f}_1 . \mathfrak{r}_1$ ou $\sin a_1 \sin h_1$ devient dans le cas-limite du plan proportionnel à l'aire du triangle plan correspondant. L'identité (VIII) nous fournit alors la relation bien connue entre les triangles d'un pentagone plan de *Möbius*[1].

[1] A. F. Möbius. *Gesammelte Werke*, Bd. I, S. 202.

17. — Nous allons voir maintenant que notre dernière identité admet une interprétation toute différente. En effet, soient $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ les sommets, $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$ les côtés du triangle de référence sphérique et

$$B_1\mathfrak{r}_1 + B_2\mathfrak{r}_2 + B_3\mathfrak{r}_3 \equiv \mathfrak{B} \qquad \sin A_1 b_1\mathfrak{l}_1 + \sin A_2 b_2\mathfrak{l}_2 + \sin A_3 b_3\mathfrak{l}_3 \equiv \mathfrak{b}$$

$$\sin A_1 u_1\mathfrak{l}_1 + \sin A_2 u_2\mathfrak{l}_2 + \sin A_3 u_3\mathfrak{l}_3 \equiv \mathfrak{l} \qquad x_1\mathfrak{r}_1 + x_2\mathfrak{r}_2 + x_3\mathfrak{r}_3 \equiv \mathfrak{r}$$

si nous posons comme toujours le produit pseudoscalaire $[\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3] \equiv \Delta$, la multiplication interne des vecteurs superposés nous permet d'écrire :

$$(\mathfrak{B}\,\mathfrak{l})^n = \Delta^n(B_1u_1 + B_2u_2 + B_3u_3)^n \qquad (\mathfrak{b}.\mathfrak{r})^n = \Delta^n(b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3)^n$$

de sorte que l'équation d'une courbe sphérique de classe ou d'ordre n, avec la convention $b_ib_jb_k \ldots \equiv b_{i.j,k\ldots}$, etc., peut s'écrire

$$(\mathfrak{B}.\mathfrak{l})^n = 0 \qquad (\mathfrak{b}.\mathfrak{r})^n = 0 \ .$$

La droite sphérique qui relie les points $\mathfrak{r}'$ et $\mathfrak{r}''$ coupera la conique sphérique $(\mathfrak{b}.\mathfrak{r})^2 = 0$ en un point $\mathfrak{r}' + \lambda\mathfrak{r}''$ pourvu que λ satisfasse à

$$(\mathfrak{b}.\mathfrak{r}' + \lambda\mathfrak{r}'')^2 \equiv (\mathfrak{b}.\mathfrak{r}')^2 + 2\lambda(\mathfrak{b}.\mathfrak{r}')(\mathfrak{b}.\mathfrak{r}'') + \lambda^2(\mathfrak{b}.\mathfrak{r}'')^2 = 0 \ .$$

Les points $\mathfrak{r}'$ et $\mathfrak{r}''$ sont conjugués par rapport à la conique lorsque

$$(\mathfrak{b}.\mathfrak{r}')(\mathfrak{b}.\mathfrak{r}'') = 0 \ .$$

18. — Revenons maintenant à l'identité (VIII), que nous écrivons

$$[\mathfrak{b}\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4][\mathfrak{b}\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3] + [\mathfrak{b}\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_4][\mathfrak{b}\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_1] + [\mathfrak{b}\mathfrak{l}_3\mathfrak{l}_4][\mathfrak{b}\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_2] \equiv 0 \ .$$

Dans cette forme elle nous donne le théorème connu : Si dans un quadrilatère complet de sommets $V\mathfrak{l}_1\mathfrak{l}_4$, $V\mathfrak{l}_2\mathfrak{l}_3$, etc., deux couples de sommets opposés sont conjugués par rapport à une conique sphérique ou plane $(\mathfrak{b}.\mathfrak{r})^2 = 0$, il en est de même pour le troisième. Il est évident qu'on obtient le théorème réciproque, lorsqu'on remplace les $\mathfrak{l}_1$, $\mathfrak{l}_2$, $\mathfrak{l}_3$, $\mathfrak{l}_4$, $\mathfrak{b}$ par $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$, $\mathfrak{r}_4$ et $\mathfrak{B}$.

19. — On peut arriver à ce résultat, qui d'ailleurs a déjà été obtenu au paragraphe 5, d'une autre manière encore. En

effet, si $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ sont les points diagonaux d'un quadrilatère complet, les sommets seront

$$\lambda_2\mathfrak{r}_2 \pm \lambda_3\mathfrak{r}_3\,, \qquad \lambda_3\mathfrak{r}_3 \pm \lambda_1\mathfrak{r}_1\,, \qquad \lambda_1\mathfrak{r}_1 \pm \lambda_2\mathfrak{r}_2$$

et, si $\mathfrak{b}$ est toujours le vecteur symbolique du paragraphe 17, l'identité

$$\mathfrak{b}.(\lambda_2\mathfrak{r}_2 + \lambda_3\mathfrak{r}_3)\ \mathfrak{b}.(\lambda_2\mathfrak{r}_2 - \lambda_3\mathfrak{r}_3) + \mathfrak{b}.(\lambda_3\mathfrak{r}_3 + \lambda_1\mathfrak{r}_1)\ \mathfrak{b}.(\lambda_3\mathfrak{r}_3 - \lambda_1\mathfrak{r}_1)$$
$$+ \mathfrak{b}.(\lambda_1\mathfrak{r}_1 + \lambda_2\mathfrak{r}_2)\ \mathfrak{b}.(\lambda_1\mathfrak{r}_1 - \lambda_2\mathfrak{r}_2) \equiv 0$$

nous apprend que les sommets $\lambda_1\mathfrak{r}_1 \pm \lambda_2\mathfrak{r}_2$ sont conjugués par rapport à certaine conique, lorsque les points $\lambda_2\mathfrak{r}_2 \pm \lambda_3\mathfrak{r}_3$ et les points $\lambda_3\mathfrak{r}_3 \pm \lambda_1\mathfrak{r}_1$ le sont.

20. — Remarquons encore en passant que les équations

$$(\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{l})^2 = 0 \qquad \text{et} \qquad (\mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{r})^2 = 0$$

aussi ont une signification géométrique bien simple, lorsque $\mathfrak{b}$ et $\mathfrak{B}$ sont les vecteurs symboliques du paragraphe 17. En effet nous trouvons

$$(\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{l})^2 \equiv [\mathrm{V}(\mathrm{S}_1 b_1\mathfrak{l}_1 + \mathrm{S}_2 b_2\mathfrak{l}_2 + \ldots)(\mathrm{S}_1 u_1\mathfrak{l}_1 + \mathrm{S}_2 u_2\mathfrak{l}_2 + \ldots)]^2$$
$$\equiv \mathrm{S}_1^2\mathrm{S}_2^2\mathrm{S}_3^2[(b_2u_3 - b_3u_2)\mathfrak{r}_1 + (b_3u_1 - b_1u_3)\mathfrak{r}_2 + (b_1u_2 - b_2u_1)\mathfrak{r}_3]^2$$

ou encore, si nous remplaçons $\mathfrak{r}_i.\mathfrak{r}_k$, c'est-à-dire ω_{ik} par $\omega_i\omega_k$, pour la première équation

$$\omega_{11}(b_2u_3 - b_3u_2)^2 + \ldots + 2\omega_{12}(b_2u_3 - b_3u_2)(b_3u_1 - b_1u_3) + \ldots$$
$$\equiv [\omega_1(b_2u_3 - b_3u_2) + \omega_2(b_3\omega_1 - b_1\omega_3) + \omega_3(b_1\omega_2 - b_2\omega_1)]^2 = 0\ .$$

Cette équation est celle du lieu géométrique des cordes de longueur $\frac{\pi}{2}$ dans la conique sphérique $(\mathfrak{b}.\mathfrak{r})^2 = 0$. De même on trouve

$$(\mathrm{V}\mathfrak{B}\mathfrak{r})^2 \equiv [\Omega_1(\mathrm{B}_2x_3 - \mathrm{B}_3x_2) + \Omega_2(\mathrm{B}_3x_1 - \mathrm{B}_1x_3) + \Omega_3(\mathrm{B}_1x_2 - \mathrm{B}_2x_1)]^2 = 0$$

comme équation du lieu géométrique des points où les tangentes menées à la courbe sphérique $(\mathfrak{B}.\mathfrak{l})^2 = 0$ sont normales [1].

21. — L'identité (VIII) entre cinq vecteurs conduit à un autre *théorème connu sur les quadrangles complets*, lors-

[1] *Géométrie sphérique en coordonnées projectives*, p. 217.

qu'on y remplace $\mathfrak{r}_0$ par $V\mathfrak{b}\mathfrak{l}$. En tenant compte de ce que

$$[\mathfrak{r}_0\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_4] = V\mathfrak{b}\mathfrak{l}.V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_4 = \mathfrak{b}.V\mathfrak{l}.\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_4$$

nous trouvons en effet qu'elle prend la forme

$$[\mathfrak{b}.V\mathfrak{l}, \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_4][\mathfrak{b}.V\mathfrak{l}, \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3] + [\mathfrak{b}.V\mathfrak{l}, \mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_4][\mathfrak{b}.V\mathfrak{l}, \mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1]$$
$$+ [\mathfrak{b}.V\mathfrak{l}, \mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_4][\mathfrak{b}.V\mathfrak{l}, \mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2] \equiv 0 .$$

Or, si $\mathfrak{l}$ est une droite sphérique quelconque, le point d'intersection de cette droite avec le côté $(\mathfrak{r}_i\mathfrak{r}_k)$ du quadrangle complet des $\mathfrak{r}_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$), point que nous voulons appeler P_{ik}, sera $V\mathfrak{l}, \mathfrak{r}_i\mathfrak{r}_k$. L'identité nous apprend la propriété connue de l'involution des six points

$$P_{14}, \quad P_{23}; \qquad P_{24}, \quad P_{31}; \qquad P_{34}, \quad P_{12}$$

pourvu que $\mathfrak{b}$ soit toujours le vecteur symbolique du paragraphe 17 correspondant a certaine conique.

III

22. — Nous arrivons maintenant à une identité nouvelle, qui admet plusieurs interprétations et qui, peut-être plus que les précédentes, montre tout le profit qu'on peut tirer de ces relations vectorielles, non seulement pour démontrer facilement et pour relier entre eux des théorèmes assez différents connus, mais encore pour en trouver des nouveaux.

C'est l'identité

$$[V\mathfrak{a}\mathfrak{a}'V\mathfrak{b}\mathfrak{b}'V\mathfrak{c}\mathfrak{c}'] + [V\mathfrak{b}\mathfrak{c}'V\mathfrak{c}\mathfrak{a}'V\mathfrak{a}\mathfrak{b}'] + [V\mathfrak{c}\mathfrak{b}'V\mathfrak{a}\mathfrak{c}'V\mathfrak{b}\mathfrak{a}'] \equiv 0 . \quad \text{(IX)}$$

La démonstration en est simple, quand on remarque que le second et le troisième terme se déduisent du premier par permutation circulaire positive des vecteurs $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et par permutation circulaire négative des vecteurs $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$. Nous obtenons ainsi en développant les trois produits pseudo-scalaires

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'][\mathfrak{b}'\mathfrak{b}\mathfrak{c}] - [\mathfrak{a}'\mathfrak{a}\mathfrak{c}][\mathfrak{b}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}']$$
$$[\mathfrak{b}\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'][\mathfrak{a}'\mathfrak{c}\mathfrak{a}] - [\mathfrak{c}'\mathfrak{b}\mathfrak{a}][\mathfrak{c}\mathfrak{a}'\mathfrak{b}']$$
$$[\mathfrak{c}\mathfrak{b}'\mathfrak{a}'][\mathfrak{c}'\mathfrak{a}\mathfrak{b}] - [\mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{b}][\mathfrak{a}\mathfrak{c}'\mathfrak{a}']$$

dont la somme est identiquement nulle.

23. — *Applications.* — 1. Si les vecteurs $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{b}$. $\mathfrak{c}$ déterminent les *sommets* A_i d'un premier, $\mathfrak{a}'$. $\mathfrak{b}'$. $\mathfrak{c}'$ les *sommets* B_i d'un second triangle sphérique ou plan, les produits vectoriels du premier et du second terme désignent les trois droites $A_i B_i$ resp. $A_i B_{i+1}$, etc. L'identité tout entière nous apprend que *les triangles sont triplement perspectifs, lorsqu'ils sont doublement perspectifs,* autrement dit : lorsque les droites (A_i, B_i) et les droites $(A_i B_{i+1})$ sont concourantes, il en est de même des droites (A_i, B_{i-1}), car la disparition des deux premiers termes de l'identité entraine celle du dernier.

2. Si les vecteurs $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{b}$. $\mathfrak{c}$ déterminent les *sommets* A_i d'un premier, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ les *côtés* a'_i d'un second triangle sphérique ou plan, les produits vectoriels du premier terme désignent les normales abaissées des sommets A_i sur les côtés a'_i, etc., et la même identité nous apprend que *deux triangles sphériques ou plans sont triplement orthologiques lorsqu'ils sont doublement orthologiques*, autrement dit : lorsque les normales abaissées des sommets A_i sur les côtés a'_i et les normales abaissées des sommets A_i sur les côtés a'_{i+1} sont concourantes ; il en est de même des normales abaissées des sommets A_i sur les côtés a'_{i-1}.

3. Supposons en troisième lieu que nous ayons deux triangles sphériques ou plans, dont les sommets sont A_i, A'_i et les côtés a_i, a'_i. Supposons en outre que les vecteurs $\mathfrak{a}$. $\mathfrak{b}$. $\mathfrak{c}$ déterminent les *sommets* du premier, $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ les « *milieux extérieurs* »[1] du second triangle. Dans ce cas les produits externes du premier terme de notre identité sont trois droites par les A_i et « parallèles » aux a'_i, de même ceux du second terme désignent trois droites passant par les A_i et « parallèles » aux a'_{i+1}, ceux du troisième terme enfin correspondent aux droites qui, passant par les A_i sont « parallèles » aux a'_{i-1}.

On dit que deux triangles sont simplement métaparallèles, lorsque les trois premières droites sont concourantes, doublement lorsque les trois droites suivantes sont également

[1] Nous entendons par « milieu extérieur » du côté $(\mathfrak{r}_2, \mathfrak{r}_3)$ du triangle sphérique le point $\mathfrak{r}_2 - \mathfrak{r}_3$ qui est à une distance $\pi/2$ du « milieu intérieur » $\mathfrak{r}_2 + \mathfrak{r}_3$.

concourantes, triplement enfin lorsque les trois dernières le sont aussi. Or, notre identité nous apprend : *lorsque deux triangles sphériques ou plans sont doublement métaparallèles, ils sont aussi triplement métaparallèles* [1].

4. Une application toute différente de notre identité nous est fournie par la théorie des coniques. Soient

$$\mathfrak{a} \quad \mathfrak{c}' \quad \mathfrak{b} \quad \mathfrak{a}' \quad \mathfrak{c} \quad \mathfrak{b}' \quad (\mathfrak{a})$$

$$\mathfrak{r}_2 \quad \mathfrak{r}'_1 \quad \mathfrak{r}_3 \quad \mathfrak{r}'_2 \quad \mathfrak{r}_1 \quad \mathfrak{r}'_3 \quad (\mathfrak{r}_2)$$

les vecteurs des *côtés* et des *sommets* d'un hexagone inscrit dans une conique sphérique ou plane. Dans ce cas les points d'intersection

$$V\mathfrak{a}\mathfrak{a}' , \qquad V\mathfrak{b}\mathfrak{b}' , \qquad V\mathfrak{c}\mathfrak{c}'$$

sont collinéaires d'après le théorème de Pascal, et notre identité (IX) nous donne

$$[V\mathfrak{b}\mathfrak{c}' \, V\mathfrak{c}\mathfrak{a}' \, V\mathfrak{a}\mathfrak{b}'] + [V\mathfrak{c}\mathfrak{b}' \, V\mathfrak{a}\mathfrak{c}' \, V\mathfrak{b}\mathfrak{a}'] = 0 .$$

Or, si nous remarquons 1° que chaque terme de cette équation contient les six vecteurs une seule fois, 2° que $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}'$, etc., sont, abstraction faite de certains coefficients scalaires,

$$V\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_3 , \qquad V\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_1 , \qquad V\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1 , \qquad V\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}'_2 , \qquad V\mathfrak{r}'_3\mathfrak{r}_2 , \qquad V\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_3 ,$$

3° que par conséquent les six produits vectoriels qui se trouvent dans la dernière équation peuvent être remplacés par

$$[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3]\mathfrak{r}'_1 , \qquad [\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_3]\mathfrak{r}'_2 , \qquad [\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_3]\mathfrak{r}'_3$$

$$-[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3]\mathfrak{r}_1 , \qquad -[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_3]\mathfrak{r}_2 , \qquad -[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_3]\mathfrak{r}_3$$

nous voyons sans peine que la dernière équation donne pour la sphère comme pour le plan *le théorème de Pappus*, d'après lequel pour six points $\mathfrak{r}_i$ et $\mathfrak{r}'_i$ d'une conique

$$[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_3][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3] = [\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_3][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3] .$$

Il est évident que nous obtenons un autre hexagone ins-

[1] Pour deux triangles plans voir J. Neuberg, *Mathesis*, 1883, p. 216, 1886, p. 134, 1914, p. 92.

crit dans la même conique en soumettant les $\mathfrak{r}_1$, $\mathfrak{r}_2$, $\mathfrak{r}_3$ seuls à une permutation circulaire ; dans ce cas nous trouvons :

$$[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3] = [\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3] .$$

La division des deux dernières équations conduit pour six points d'une conique sphérique à la relation

$$\frac{[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_3][\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_3]}{[\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1][\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}'_3]} = \frac{[\mathfrak{r}_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3]}{[\mathfrak{r}_2\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}_3\mathfrak{r}'_3][\mathfrak{r}'_1\mathfrak{r}'_2\mathfrak{r}_1]}$$

qui n'est autre chose que *le théorème* bien connu *de Carnot.*

Nous interrompons ici les applications de l'identité pour y revenir au paragraphe 30.

IV

24. — Les identités entre *six* vecteurs des paragraphes précédents ne sont pas les seules possibles. Il y en a d'autres ; ainsi on démontre sans peine que

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][\lambda_1\mathfrak{b} + \mu_1\mathfrak{c} \quad \lambda_2\mathfrak{c} + \mu_2\mathfrak{a} \quad \lambda_3\mathfrak{a} + \mu_3\mathfrak{b}]\\ \pm\,&[\mathfrak{a}\,\mathfrak{b}\,\mathfrak{c}\,][\lambda'_1\mathfrak{b}' + \mu'_1\mathfrak{c}' \quad \lambda'_2\mathfrak{c}' + \mu'_2\mathfrak{a}' \quad \lambda'_3\mathfrak{a}' + \mu'_3\mathfrak{b}']\end{aligned}$$

est identiquement nul, pourvu que l'expression scalaire

$$\lambda_1\lambda_2\lambda_3 + \mu_1\mu_2\mu_3$$

ne change pas en valeur absolue, lorsque les $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sont remplacés par les $\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$ et inversement.

25. — On satisfait déjà à la condition imposée aux λ_i et μ_i en prenant

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \mathfrak{c}.\mathfrak{a}' & \lambda_2 &= \mathfrak{a}.\mathfrak{b}' & \lambda_3 &= \mathfrak{b}.\mathfrak{c}'\\ \mu_1 &= -\mathfrak{b}.\mathfrak{a}' & \mu_2 &= -\mathfrak{c}.\mathfrak{b}' & \mu_3 &= -\mathfrak{a}.\mathfrak{c}'\end{aligned}$$

et c'est ainsi qu'on arrive à l'identité

$$[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][V\mathfrak{a}'.\,\mathfrak{b}\mathfrak{c}\;V\mathfrak{b}'.\,\mathfrak{c}\mathfrak{a}\;V\mathfrak{c}'.\,\mathfrak{a}\mathfrak{b}] + [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][V\mathfrak{a}.\,\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\;V\mathfrak{b}.\,\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'\;V\mathfrak{c}.\,\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \equiv 0 \quad (X)$$

Applications. — 1. Supposons que les sommets et les côtés de deux triangles sphériques ayent les vecteurs

$$\begin{aligned}A_i &\equiv \mathfrak{a}\,;\ \mathfrak{b}\,;\ \mathfrak{c} & A'_i &\equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\,;\ V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'\,;\ V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\\ a_i &\equiv V\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,;\ V\mathfrak{c}\mathfrak{a}\,;\ V\mathfrak{a}\mathfrak{b} & a'_i &\equiv \mathfrak{a}'\,;\ \mathfrak{b}'\,;\ \mathfrak{c}'\ .\end{aligned}$$

Dans ce cas, les droites qui relient les sommets correspondants (A_i, A'_i) et les points d'intersection des côtés correspondants (a_i, a'_i) seront

$$(A_1, A'_1) \equiv V\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \qquad (a_1, a'_1) \equiv V\mathfrak{a}' \,.\, \mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

etc., et l'identité (IX) nous apprend :

Lorsque les droites (A_i, A'_i) *sont concourantes, les points d'intersection* (a_i, a'_i) *sont collinéaires et inversement.* C'est là *le théorème* bien connu *de Desargues.*

2. Lorsque par contre les sommets et les côtés de deux triangles sphériques A_i et A'_i sont

$$A_i \equiv \mathfrak{a} : \mathfrak{b} : \mathfrak{c} \qquad A'_i \equiv \mathfrak{a}' ; \mathfrak{b}' ; \mathfrak{c}'$$

$$a_i \equiv V\mathfrak{b}\mathfrak{c} ; V\mathfrak{c}\mathfrak{a} ; V\mathfrak{a}\mathfrak{b} \qquad a'_i \equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' ; V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' ; V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$$

la même identité nous fournit un *théorème de Steiner*[1] :

Lorsque les normales abaissées des A_i *sur les* a'_i *sont concourantes, il en est de même des normales abaissées des* A'_i *sur les* a_i[2].

On le voit sans peine en remarquant que $V\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, etc., sont dans ce cas les normales abaissées des sommets A_i du premier triangle sur les côtés a'_i du second. Leur produit pseudo-scalaire est nul lorsque ces trois normales sont concourantes.

3. En troisième lieu considérons ensemble les identités :

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][V\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \;\; V\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \;\; V\mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] + [\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][V\mathfrak{a}', \mathfrak{b}\mathfrak{c} \;\; V\mathfrak{b}', \mathfrak{c}\mathfrak{a} \;\; V\mathfrak{c}', \mathfrak{a}\mathfrak{b}] \equiv 0$$

$$[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][V\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{c}'\mathfrak{b}' \;\; V\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{b}'\mathfrak{a}' \;\; V\mathfrak{c} \,.\, \mathfrak{a}'\mathfrak{c}'] + [\mathfrak{a}'\mathfrak{c}'\mathfrak{b}'][V\mathfrak{a}', \mathfrak{c}\mathfrak{b} \;\; V\mathfrak{b}', \mathfrak{b}\mathfrak{a} \;\; V\mathfrak{c}', \mathfrak{a}\mathfrak{c}] \equiv 0 \,.$$

La seconde s'obtient de la première, lorsqu'on y change $\mathfrak{b}'$ et $\mathfrak{c}'$ en $\mathfrak{c}'$ et $\mathfrak{b}'$. Or, la disparition des premiers termes dans les deux identités entraîne celle des seconds termes, ce qui, en supposant que les $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ sont les sommets d'un premier et $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ ceux d'un second triangle sphérique signifie :

---

[1] *Gesammelte Werke*, Bd. I, S. 155-162.

[2] Voir par. 23, 2.

Lorsque sont concourantes les normales abaissées de A_1, A_2, A_3 sur les côtés a'_1, a'_2, a'_3 et sur les côtés a'_1, a'_3, a'_2, il en est de même des normales abaissées de A'_1, A'_2, A'_3 sur les côtés a_1, a_2, a_3 et a_1, a_3, a_2, en d'autres mots :

Lorsque les deux triangles sphériques A_i *et* A'_i *sont diorthologiques en* A_1, *ils le sont encore en* A'_1.

V

26. — Nous pouvons encore dans l'expression fondamentale

$$[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][\lambda_1\mathfrak{b} + \mu_1\mathfrak{c} \ldots] \pm [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\lambda'_1\mathfrak{b}' + \mu'_1\mathfrak{c}' \ldots]$$

remplacer les vecteurs arbitraires $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}$, ... par les vecteurs également arbitraires $V\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, $V\mathfrak{c}\mathfrak{a}$, ... et ensuite, pour satisfaire à la condition imposée aux λ_i, μ_i ..., prendre

$$\lambda_1 = \mathfrak{a}'.\mathfrak{b} \qquad \lambda_2 = \mathfrak{b}'.\mathfrak{c} \qquad \lambda_3 = \mathfrak{c}'.\mathfrak{a}$$
$$\mu_1 = \mathfrak{a}'.\mathfrak{c} \qquad \mu_2 = \mathfrak{b}'.\mathfrak{a} \qquad \mu_3 = \mathfrak{c}'.\mathfrak{b}\ .$$

Dans ce cas nous avons évidemment

$$\lambda_1 V\mathfrak{c}\mathfrak{a} + \mu_1 V\mathfrak{a}\mathfrak{b} = V\mathfrak{a}.\mathfrak{a}'.\mathfrak{b}\mathfrak{c}$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}']^2[V\mathfrak{a}.\mathfrak{a}'.\mathfrak{b}\mathfrak{c}\ \ V\mathfrak{b}.\mathfrak{b}'.\mathfrak{c}\mathfrak{a}\ \ V\mathfrak{c}.\mathfrak{c}'.\mathfrak{a}\mathfrak{b}]\\ &- [\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}]^2[V\mathfrak{a}'.\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\ \ V\mathfrak{b}'.\mathfrak{b}.\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'\ \ V\mathfrak{c}'.\mathfrak{c}.\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \equiv 0\ . \qquad \text{(XI)}\end{aligned}$$

27. — Nous allons faire de cette identité *deux applications*. — 1. D'abord elle nous servira à démontrer *un théorème de M. R. Bricard*[1] :

Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques.

Lorsque les points d'intersection Q_i *des droites* $(A_i, A'_i) \equiv p_i$ *avec les côtés* a_i *du premier triangle sont collinéaires, les droites de jonction* q_i *des points* $(a_i, a'_i) \equiv P_i$ *avec les sommets* A'_i *du second triangle sont concourantes et inversement.*

---

[1] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 1906, p. 96.

En effet, si les vecteurs des sommets et côtés des deux triangles sont :

$$A_i \equiv V\mathfrak{b}\mathfrak{c} \; ; \; V\mathfrak{c}\mathfrak{a} \; ; \; V\mathfrak{a}\mathfrak{b} \qquad A'_i \equiv \mathfrak{a}' \; ; \; \mathfrak{b}' \; ; \; \mathfrak{c}'$$

$$a_i \equiv \mathfrak{a} \; ; \; \mathfrak{b} \; ; \; \mathfrak{c} \qquad a'_i \equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \; ; \; V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \; ; \; V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$$

nous trouvons pour les vecteurs de la droite p_1, du point Q_1, du point P_1 et de la droite q_1

$$p_1 \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad P_1 \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

$$Q_1 \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{a}'.\mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad q_1 \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' .$$

Lorsque les points Q_i sont collinéaires, le premier terme de notre identité s'annule; le second terme disparaissant alors également, les droites q_i sont concourantes et inversement. q. e. d.

2. On peut tirer de notre identité encore la généralisation pour la sphère d'un *théorème* dû à M. *Constantinescu*[1]

Soient A_i et A'_i deux triangles sphériques. *Lorsque les normales* q_i *abaissées des* A_i *sur les côtés* a'_i *du second triangle coupent les côtés* a_i *du premier triangle en trois points collinéaires* Q_i, *les normales* q'_i *abaissées des* A'_i *sur les* a_i *coupent les côtés* a'_i *du second triangle également en trois points collinéaires* Q'_i.

En effet, lorsque les côtés et les sommets des deux triangles sphériques sont

$$A_i \equiv V\mathfrak{b}\mathfrak{c} \; ; \; V\mathfrak{c}\mathfrak{a} \; ; \; V\mathfrak{a}\mathfrak{b} \qquad A'_i \equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \; ; \; V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \; ; \; V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$$

$$a_i \equiv \mathfrak{a} \; ; \; \mathfrak{b} \; ; \; \mathfrak{c} \qquad a'_i \equiv \mathfrak{a}' \; ; \; \mathfrak{b}' \; ; \; \mathfrak{c}'$$

nous aurons successivement pour les normales q_1 et q'_1 et pour leurs intersections Q_1 et Q_2 avec les côtés a_1 et a'_1

$$q_1 \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad q'_1 \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

$$Q_1 \equiv V\mathfrak{a}.\mathfrak{a}'.\mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad Q'_1 \equiv V\mathfrak{a}'.\mathfrak{a}.\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' .$$

Lorsque les points Q_i sont collinéaires, le premier terme de l'identité s'annule, ce qui entraîne la disparition du se-

[1] *Mathesis*, 1913, p. 69.

cond. Il s'ensuit que dans ce cas les Q'_i aussi sont collinéaires. q. e. d.

VI

28. — Si l'on pose dans l'expression fondamentale du par. 24 pour satisfaire à la condition imposée aux λ_i, μ_i ...

$$\lambda_1 = [\mathfrak{c}\mathfrak{a}'\mathfrak{r}] \qquad \lambda_2 = [\mathfrak{a}\mathfrak{b}'\mathfrak{r}] \qquad \lambda_3 = [\mathfrak{b}\mathfrak{c}'\mathfrak{r}]$$
$$\mu_1 = [\mathfrak{a}'\mathfrak{b}\mathfrak{r}] \qquad \mu_2 = [\mathfrak{b}'\mathfrak{c}\mathfrak{r}] \qquad \mu_3 = [\mathfrak{c}'\mathfrak{a}\mathfrak{r}]$$

on trouve évidemment

$$\lambda_1 \mathfrak{b} + \mu_1 \mathfrak{c} = \mathrm{V}\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{c}\,\mathrm{V}\mathfrak{r}\mathfrak{a}'$$

etc., mais si comme au par. 26 on remplace les vecteurs arbitraires $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, ... par $\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathrm{V}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, ... , cette dernière expression devient, abstraction faite d'un facteur scalaire, facile à déterminer

$$\mathrm{V}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

de sorte qu'on aboutit à l'identité entre *sept* vecteurs quelconques :

$$\begin{aligned} &[\mathfrak{a}\mathfrak{b}\mathfrak{c}][\mathrm{V}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \quad \mathrm{V}\mathfrak{b} \,.\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \quad \mathrm{V}\mathfrak{c} \,,\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \\ &- [\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'][\mathrm{V}\mathfrak{a}' \,,\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{b}\mathfrak{c} \quad \mathrm{V}\mathfrak{b}' \,,\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{c}\mathfrak{a} \quad \mathrm{V}\mathfrak{c}' \,,\, \mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{a}\mathfrak{b}] \equiv 0 \end{aligned} \qquad \text{(XII)}$$

Cette identité nous servira d'abord à démontrer pour la sphère *un théorème de Möbius*[1] :

Soient A_i *et* A'_i *deux triangles sphériques et* l *une droite sphérique quelconque.*

Lorsque les droites p_i *qui relient les points* $P_i \equiv (l \,.\, a_i)$ *aux sommets* A'_i *du second triangle sont concourantes, il en est de même des droites* p'_i *qui relient les points* $P'_i \equiv (l \,,\, a'_i)$ *aux sommets* A_i *du premier triangle.*

Car, si le vecteur de la *droite* sphérique l est $\mathfrak{r}$ et si les vecteurs des sommets A_i et A'_i sont $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ et $\mathfrak{a}'$, $\mathfrak{b}'$, $\mathfrak{c}'$ nous aurons successivement pour les points P_i, P'_i et les droites p_i, p'_i :

$$P_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad P'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{r} \,.\, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$
$$p_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a}' \,,\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad p'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a} \,.\, \mathfrak{r} \,,\, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \,.$$

---

[1] *Crelle's Journal*, Bd. 3, 1828. — Werke I, S. 444.

L'identité nous montre que les p_i sont concourantes lorsque les p'_i le sont. q. e. d.

2. Nous pouvons cependant tirer de notre identité un théorème tout différent en interprétant le vecteur $\mathfrak{r}$ non pas comme correspondant à une *droite* sphérique, mais comme appartenant à un *point* P. Le théorème en question est le suivant :

Par un point quelconque de la surface sphérique P($\mathfrak{r}$) *on mène des normales* p_i *et* p'_i *aux côtés* a_i *et* a'_i *de deux triangles sphériques et ensuite par les sommets* A'_i *et* A_i *des droites sphériques* q_i *et* q'_i *normales aux* p_i *et* p'_i. *Lorsque les* q_i *sont concourantes, il en est de même des* q'_i.

En effet on trouve dans ce cas pour les vecteurs des droites p_1, p'_1 et q_1, q'_1 immédiatement

$$p_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{r}, \mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad p'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{r}, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

$$q_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a}', \mathfrak{r}, \mathfrak{b}\mathfrak{c} \qquad q'_1 \equiv \mathrm{V}\mathfrak{a}, \mathfrak{r}, \mathfrak{b}'\mathfrak{c}' .$$

Lorsque les q_i sont concourantes, le produit pseudo-scalaire du premier terme de notre identité s'annule ; la disparition du second terme qui en est la conséquence montre que dans ce cas les q'_i aussi sont concourantes et inversement. q. e. d.

3. Dans le cas-limite du *plan* nous aurons, quel que soit le point P, la droite p_1 normale à a_1 et q_1 de nouveau normale à p_1, c'est-à-dire q_1 *parallèle* au côté a_1 du premier triangle. Le théorème qui, pour le plan, est dû à M. *J. Neuberg*[1], peut être formulé :

Etant donnés deux triangles plans A_i *et* A'_i *et les droites* q_i *et* q'_i *menées par les sommets* A'_i *et* A_i *parallèles aux côtés* a_i *et* a'_i ; *lorsque les droites* q_i *sont concourantes, il en est de même des droites* q'_i [2].

29. — Nous arrivons à une autre identité entre *sept* vecteurs en remplaçant $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{a}'$, ... par $\mathrm{V}\mathfrak{b}\mathfrak{c}$, $\mathrm{V}\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$, ... , en posant ensuite

$$\lambda_1 = [\mathfrak{b}\mathfrak{r}\mathfrak{a}'] \qquad \lambda_2 = [\mathfrak{c}\mathfrak{r}\mathfrak{b}'] \qquad \lambda_3 = [\mathfrak{a}\mathfrak{r}\mathfrak{c}']$$

$$\mu_1 = [\mathfrak{c}\mathfrak{r}\mathfrak{a}'] \qquad \mu_2 = [\mathfrak{a}\mathfrak{r}\mathfrak{b}'] \qquad \mu_3 = [\mathfrak{b}\mathfrak{r}\mathfrak{c}'] .$$

---

[1] *Mathesis*, 1882, p. 144, 1883, p. 86, 1914, p. 91.

[2] Voir par 23, 3.

Dans ce cas nous avons

$$\lambda_1 V\mathfrak{ca} + \mu_1 V\mathfrak{ab} = V\mathfrak{a}\,,\ V\mathfrak{r}\mathfrak{a}' V\mathfrak{bc}$$

etc., de sorte que nous arrivons à l'identité

$$\begin{aligned}&[\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'\mathfrak{c}']^2[V\mathfrak{a}\,,\ V\mathfrak{r}\mathfrak{a}' V\mathfrak{bc} \quad V\mathfrak{b}\,,\ V\mathfrak{r}\mathfrak{b}' V\mathfrak{ca} \quad V\mathfrak{c}\,,\ V\mathfrak{r}\mathfrak{c}' V\mathfrak{ab}]\\ &+ [\mathfrak{abc}]^2[V\mathfrak{a}'\,,\ V\mathfrak{r}\mathfrak{a} V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}' \quad V\mathfrak{b}'\,,\ V\mathfrak{r}\mathfrak{b} V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}' \quad V\mathfrak{c}'\,,\ V\mathfrak{r}\mathfrak{c} V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'] \equiv 0\ .\end{aligned}$$

Nous n'en donnons qu'une seule application. Soit $P(\mathfrak{r})$ un *point* quelconque de la surface sphérique ; soient

$$A_i \equiv \mathfrak{a}\,,\ \mathfrak{b}\,,\ \mathfrak{c} \qquad A'_i \equiv \mathfrak{a}'\,,\ \mathfrak{b}'\,,\ \mathfrak{c}'$$

$$a_i \equiv V\mathfrak{bc}\,,\ V\mathfrak{ca}\,,\ V\mathfrak{ab} \qquad a'_i \equiv V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'\,,\ V\mathfrak{c}'\mathfrak{a}'\,,\ V\mathfrak{a}'\mathfrak{b}'$$

les sommets et côtés de deux triangles sphériques. Les droites sphériques qui relient le point P aux sommets du second (premier) triangle, coupent les côtés du premier (second) triangle en

$$Q_1 \equiv VV\mathfrak{r}\mathfrak{a}' V\mathfrak{bc} \qquad Q'_1 \equiv VV\mathfrak{r}\mathfrak{a} V\mathfrak{b}'\mathfrak{c}'$$

etc., et l'identité nous apprend : lorsque les droites (A_i, Q_i) sont concourantes, les droites (A'_i, Q'_i) le sont également.

On arrive à un autre théorème en considérant $\mathfrak{r}$ comme le vecteur d'une *droite*.

VII

30. — Nous revenons à l'identité vectorielle du paragraphe 22 :

$$[V\mathfrak{aa}'\ V\mathfrak{bb}'\ V\mathfrak{cc}'] + [V\mathfrak{bc}'\ V\mathfrak{ca}'\ V\mathfrak{ab}'] + [V\mathfrak{cb}'\ V\mathfrak{ac}'\ V\mathfrak{ba}'] \equiv 0$$

qui peut nous fournir une démonstration très simple du théorème suivant :

Soient A_1, A_2, A_3 *les sommets d'un triangle sphérique,* P *un point quelconque de la surface sphérique,* p_1, p_2, p_3 *les normales abaissées de ce point sur les côtés du triangle et coupant ces côtés dans les neuf points*

$$P_{11}\,,\ P_{12}\,,\ P_{13}\ ; \qquad P_{21}\,,\ P_{22}\,,\ P_{23}\ ; \qquad P_{31}\,,\ P_{32}\,,\ P_{33}\ ;$$

soient q_1, q_2, q_3 *les droites qui relient le même point* P *aux sommets du triangle et*

$$q_{11}, \quad q_{12}, \quad q_{13}; \qquad q_{21}, \quad q_{22}, \quad q_{23}; \qquad q_{31}, \quad q_{32}, \quad q_{33}$$

les neuf normales qui, des trois sommets, peuvent être abaissées sur les droites q_1, q_2, q_3.

Il y a en général sur la sphère trois points P *tels que sont collinéaires les points de chacun des systèmes :*

$$P_{11}, \quad P_{22}, \quad P_{33}; \qquad P_{12}, \quad P_{23}; \quad P_{31}; \qquad P_{13}, \quad P_{21}, \quad P_{32}$$

et que sont concourantes les droites de chacun des systèmes :

$$q_{11}, \quad q_{22}, \quad q_{33}; \qquad q_{12}, \quad q_{23}, \quad q_{31}; \qquad q_{13}, \quad q_{21}, \quad q_{32}.$$

Dans le plan il n'y a qu'un point qui possède toutes ces propriétés, c'est le point de Tarry du triangle N (fig. 2 et 3).

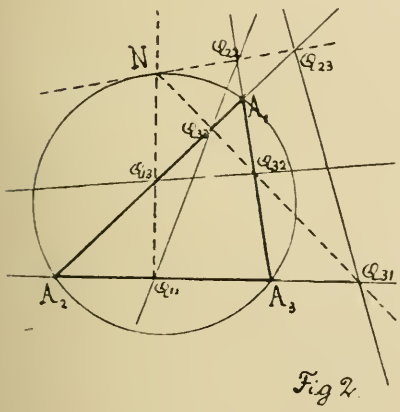


Fig 2.

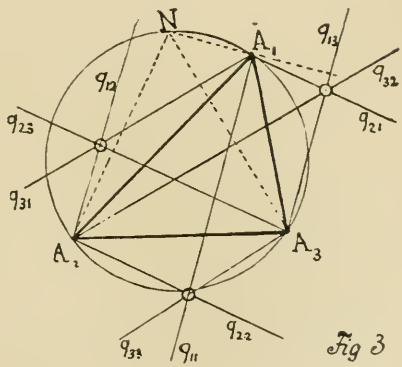


Fig 3

31. — D'ailleurs ce théorème se trouve comme cas spécial d'un théorème plus général encore, qui peut s'énoncer de la manière suivante :

Soient $A_1A_2A_3$ et $A'_1A'_2A'_3$ les sommets de deux triangles sphériques, P un point quelconque de la surface sphérique, $p_1p_2p_3$ les droites qui relient le point aux sommets du premier et $p'_1p'_2p'_3$ les droites qui le relient aux sommets du second triangle. Les droites p_1, p_2, p_3 rencontrent les côtés du second triangle en neuf points

$$P_{11}, \quad P_{12}, \quad P_{13}; \qquad P_{21}, \quad P_{22}, \quad P_{23}; \qquad P_{31}, \quad P_{32}, \quad P_{33}.$$

De même les droites p'_1, p'_2, p'_3 rencontrent les côtés du premier triangle en neuf points

$$P'_{11}, \quad P'_{12}, \quad P'_{13}; \qquad P'_{21}, \quad P'_{22}, \quad P'_{23}; \qquad P'_{31}, \quad P'_{32}, \quad P'_{33}.$$

Il y a pour tout couple de triangles sphériques ou plans en général trois points P tels que sont collinéaires les points de chacun des six systèmes :

$$\begin{array}{lllllllll} P_{11}, & P_{22}, & P_{33}; & P_{12}, & P_{23}, & P_{31}; & P_{13}, & P_{21}, & P_{32} \\ P'_{11}, & P'_{22}, & P'_{33}; & P'_{12}, & P'_{23}, & P'_{31}; & P'_{13}, & P'_{21}, & P'_{32}. \end{array}$$

Nous revenons sur la démonstration de ces deux théorèmes dans un article ultérieur.

PENSÉE AXIOMATIQUE[1]

PAR

David HILBERT (Göttingue).

Dans la vie des sociétés la prospérité des peuples dépend de celle de tous ses voisins ; les Etats, de même, ont un intérêt vital à ce que l'ordre non seulement règne à l'intérieur de chacun d'eux, mais existe aussi dans leurs relations mutuelles. Il n'en va pas autrement dans la vie des sciences. Preuve en soit le vif intérêt que les représentants les plus remarquables de la pensée mathématique ont toujours témoigné à la structure et aux lois des autres sciences que la leur ; ils n'ont cessé avant tout d'étudier les mathématiques (et pour le plus grand bien de ces dernières) dans leurs rapports avec les vastes

[1] *Axiomatisches Denken*, conférence faite à la réunion annuelle de la Société mathématique suisse, tenue à Zurich, le 11 septembre 1917. — Traduction de M. Arnold REYMOND, professeur à l'Université de Neuchâtel.

domaines de la physique et de la théorie de la connaissance qui les côtoient de plus près. La nature de ces relations et leur foncière fécondité seront, je crois, nettement indiquées si je désigne sous le nom de *méthode axiomatique* la méthode générale d'investigation qui les caractérise et qui dans les mathématiques modernes prend une importance de plus en plus grande.

Si nous groupons les faits d'un domaine scientifique déterminé, plus ou moins étendu, nous remarquons bientôt qu'ils sont susceptibles d'être ordonnés. Cet ordre s'effectue constamment par le moyen d'un certain *édifice de concepts* tel qu'un concept et un seul corresponde à tout objet du domaine scientifique et qu'à l'intérieur de ce dernier un état de faits ait pour équivalent une relation logique entre concepts. L'édifice des concepts n'est pas autre chose que la *théorie* du domaine scientifique envisagé.

C'est ainsi que les faits géométriques s'ordonnent en une géométrie, les faits arithmétiques en une théorie des nombres, les faits statiques, mécaniques, électrodynamiques en théories de la statique, de la mécanique, de l'électrodynamique, ou c'est encore ainsi que les faits de la physique des gaz se groupent en une théorie des gaz. Il en est de même en ce qui concerne les domaines scientifiques de la thermodynamique, de l'optique géométrique, de la théorie du rayonnement, de la conduction de la chaleur ou encore du calcul des probabilités et de la théorie des ensembles. La même remarque s'impose enfin, qu'il s'agisse de mathématiques pures (théorie des surfaces, théorie de Galois concernant les équations, théorie des nombres premiers) ou de sciences sans rapport direct avec les mathématiques pures telles que la théorie de la monnaie ou certains chapitres de la psychophysique.

Si maintenant nous considérons de plus près une théorie déterminée, nous constatons invariablement que l'édifice des concepts doit avoir pour base dans le domaine scientifique un nombre restreint de propositions exceptionnelles qui suffisent à elles seules à construire tout l'édifice d'après des principes logiques.

En géométrie, par exemple, il suffit d'en appeler uniquement à la proposition qui concerne la linéarité de l'équation du plan et la transformation orthogonale des coordonnées ponctuelles pour construire ensuite, et par le seul moyen de l'analyse, la science cependant si vaste de la géométrie euclidienne dans l'espace. De même la théorie des nombres s'édifie entièrement d'après les règles et les lois de calcul qui sont valables pour les nombres entiers. C'est encore un rôle analogue que jouent en statique, le principe du parallélogramme des forces, en mécanique les équations différentielles de Lagrange sur le mouvement et en électrodynamique les équations de Maxwell, à condition toutefois d'adjoindre à ces dernières un postulat relatif à la rigidité et à la charge de l'électron. Semblablement la thermodynamique se laisse en entier construire sur le concept de la fonction énergétique et sur les définitions de température et de pression qui en sont tirées au moyen des variables (entropie et volume). Nous trouvons de même au centre de la théorie du rayonnement la loi de Kirchhoff qui règle les rapports entre l'émission et l'absorption, dans le calcul des probabilités la loi des erreurs de Gauss, dans la théorie des gaz le principe de l'entropie conçu comme le logarithme négatif de la probabilité d'un état donné, dans la théorie des surfaces la représentation d'un élément curviligne par une forme quadratique différentielle, dans la théorie des équations le théorème concernant l'existence des racines, dans la théorie des nombres premiers le principe relatif à la réalité et à la fréquence des zéros dans la fonction riemanienne $\zeta(t)$.

Tous ces principes fondamentaux peuvent, à un premier point de vue, être envisagés comme les *axiomes de domaines scientifiques spéciaux* dont l'extension progressive s'achève ensuite d'une façon purement logique à l'intérieur de l'édifice conceptuel déjà exécuté. C'est surtout dans les mathématiques pures que ce point de vue s'affirme avec netteté, et c'est aux travaux qui s'en sont inspirés que nous devons le développement prodigieux de la géométrie, de l'arithmétique, de la théorie des fonctions et de toute l'analyse.

Cela étant, et pour les cas dont nous avons parlé, le pro-

blème relatif aux fondements d'un domaine scientifique spécial semblait avoir trouvé une solution ; mais celle-ci ne pouvait être que provisoire. En fait et dans chaque domaine le besoin se faisait sentir de fonder jusqu'aux propositions spécifiées plus haut, bien qu'elles fussent considérées comme des axiomes fondamentaux. C'est ainsi que l'on s'efforça de prouver soit la linéarité de l'équation du plan et l'orthogonalité de la transformation qui exprime un mouvement, soit les lois du calcul arithmétique, soit le parallélogramme des forces ou encore les équations du mouvement de Lagrange et la loi de Kirchhoff sur l'émission et l'absorption, soit enfin le principe de l'entropie et la proposition relative à l'existence des racines d'une équation.

Mais l'examen critique de ces « preuves » fit reconnaître qu'en soi elles n'en sont pas ; en réalité elles ne font que rendre possible le retour à certaines propositions plus fondamentales encore qui elles-mêmes apparaissent comme de nouveaux axiomes en lieu et place des lois à démontrer. C'est de cette façon qu'ont pris naissance les *axiomes* ainsi dénommés à juste titre aujourd'hui, de la géométrie, de l'arithmétique, de la statistique, de la mécanique, de la théorie du rayonnement ou de la thermodynamique. Ces axiomes forment une couche sous-jacente plus profonde en opposition à la couche axiomatique superficielle, caractérisée par les principes fondamentaux posés en premier lieu et que nous avons énoncés pour chaque domaine scientifique spécial. Le procédé de la méthode axiomatique, tel que nous venons de le décrire, revient donc à poser plus profondément les fondations qui soutiennent chacun des domaines scientifiques spéciaux, travail analogue à celui qui est nécessaire pour rehausser un bâtiment sans en compromettre la sécurité.

Pour qu'une théorie scientifique représentée par un édifice de concepts remplisse son but, deux exigences sont avant tout requises ; la première concerne la *dépendance* et respectivement *l'indépendance* des propositions de cette théorie, la deuxième *l'absence de contradiction* dont ces propositions prises dans leur ensemble doivent témoigner.

Occupons-nous tout d'abord de la dépendance et de l'indépendance des axiomes.

L'exemple classique dont on se sert pour prouver l'indépendance d'un axiome est fourni en géométrie par le *postulat des parallèles* qu'Euclide, remarquons-le, rangeait déjà parmi les axiomes. Par là, il écartait la question de savoir si cette proposition n'était pas elle-même conditionnée par les autres axiomes. Aussi, la méthode de recherche préconisée par Euclide est-elle restée typique de toute recherche axiomatique, et depuis ce grand savant la géométrie est-elle devenue l'exemple modèle de la science axiomatique.

La mécanique classique nous offre un autre exemple d'investigation concernant l'indépendance des axiomes. Comme nous l'avons fait remarquer, les équations de Lagrange sur le mouvement pouvaient être envisagées provisoirement comme les axiomes de la mécanique, car elles suffisent complètement à fonder les formules générales relatives à des forces quelconques et aux conditions quelconques qui les accompagnent. Mais une recherche plus approfondie montre qu'il est inutile pour l'édification de la mécanique, de postuler à la fois des forces et des conditions quelconques, et que par là le système des postulats peut être diminué. Cette constatation conduit d'un côté au système d'axiomes posés par Boltzmann, qui ne suppose que des forces, spécialement centrales il est vrai, mais qui n'exige aucune condition additionnelle, de l'autre au système d'axiomes défini par Hertz, lequel rejette les forces pour faire appel à des conditions, plus spécialement à des liaisons rigides. Ces deux systèmes d'axiomes constituent ainsi une couche plus profonde dans l'axiomatisation progressive de la mécanique.

Si nous considérons maintenant dans la théorie de Galois relative aux équations l'existence des racines d'une équation comme un axiome fondamental, celui-ci n'en reste pas moins un axiome dépendant ; car il peut, en tant que proposition existentielle, être dérivé des axiomes de l'arithmétique, comme Gauss l'a montré le premier.

Il en va de même si dans la théorie des nombres premiers nous considérons comme axiomatique la proposition concer-

nant la réalité des zéros de la fonction riemanienne $\zeta(t)$: pour creuser plus à fond la couche des axiomes purement arithmétiques la preuve de cette affirmation de réalité serait nécessaire, car c'est cette preuve qui seule garantirait la certitude des importantes conséquences que nous avons pu, en la postulant, établir pour la théorie des nombres premiers.

Il faut signaler comme étant d'un intérêt tout particulier pour un processus axiomatique la question relative à l'indépendance des principes d'un domaine scientifique par rapport à l'axiome de *continuité*.

Dans la théorie des nombres réels, on montre par exemple que l'axiome dit d'Archimède sur la mesure est indépendant de tous les autres axiomes arithmétiques. Cette constatation est, comme on le sait, d'une importance capitale pour la géométrie ; mais elle me paraît avoir aussi pour la physique un intérêt majeur, car elle nous conduit au résultat suivant : d'une part nous pouvons, en juxtaposant des longueurs terrestres, calculer les dimensions et les distances des corps dans l'espace, c'est-à-dire mesurer les grandeurs célestes par une mesure terrestre; d'autre part les mesures métriques permettent d'exprimer les distances jusque dans l'intérieur des atomes. Ces faits toutefois ne sont en aucune façon une conséquence logique des principes concernant la congruence des triangles et la configuration géométrique, mais uniquement le résultat d'une recherche empirique. Dans le monde physique, la validité de l'axiome archimèdien a donc besoin selon le sens indiqué d'une confirmation expérimentale directe à peu près comme la proposition relative à la somme des angles d'un triangle au sens connu.

D'une façon générale je pourrais formuler comme suit l'axiome de continuité en physique : « Lorsqu'un degré quelconque de précision est assigné d'avance à la validité d'une formule physique, il existe de petits domaines à l'intérieur desquels les hypothèses faites pour la formule peuvent varier librement sans que l'écart d'avec cette dernière dépasse le degré de précision prescrit. » Cet axiome ne fait au fond qu'exprimer ce qu'il y a d'immédiat dans la nature de l'expérience ; il est toujours implicitement supposé par les physi-

ciens, sans avoir été jusqu'à maintenant formulé d'une façon particulière.

Si, par exemple, de l'axiome concernant l'impossibilité d'un « *perpetuum mobile* » *de deuxième espèce* on fait avec Planck dériver le second principe de la Thermodynamique on utilise nécessairement cet axiome de continuité.

Ce dernier est également indispensable pour fonder la statique en utilisant l'axiome du parallélogramme des forces, ou du moins en choisissant certains autres axiomes qui s'en rapprochent beaucoup. C'est ce que Hamel a montré d'une manière très intéressante par l'emploi du principe relatif à la possibilité pour le continuum d'être bien ordonné.

On peut de même déplacer en profondeur les axiomes de la mécanique classique, si en vertu de l'axiome de continuité, on se représente le mouvement continu comme décomposé par le moyen d'impulsions en des mouvements rectilignes et uniformes qui se suivent un à un avec rapidité ; il faut alors utiliser comme un axiome mécanique essentiel le *principe du travail maximum de Bertrand* conformément auquel après chaque choc le mouvement qui en réalité se produit est toujours celui pour lequel l'énergie cinétique du système est un maximum en face de tous les mouvements compatibles avec le principe de la conservation de l'énergie.

Quant aux plus récentes tentatives de fonder la physique et spécialement l'électrodynamique, elles reposent complètement sur des théories du continuum et par suite elles impliquent dans la plus large mesure l'idée de continuité ; je ne les examinerai cependant pas ici, parce que ces recherches n'ont pas atteint un degré de perfection suffisant.

Passons maintenant à l'examen du deuxième problème dont nous avons parlé plus haut, à savoir la question concernant *l'absence de contradiction des axiomes*. Cette question est de la plus haute importance, car la présence d'une contradiction dans une théorie en compromettrait toute la stabilité.

Or il peut arriver que la notion de non-contradiction interne ne se concilie que difficilement avec des théories depuis longtemps acceptées et qui ont fait leurs preuves. Je

rappelle, par exemple, dans la théorie cinétique des gaz les difficultés relatives à la réversibilité périodique.

Souvent aussi il arrive que la non-contradiction interne d'une théorie est considérée comme allant de soi, alors qu'en réalité de profonds développements mathématiques seraient nécessaires pour la prouver. Pour illustrer ce fait, considérons le problème suivant tiré de la théorie de la conduction de la chaleur : distribution de la température à l'intérieur d'un corps homogène dont la surface est maintenue à une température déterminée qui varie suivant les régions. Cela étant, le postulat relatif au maintien de l'équilibre de température ne renferme en fait aucune contradiction interne. Mais en théorie il est nécessaire de prouver que le problème bien connu concernant les valeurs-limites de la fonction potentielle est toujours résoluble, car seule la solution de ce problème montre qu'une distribution de la température satisfaisant à l'équation de la conduction calorifique est en principe possible.

Mais en physique surtout il ne suffit pas de prouver que les principes d'une théorie s'accordent entre eux ; il faut encore montrer que ceux-ci ne contredisent pas les principes d'un domaine scientifique voisin.

Par exemple et comme je l'ai récemment fait voir, l'axiome de la théorie du rayonnement comporte, outre la loi fondamentale de Kirchhoff sur l'émission et l'absorption, une proposition spéciale sur la réflexion et la réfraction de rayons lumineux isolés que l'on peut énoncer en ces termes : soit deux rayons de lumière naturelle et de même énergie ; ils tombent chacun d'un côté sur une surface qui sépare deux milieux et cela suivant des directions telles que, le premier après son passage, le second après sa réflexion suivent la même direction. Dans ces circonstances, le rayon qui naît de leur union est de nouveau un rayon de lumière naturelle et de même énergie. Cette proposition, comme on le constate en fait, n'est en aucune manière en contradiction avec l'optique ; mais en sus elle peut être dérivée comme une conséquence de la théorie électromagnétique de la lumière.

Comme on le sait les résultats de la *théorie cinétique des gaz* sont en accord parfait avec la *thermodynamique*.

De la même façon *l'inertie électromagnétique* et la *gravitation d'Einstein* sont compatibles avec les concepts correspondants de la théorie classique en tant que ceux-ci sont envisagés comme les cas-limites des concepts plus généraux qui sont à la base des nouvelles théories.

Au contraire la *théorie moderne des quanta* et la connaissance progressive de la structure interne des atomes ont conduit à des lois qui contredisent directement l'électrodynamique édifiée jusqu'à présent sur les équations de Maxwell. C'est pourquoi à l'heure actuelle l'électrodynamique, ainsi que chacun le reconnaît, a impérieusement besoin d'une nouvelle base et d'une radicale transformation.

Comme on le voit par tout ce qui précède, la réfutation des contradictions qui surgissent doit toujours s'effectuer par un changement dans le choix des axiomes ; la difficulté consiste alors à découvrir un choix tel que toutes les lois physiques constatées découlent logiquement des axiomes choisis.

Il en va autrement lorsque les contradictions se dressent dans les sciences théoriques pures. Comme exemple classique d'un pareil événement on peut citer la théorie des ensembles et le *paradoxe de l'ensemble de tous les ensembles* dont l'origine remonte déjà à Cantor. Ce paradoxe est si pesant que des mathématiciens hors ligne comme Kronecker et Poincaré ont, à cause de lui, refusé le droit d'existence à toute la théorie des ensembles, qui est cependant l'un des rameaux les plus riches et les plus vigoureux des mathématiques.

La méthode axiomatique vint heureusement remédier à cet état de choses précaire. Par la mise au jour d'axiomes appropriés Zermelo, d'un côté, restreignit l'arbitraire des définitions concernant les ensembles, et de l'autre, limita avec précision les énoncés admissibles en les reportant sur les éléments des ensembles. De cette manière il réussit à développer la théorie des ensembles de façon à en faire tomber les contradictions verbales tout en lui laissant, malgré les restrictions imposées, la même étendue et la même capacité d'application.

Dans tous les cas envisagés jusqu'ici, il s'est agi de contradictions qui avaient surgi au cours du développement d'une théorie et dont la disparition nécessitait la refonte d'un système d'axiomes. Mais il ne suffit pas d'éviter les contradictions qui peuvent se présenter, si l'on veut rendre aux mathématiques par elles compromises leur réputation d'être le modèle de la science la plus rigoureuse. Par son essence même la méthode axiomatique a des exigences beaucoup plus étendues; elle doit en particulier prouver que, dans chaque cas et sur la base du système d'axiomes posés, les contradictions sont *absolument impossibles* à l'intérieur d'un domaine scientifique.

Conformément à cette exigence, j'ai démontré dans les *Fondements de la géométrie* la non-contradiction des axiomes posés en faisant voir que toute contradiction qui découlait logiquement d'axiomes géométriques devait nécessairement se manifester aussi dans l'arithmétique du système des nombres réels.

Pour les théories physiques elles-mêmes, il suffit non moins évidemment de ramener le problème de la *non-contradiction interne* à la non-contradiction des axiomes arithmétiques. C'est ainsi que j'ai montré la non-contradiction des axiomes indispensables à la *théorie du rayonnement* en construisant pour elle un système d'axiomes composés d'éléments analytiques indépendants, ce qui suppose la non-contradiction de l'Analyse.

L'on peut et l'on doit, cas échéant, procéder d'une façon semblable dans l'édification d'une théorie mathématique. Considérons par exemple comme des axiomes la proposition qui dans le développement de la théorie des groupes de Galois est relative à l'*existence des racines* et le principe qui dans la théorie des nombres premiers définit la *réalité des zéros* de la fonction riemanienne $\zeta(t)$; il faut alors dans chacun de ces cas prouver la non-contradiction du système d'axiomes envisagé, et pour cela démontrer par le moyen de l'Analyse la proposition concernant l'existence des racines, comme aussi le principe riemannien relatif à la fonction $\zeta(t)$, car c'est seulement de cette manière que l'achèvement de la théorie est assuré.

De même le problème de la non-contradiction d'un système d'axiomes pour les *nombres réels* se laisse ramener à un problème qui regarde les nombres entiers. C'est le mérite de Weierstrass et de Dédekind de l'avoir montré par leur théorie des nombres irrationnels.

L'axiome des *nombres entiers* et les bases de la *théorie des ensembles* constituent toutefois des cas uniques d'exception. Le chemin qui conduirait à un domaine scientifique plus spécial encore que le leur paraît inaccessible, car en dehors de la logique il n'existe plus aucune discipline à laquelle un dernier recours serait encore possible.

Cependant comme le devoir d'établir la non-contradiction est inéluctable il est nécessaire, semble-t-il, d'axiomatiser la logique elle-même et de prouver que la théorie des nombres comme celle des ensembles ne sont que des parties de la logique.

Cette voie a été depuis longtemps préparée, surtout par les profondes recherches de Frege ; mais elle a été finalement ouverte avec succès par Russell, aussi profond logicien que mathématicien pénétrant. Dans l'achèvement de la tâche grandiose que ce dernier a entreprise pour *axiomatiser la logique* on pourrait à bon droit voir le couronnement de l'œuvre même d'axiomatisation.

Cet achèvement toutefois nécessite encore un travail nouveau et multiple. Une réflexion plus approfondie montre en effet bien vite que le problème de la non-contradiction dans les ensembles et les nombres entiers ne se suffit pas à lui-même, mais qu'il se rattache à un vaste domaine de questions très difficiles qui relèvent de la théorie de la connaissance tout en ayant une couleur nettement mathématique. Pour caractériser brièvement cet ensemble de questions, je me bornerai à une simple énumération. *Un problème mathématique comporte-t-il toujours une solution ?* Question capitale à laquelle se rattache subsidiairement la suivante : le résultat d'une recherche mathématique est-il toujours *contrôlable ?* Dans le même ordre d'idées, qu'entendre par le *critérium de simplicité* relatif aux preuves mathématiques ? Comment définir dans les mathématiques et la logique le

rapport entre le *contenu et la forme* ? En quoi consiste enfin la *détermination* d'un problème mathématique par un nombre fini d'opérations ?

L'axiomatisation de la logique ne pourra nous satisfaire entièrement que le jour où toutes les questions de cette nature seront résolues et éclairées dans leur rapport.

La dernière surtout concernant la détermination par un nombre fini d'opérations est la plus connue et la plus fréquemment discutée, parce qu'elle regarde au plus haut point l'essence de la pensée mathématique.

Je voudrais augmenter l'intérêt qu'on lui porte en m'attachant à quelques problèmes mathématiques spéciaux dans lesquels elle joue certainement un rôle.

Comme on le sait, la théorie des *invariants algébriques* renferme un théorème fondamental d'après lequel il existe toujours un nombre fini d'invariants tout à fait rationnels, grâce auxquels tous les autres invariants semblables peuvent être représentés d'une façon complètement rationnelle. La première preuve générale de ce fait a été donnée par moi ; elle satisfait pleinement, je crois, notre besoin de simplicité et de clarté ; il est impossible toutefois de la transformer de façon à pouvoir, par son moyen, assigner des limites au nombre cependant fini des invariants qui composent tout le système ou d'établir réellement ces derniers. Des réflexions tout autrement conduites et des principes nouveaux ont été nécessaires pour constater que la détermination du système total des invariants exige uniquement des opérations dont le nombre est fini et se trouve renfermé dans des limites qui peuvent être assignées à l'avance.

La *théorie des surfaces* nous offre un autre exemple de ce fait. En effet la géométrie des surfaces du quatrième ordre soulève une question fondamentale, à savoir : de combien de nappes, séparées les unes des autres, une surface de cette espèce peut-elle tout au plus se composer ?

Pour répondre à cette question la première tâche qui s'impose est de prouver que le nombre de ces nappes doit être fini. Il semble facile d'en donner la preuve en s'engageant comme suit dans la théorie des fonctions. On suppose l'exis-

tence de nappes infiniment nombreuses et l'on choisit un point et un seul à l'intérieur de chaque portion d'espace limitée par une nappe. Mais le lieu où se condensent ces points qui par leur choix sont infiniment nombreux serait un point d'une singularité telle qu'il faut l'exclure pour une surface algébrique.

La voie indiquée par la théorie des fonctions ne nous permet donc en aucune façon d'assigner au nombre des nappes de la surface une limite supérieure. C'est pourquoi il vaut mieux avoir recours à des considérations basées sur le nombre des points d'intersection ; ces derniers nous enseignent finalement que le nombre des régions recherchées ne peut être supérieur à 12.

Bien que cette deuxième méthode soit si différente de la première, nous ne pouvons cependant ni la réduire ni la transformer au point de décider s'il existe réellement une surface du 4me ordre à 12 nappes.

Mais puisqu'une forme quaternaire du 4me ordre possède 35 cœfficients homogènes, nous pouvons nous représenter intuitivement une surface déterminée du 4me ordre par un point situé dans un espace à 34 dimensions. Le discriminant de la forme quaternaire du 4me ordre est, dans les cœfficients qu'elle possède, du degré 108 ; égalé à zéro il représente dans l'espace à 34 dimensions une surface du 108me ordre. Comme d'autre part les cœfficients du discriminant lui-même sont des nombres entiers déterminés, le caractère topologique de la surface discriminantielle se laisse fixer avec précision d'après les lois qui nous sont familières dans l'espace à deux ou trois dimensions. De cette façon nous pouvons être renseignés exactement sur la nature et la signification des territoires particuliers que la surface discriminantielle découpe dans l'espace à 34 dimensions. Représentées alors par les points de chaque territoire ainsi défini, les surfaces du 4me ordre possèdent toutes sûrement le même nombre de nappes. Cela étant, il est possible par un dénombrement fini, bien que très fatigant et de longue haleine, de confirmer si une surface du 4me ordre existe ou non avec des nappes en nombre $n \leq 12$.

Les considérations géométriques que nous venons de développer constituent la troisième voie à suivre pour répondre à la question posée. Elles permettent de le faire par un nombre fini d'opérations. En principe donc, notre problème est largement épuisé : il se trouve ramené à un problème d'un ordre à peu près analogue à la tâche de découvrir le chiffre de rang $10^{10^{10}}$ que l'on obtient en développant π sous forme de fraction décimale. Ce problème peut être manifestement résolu bien que la solution en reste inconnue.

En fin de compte il vaut mieux utiliser les recherches profondes et difficiles que Rohn a faites au moyen de l'algèbre et de la géométrie. Ces recherches en effet[1] nous font voir qu'une surface du 4me ordre ne peut pas comporter 11 nappes : en réalité il n'en peut exister que 10. Cette quatrième méthode est donc la seule qui apporte la solution complète du problème posé.

Ces développements spéciaux indiquent comment diverses méthodes de démonstration sont applicables au même problème ; ils permettent d'étudier de plus près, comme il le faut, la nature en soi de la preuve mathématique, si l'on veut éclaircir avec succès des questions analogues à celle de la détermination d'un problème par un nombre très grand, mais fini, d'opérations.

Tous les problèmes essentiels que je viens de caractériser, et parmi lesquels celui relatif au nombre des opérations n'est que le dernier traité et mentionné, me paraissent un champ important dont la découverte est toute récente. Pour conquérir ce champ nous devons, c'est là ma conviction, considérer comme l'objet d'une recherche à part le concept de la démonstration spécifiquement mathématique, exactement comme l'astronome doit prendre en considération le mouvement de la station où il se trouve et le physicien la théorie de ses appareils, ou encore exactement comme le philosophe est tenu de critiquer la raison elle-même.

La réalisation de ce programme constitue une tâche qui pour le moment est certes loin d'être achevée.

---

[1] Un exposé sommaire en a été fait par F. Klein dans ses « Conférences sur les mathématiques » Paris, Hermann. p. 29. (Note du traducteur.)

Pour conclure je voudrais en quelques mots résumer ma conception générale sur la nature de la méthode axiomatique.

Selon moi tout ce qui peut être objet de pensée scientifique est acquis, sitôt que la forme en est mûre pour une théorie, à la méthode axiomatique et par là indirectement aux mathématiques. Plus nous pénétrons dans les couches toujours plus profondes des axiomes au sens indiqué précédemment, plus nous acquérons sur la nature de la pensée scientifique des vues toujours plus profondes ; plus aussi nous devenons conscients de l'unité de notre savoir. Dans l'édifice des sciences enfin, dessiné par la méthode axiomatique, les mathématiques paraissent appeler à jouer un rôle directeur.

CHRONIQUE

Albert Gauthier-Villars.

C'est avec un profond regret que nous avons appris la mort de M. Albert Gauthier-Villars, l'un des éditeurs de *L'Enseignement mathématique*. Ancien élève de l'Ecole polytechnique (promotion 1881), Albert Gauthier-Villars avait renoncé à la carrière militaire pour continuer, suivant les traditions familiales, la direction de la célèbre maison d'éditions scientifiques. Engagé volontaire depuis le début de la guerre, il a succombé à son poste, en qualité de capitaine d'artillerie lourde, le 14 juillet, à l'âge de 57 ans.

En annonçant à l'Académie des sciences la mort du savant et sympathique éditeur des *Comptes rendus*, M. Emile Picard, Secrétaire perpétuel, a rappelé la haute compétence et la grande aménité de ce savant qui ne comptait que des amis dans le monde scientifique français et qui emporte les regrets de tous ceux qui l'ont connu.

La mort prématurée d'Albert Gauthier-Villars laissera un grand vide dans la maison d'éditions qu'il dirigeait avec tant de distinction. Que tous ses collaborateurs reçoivent l'assurance de notre vive sympathie.

Nous réitérons ici à la famille l'expression respectueuse de nos sentiments de regrets, qui, nous en sommes certains, seront partagés par tous les lecteurs de *L'Enseignement mathématique*.

La Rédaction.

Académie des Sciences de Paris. — Prix décernés.

Mathématiques. — *Prix Poncelet;* 2000 francs : Sir Joseph Larmor, membre de la Société Royale de Londres, professeur de mathématiques à l'Université de Cambridge, pour l'ensemble de ses travaux.

Prix Francœur; 1000 francs : M. Paul Montel, maître de conférences à la Faculté des Sciences de Paris, pour ses travaux sur les suites de fonctions analytiques.

Astronomie. — *Prix Lalande;* 540 francs : M. A. Belopolskij, directeur de l'Observatoire de Poulkovo, pour l'ensemble de ses travaux d'analyse spectrale appliquée à l'astronomie.

Prix Valz; 460 francs : M. Fr. Sy, astronome à l'Observatoire d'Alger, pour l'ensemble de ses travaux.

Prix Janssen; médaille : le père Stanislas Chevalier, directeur de l'Observatoire de Zô-Së, près Shanghaï, en Chine, pour ses travaux d'astronomie physique.

Nouvelles diverses. — Nominations.

Espagne. — *El Progroso cientifico.* Nous venons de recevoir le premier fascicule d'un nouveau périodique scientifique fondé par M. Z.-G. de Galdeano, professeur à l'Université de Saragosse. Cette revue semestrielle qui sera consacrée aux sciences mathématiques, physiques et chimiques, contiendra des travaux de doctrines, de critiques et de méthodologie scientifique, ainsi que des articles bibliographiques et des notices sur l'organisation de l'enseignement des sciences.

Etats-Unis. — M. J. L. Coolidge, professeur adjoint, est nommé professeur titulaire à l'Université Harvard.

Le *Bureau of Education* (Washington D. C.) vient de publier un catalogue des périodiques mathématiques avec l'indication des bibliothèques américaines où il peuvent être consultés. Elaboré par M. Dav.-Eug. Smith et Mme Caroline Eustis Sealy, ce recueil est appelé à rendre de grands services aux chercheurs.

France. — M. Drach est chargé du cours de mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences de Paris.

Italie. — MM. G. Colonnetti, professeur à l'Université de Pise, E. Laura, professeur à l'Université de Pavie, et R. Marcolongo, professeur à l'Université de Naples, ont été nommés membres correspondants du R. Istituto Lombardo.

Suisse. — L'Ecole polytechnique fédérale a conféré le titre de professeur à M. le Dr C. Brandenberger, chargé du cours de méthodologie à la section normale.

Nécrologie.

M. J.-H. Graf, professeur de mathématiques à l'Université de Berne, membre de la Commission internationale de l'enseignement mathématique, est décédé à l'âge de 66 ans.

S. Lattès. — M. Samuel Lattès est décédé le 5 juillet à l'âge de 43 ans. Depuis plusieurs années il enseignait le Calcul infinitésimal à la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse. Il laisse de nombreux travaux ayant trait aux équations fonctionnelles et aux transformations géométriques associées à de telles équations, travaux liés d'une façon remarquable avec les recherches de l'école italienne.

On peut ajouter qu'il vient de succomber brusquement à une courte maladie, alors qu'il était en pleine activité scientifique; il laisse, en effet, des travaux inédits, actuellement soumis à des jugements académiques et que la Faculté des Sciences de Toulouse se propose de publier. Aussi aurons-nous vraisemblablement à y revenir, dès que les manuscrits en question auront été plus complètement examinés.

Samuel Lattès laisse d'unanimes regrets; il était d'une nature douce, timide et affectueuse, d'un esprit subtil et parfois finement ironique. Il laisse une jeune femme très suffisamment mathématicienne pour comprendre la valeur des travaux de son mari et une fillette d'un âge beaucoup trop tendre pour se rendre compte du deuil qui la frappe. A. B.

M. P. Piazetti, professeur de géodésie et de mécanique céleste à l'Université de Pise, est décédé dans cette ville le 14 avril 1918, à l'âge de 58 ans. Il est l'auteur d'un traité très apprécié de géodésie et d'un volume sur la forme des corps célestes. On lui doit en outre des recherches remarquables sur la forme des surfaces de niveau proches du géoïde, sur la théorie des moyennes et des erreurs d'observation, et sur les corps d'attraction nulle. Il appartenait à l'Académie dei Lincei et à beaucoup d'autres institutions scientifiques.

M. C. Stéphanos, professeur de mathématiques à l'Université d'Athènes, membre de la Commission internationale de l'enseignement mathématique, est décédé à l'âge de 60 ans.

Ch. Wolf. — Nous apprenons avec regret la mort de M. Charles-Joseph-Etienne Wolf, doyen de la section d'astronomie de l'Académie des Sciences de Paris, décédé à Saint-Servan dans sa 91e année. Appelé en 1863 à l'Observatoire de Paris, il devint le collaborateur de Le Verrier. Il occupa pendant de nombreuses années la chaire d'astronomie de la Faculté des Sciences de Paris. Il fut élu membre de l'Institut en 1883 en remplacement de Liouville.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Année 1918-1919.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

Columbia University *(New-York)*. — T. S. Fiske : Theory of functions, 4. — F. N. Cole : Algebra; 4. — James Maclay : Differential geometry of surfaces, 4, first half-year; Applications of the elliptic functions, 3, second half-year. — D. E. Smith : History of mathematics, 2 ; Practicum in the history of mathematics, 4. — C. J. Keyser : Philosophy of mathematics, 4. — Edward Kasner : Ballistics, 2, second half-year; Seminar in differential geometry, 2. — W. B. Fite : Differential equations, 3. — Dr. C. A. Fischer : Calculus of variations, 3, second half-year.

Cornell University *(Ithaca)*. — J. McMahon : Theory of probabilities, 3 ; Introduction to acturial science, 3. — J. H. Tanner : Introduction to the mathematics of finance, 2. — V. Snyder · Descriptive geometry, 3 (first term) ; Analytic geometry of space, 3 (second term). — F. R. Sharpe : Hydrodynamics, 3 (first term); Elasticity, 3 (second term). — W. B. Carver : Projective geometry, 3. — A. Ranum : Line geometry, 3 (second term). — D. C Gillepsie : Differential Equations, 3. — W. A. Hurwitz : Differential equations of mathematical physics, 3. — C. F. Craig : Functions of a complex variable, 3. — F. W. Owens : Advanced calculus, 3. — Dr. M. G. Gaba : Problems in mathematics, 3.

Johns Hopkins University *(Baltimore)*. — F. Morley : Higher geometry, 3 (first term) ; Theory of functions, 3 (second term) ; Dynamics and hydro-

dynamics, 2 (second term). — A. B. Coble : Theory of correspondences, 2. — A. Cohen : Elementary theory of functions, 2 ; Applied mathematics, 2 (second term).

University of Chicago. *Autumn quarter.* — E. H. Moore : Matrices in general analysis, 3. — L. E. Dickson : Theory of numbers, 3. — E. J. Wilczynski : Projective differential geometry, 3. — H. E. Slaught : Differential equations, 3. — A. C. Lunn : Heat and molecular physics, 3 ; Electron theory, 3. — *Winter quarter.* — E. H. Moore : Functions of infinitely many variables, 3. — L. E. Dickson : Algebraic numbers, 3. — G. A. Bliss : Definite integrals, 3 ; Differential equations, 3. — E. J. Wilczynski : Projective differential geometry, II, 3. — A. C. Lunn : Thermodynamics, 3 ; Theory of sound, 3. — *Spring quarter.* — E. H. Moore : Functions of infinitely many variables, II, 3 ; Limits and series, 3. — L. E. Dickson : Linear algebra, 3 ; Solid analytics, 3. — G. A. Bliss : Functions of lines, 3 ; Partial differential equations, 3 ; Function of a complex variable, 3. — A. C. Lunn : Geometric optics, 3.

University of Illinois *(Urbana, Ill.).* — E. J. Townsend : Functions of a complex variable, 3 ; Differential equations and advanced calculus, 3. — G. A. Miller : Continuous groups, 3 (second term) ; Theory of equations, 3 (first term). — H. L. Rietz : Actuarial theory, 3. — J. Stebbins : Least squares, 2 (first term). — J. B. Shaw : Fundamental functions, 3 (first term) ; Functional transformations, 3 (second term). — C. H. Sisam : Invariants and higher plane curves, 3 ; Solid analytic geometry, 3 (second term). — R. D. Carmichael : Elliptic functions, 3. — A. Emch : Projective geometry, 3. — A. R. Crathorne : Calculus of variations, 3. — Dr. E. B. Lytle : History of mathematics, 2 (second term). — Dr. G. A. Wahlin : Theory of numbers, 3.

ITALIE[1]

Bologna ; *Università.* — Burgatti : Fondamenti nella Meccanica Celeste, 3. — Donati : Elettrodinamica ; Elettroottica ; Teorie relativistiche, 3. — Enriques : Principi delle Matematiche [I, Storia critica dei concetti : Geometria, Analisi infinitesimale, Meccanica e Cosmologia nell'antica Grecia. II, Moderna critica dei principi], 3. — Pincherle : Calcolo funzionale secondo Volterra et Fréchet ; Teoremi di esistenza per le equazioni differenziali ; Equazioni integrali, 3.

Catania ; *Università.* — Cipolla : Serie di Fourier ; Problema di Dirichlet ; Funzioni sferiche e cilindriche ; Funzioni di variabile complessa ; Funzioni ellittiche ; Applicazioni diverse, 4. — Daniele : Equazioni differenziali della fisica matematica ; Applicazioni, 4. — Scorza : La geometria iperspaziale e alcune delle sue applicazioni, 4. — Severini : Calcolo delle variazioni, 4 $^1/_2$.

Genova ; *Università.* — Loria : Geometria infinitesimale delle curve e delle superficie, 3. — Tedone : Equazioni a derivate parziali con due variabili indipendenti e loro applicazione alla risoluzione di problemi di fisica, 3. — N. N. : Analisi superiore, 3.

---

[1] Les cours fondamentaux, tels que Analyse algébrique et infinitésimale, Géométrie analytique, descriptive, projective, Mécanique rationnelle, existant dans toute université, ne figurent pas dans la liste.

Messina; *Università*. — Bottasso : Analisi vettoriale ; Potenziale newtoniano e problemi al contorno ; Teoria dell'elasticità, 3. — Calapso : Funzioni ellittiche, 3. — Giambelli : Geometria analitica degli iperspazi ; Teoria geometrica dell'eliminazione algebrica, 3.

Napoli; *Università*. — Amodeo : Storia delle Matematiche [Evo antico (dalle prime epoche al 1200)], 3. — Del Re : Analisi estensiva ad *n* dimensioni con applicazioni alla Geometria differenziale ed alla Meccanica, 4 $^1/_2$. — Marcolongo : Serie di Fourier ; Funzioni sferiche, cilindriche, di Lamé ; Applicazioni varie, 3. — Montesano : La teoria delle trasformazioni birazionali dello spazio ; Le trasformazioni birazionali involutorie, 3. — Pascal : Capitoli scelti di analisi matematica, 3. — Pinto : Ottica geometrica, 3.

Padova; *Università*. — d'Arcais : Funzioni di variabile complessa ; Equazioni integrali, 4. — Gazzaniga : Teoria dei numeri, 3. — Levi-Civita : Campi elettromagnetici, 4. — Ricci : Calcolo differenziale assoluto con applicazioni, 4. — Severi : Geometria differenziale, 4.

Palermo; *Università*. — Bagnera : Funzioni analitiche generali ; Funzioni intere ; Equazioni differenziali lineari, 3. — De Franchis : Geometria delle superficie algebriche, 3. — Gebbia : Meccanica dei sistemi continui ; Potenziale newtoniano e logaritmico ; Idrostatica et idrodinamica, 4 $^1/_2$. — Signorini : Complementi di meccanica razionale con particolare riguardo alla teoria della elasticità, 3.

Pavia; *Università*. — Berzolari : Curve e superficie algebriche, 3. — Cisotti : Idromeccanica, 3. — Gerbaldi : Funzioni di variabile complessa e funzioni ellittiche, 3. — Vivanti : Teoria delle funzioni di variabili reali, 3.

Pisa ; *Università*. — Bertini : Geometria sopra una curva algebrica, 3. — Bianchi : Teoria dei gruppi continui di trasformazioni, 4 $^1/_2$. — Dini : Degli sviluppi in serie di Fourier e degli altri più generali sulla rappresentazione analitica delle funzioni di una variabile reale data arbitrariamente in un certo intervallo, 4 $^1/_2$. — Maggi : Teoria del campo elettromagnetico fisso e mobile, 4 $^1/_2$. — N. N. : Meccanica superiore, 3.

Roma; *Università*. — Bisconcini : Applicazioni geometriche del calcolo, 3. — Bompiani : Trasformazioni di contatto nello spazio e loro gruppi continui, 3. — Castelnuovo : Equazioni algebriche e gruppi di sostituzioni, 3. — Crudeli : Teoria dei gruppi continui di trasformazioni, 3 — Silla : Equazioni differenziali della dinamica, 3. — Volterra : Teoria generale delle onde, 3 ; Idrodinamica, 3.

Torino; *Università*. — Boggio : Forme d'equilibrio delle masse fluide vuotanti, 3. — Fubini : Funzioni modulari, automorfe, fuchsiane : Equazioni differenziali ordinarie a coefficienti razionali, 3. — Segre : Complessi algebrici di rette, 3. — Somigliana : Termodinamica ; Teoria dei gas ; Propagazione del calore, 3.

SUISSE

Semestre d'hiver (octobre 1918 à mars 1919).

Bâle; *Université*. — W. Matthies : Math.-phys. Seminar, 2. — X. : Analytische Geometrie, 4 ; Ueber ein Kapitel der höheren Math., 4 ; Uebgn. 1 ;

Math. Seminar, 1. — O. Spiess : Differ.u. Integralrechnung I. Teil, 4 ; Differentialgleichungen, besonders die der Physik, 3 ; Math. Proseminar, 1 ; Math. Seminar, gemeinsam mit dem Ordinarius des Faches, 1. — R. Flatt : Pädagogisches Seminar ; math.-naturwiss. Abteilung, I. Teil, 3 ; Projective Geometrie, 2 — M. Knapp : Präzession und Nutation, für Vorgerüktere, 2 ; Sphärische Astronomie, für Anfänger, 2 ; Populäre Astronomie I, 1 ; Lektüre von Ptolmäus : Almagest, als Kolloquium, 1 ; Praktikum auf der Sternwarte, 5.

Berne ; *Université.* — G. Huber : Theorie der höheren ebenen Kurven, 3 ; Elliptische und Thetafunktionen, 2 ; Math. Seminar, 1. — Crelier : Integralrechnung, 1 ; Analytische Geometrie der Kegelschnitte, 2 ; Darstellende Geometrie, 2 ; Algebraische Analysis, 2 ; Analytische Geometrie, 2 ; Darstellende Geometrie. 1 ; Nichteuklidische Geometrie, 2. — Mauderli : Einführung in die astronomische Beobachtungpraxis, 2 ; Wiss. Rechnen mit besonderer Berücksichtigung der Bedürfnisse der Astronomie I : Benützung und Herstellung math.-astr. Tafeln, 2 ; Die chron. Grundbegriffe, Osterrechnung, Kalender, 1 , Astronomisches Kolloquium. — Berliner : Höhere Algebra, 2 ; Anal. Zahlentheorie, 1 ; Additive Zahlentheorie, 1. — Huber : Synthetische Geometrie II, 1 ; Differentialgeometrie : Raumkurven und Flächen, 1. — Moser : Math. Grundlagen des Alters-und Invalidenversicherung, 2 ; Ausgewählte versicherungswiss. Kapitel ; Math.-versicherungswiss. Seminar, 2. — Bohren : Die Technik der Unfallversicherung und die schweiz. Unfallversicheaungsanstalt, 2 ; Methode der kleinsten Quadrate, 1.

Fribourg ; *Université.* — Plancherel : Géométrie analytique, 3 ; Equations différentielles, 3 ; Exercices de géométrie analytique, 1 ; Séminaire mathématique, 2. — Daniëls : Differentialgleichung, I. Teil, 4 ; Uebungen zu Differentialrechnung, 1 ; Thermodynamique, 1re partie, 3 ; Calcul des probabilités, 2 ; Die Grassman'sche Ausdehnungslehre, 1.

Genève ; *Université.* — C. Cailler : Calcul diff. et intégr., 3 ; Exercices, 2 ; Mécanique rationnelle, 3 ; Exercices, 2 ; Compléments de calcul diff. et intégr., 1 ; Conférences d'analyse math., Equations intégrales, 2. — Fehr : Eléments de math. sup., 3 ; Conférence d'algèbre et de géométrie analytique, 1 ; Exercices pratiques sur les éléments de math. sup., 2 ; Géométrie projective, 1 ; Séminaire de math. sup., Chap. choisis d'algèbre, 2 ; Séminaire de math. élémentaire, Méthodologie mathém., 1. — Gautier : Astronomie physique, 2.

Privat-docents : Mirimanoff : Calcul des probabilités, 2. — Tiercy : Mécanique physique, Théorie des déformations, 1.

Lausanne ; *Université et Ecole d'ingénieurs.* — Amstein : Théorie des fonctions, 3 ; Complément de calcul intégral, 2. — G. Dumas : Calcul diff. et intégral, 5 : Exercices, II, 2 ; Questions d'analyse, 2 ; Séminaire mathématique, 1. — Lacombe : Géométrie descriptive, 4 ; Epures, 4 ; Géométrie analytique, 2 ; Géométrie de position avec exercices, 3. — Mayor : Mécanique rationnelle, I, 4 ; Exercices, 1 ; Physique mathématique, 2. — L. Maillard : Calcul infinitésimal, avec applications aux sciences, 4 ; Astronomie sphérique, 3 ; Mécanique rationnelle, 2. — S. Dumas : Calcul des probabilités, II, 3.

Privat-docents : Ch. Jaccottet : Fonctions d'une variable réelle, 2. — M. Paschoud : Introduction à la physique mathématique, 2.

Zurich ; *Université.* — Fueter : Einführung in die mathem. Behandlung der Naturwissenschaften, 3 ; Uebgn., 1 ; Theorie der automorphen Funktionen, 4 ; Mathem. Seminar mit Prof. Speiser, 1. — Speiser : Differential- und Integralrechnung, I, 4 ; Galois'sche Theorie der algebraischen Gleichungen, 3 ; Uebgn., 1. — Wolfer : Einleitung in der Astronomie, 3 ; Uebgn., 2 ; Bahnbestimm. v. Planeten u. Kometen, 2.

Privat-docents : Gonseth : Angew. Mathematik, 4. — Bernays : Mengenlehre, 3.

Zurich ; *Ecole polytechnique fédérale, section normale.* — Hirsch : Höh. Mathematik I, 6 ; Repet., 1, Uebgn., 2 : III, 3 ; Uebgn., 1. — Franel : Mathématiques supérieures, I. 6 ; Répét., 1 ; Exercices, 2 ; III, 3 ; Exercices, 1. — Grossmann : Darstell. Geometrie, 4 ; Repet., 1, Uebgn., 4 ; Projekt. Geometrie, 4. — Weyl : Analyt. Geometrie, 2 ; Uebgn., 1. — Kollros : Géométrie descriptive, 4 ; Répét., 1 ; Exerc., 4. — Meissner : Mechanik II, 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 2. — Hurwitz : Ellipt. Funktionen, 4 ; Höhere Zahlentheorie, 2. — Hurwitz u. Kollros : Math. Seminar, 2. — Weyl : Theorie des elektromagn. Feldes, 4 ; Integralgleichungen, 2. — Meissner : Schwingungs- u. Wellenbewegungen, 2. — Bæschlin : Vermessungskunde ; Höh. Geodäsie, 3 ; Repet., 1. — Wolfer : Einleitung in die Astronomie, 3 ; Uebgn., 2 ; Bahnbestimmungen von Planeten u. Kometen, 2. — Amberg : Math. der Pensionsversicherung, 2. — Brandenberger : Einführung in den math. naturw. Unterricht I, 2. — Pólya : Einf. in die Analysis reeller Grössen, 2. — Kienast : Analyt. Mechanik, 2.

Cours libres. — Amberg : Mathem. der Pensionsversicherung, 2. — Beyel : Rechenschieber mit Uebgn., 1 ; Darstellende Geometrie, 2 ; Kegelschnitte, 1. — Brentano : Elektronentheorie auf optischem u. elektrischem Gebiet, 2. Gonseth : Questions choisies de mathématiques appliquées, 2 ; Die Fläche 3. Grades, 1. — J. Keller : Ausgewählte Kapitel der darstellenden Geometrie, 2 — Kraft : Die Grundkräfte der Welt, 1 ; Geometrische Analysis, 3 ; Kinetik, Bewegung materieller Systeme unter der Wirkung von Kräften, 3. — Pólya : Geometrische Anwendungen der Funktionentheorie, 2.

BIBLIOGRAPHIE

Emile Borel. — **Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe**, rédigées par Gaston Julia. (Collection E. Borel.) — 1 vol. gr. in-8° de xii-164 p. ; Prix : 7 fr. 50. Gauthier-Villars, Paris, 1917.

On peut, dans ce nouveau volume, distinguer au moins deux grandes idées. La première consiste en ce qu'il est possible de trouver, à partir des séries entières et en liaison étroite avec celles-ci, des représentations d'une fonction monogène qui ignorent les frontières infranchissables pour les séries entières elles-mêmes. La seconde consiste en la possibilité de construire des fonctions monogènes *non analytiques*, c'est-à-dire des fonctions

d'une variable complexe dont l'existence n'est appuyée, en aucune région du champ complexe, sur l'existence d'un développement taylorien, cette existence même étant une impossibilité à cause du caractère partout dense de l'ensemble des singularités de la fonction.

Combien de telles thèses auraient semblé audacieuses il y a seulement une dizaine d'années ! Elles dépassent d'une manière étonnante le point de vue de Weierstrass, pour lequel il n'y avait pas de fonction analytique sans série entière convergeant quelque part dans un cercle, mais elle ne dépasse nullement celui de Cauchy, sinon par de nouveaux développements et de nouvelles précisions, dont les intégrales définies, prises suivant les contours tracés dans le champ complexe, s'accomodent parfaitement.

M. Borel a d'abord dû perfectionner la théorie des ensembles de mesure nulle, ensembles qui ont la puissance du continu et se construisent à partir de points fondamentaux formant un ensemble dénombrable. Ainsi l'ensemble des points à coordonnées rationnelles est dénombrable et d'ailleurs dense dans tout le plan. Mais, en parlant un langage sommaire et rapide, je puis dire qu'autour de tout point rationnel il y a une infinité continue de points irrationnels.

On conçoit maintenant que, à une variable z, puisse, dans de tels ensembles, correspondre une fonction $f(z)$ ayant pour points singuliers les points fondamentaux dont la densité empêchera l'existence de tout développement taylorien.

De même — et c'est le sujet traité en premier lieu par M. Borel — on peut imaginer que des séries de polynomes, valables dans tout le champ d'existence d'une fonction monogène à points singuliers en nombre infini et d'abord isolés (telle une fonction méromorphe), soient encore valables quand ces points, sans cesser de former un ensemble dénombrable, viennent se ranger en ensemble dense sur une certaine ligne singulière, qui de ce fait ne constitue en rien un empêchement au prolongement appuyé sur la série de polynomes considérée.

Et les séries de polynomes ainsi invoquées sont généralement constructibles par polynomes extraits d'une seule et même série entière. On voit donc que Weierstrass, tout en ne disant que des choses dont l'existence ne saurait être contestée, montrait qu'il les voyait d'une manière rigoureuse mais étroite ou tout au moins spéciale. La série entière a une souplesse que le géomètre allemand n'a pas complètement mise en évidence ; ce qui est obstacle pour elle, quand on veut ne la voir que sous une forme intangible, cessera de l'être si l'on groupe ses termes, suivant des lois nouvelles, de manière à en faire de certaines séries de polynomes.

Je crois en avoir assez dit pour montrer le très grand intérêt de ces *Leçons*, fort bien rédigées d'ailleurs par M. Gaston Julia. Félicitons-nous aussi de ce que MM. Borel et Julia, en prenant tous deux une part active à la guerre, aient cependant pu trouver le temps de mettre au jour cette nouvelle publication si propre à montrer la fécondité des conceptions de l'école française créée par Cauchy. A. Buhl (Toulouse).

Ernest Flamard. — **Calcul des systèmes élastiques de la construction** (*Encyclopédie industrielle* fondée par C. Lechalas). — 1 vol. gr. in-8°, de VII-200 p., avec 171 fig. ; 12 fr. ; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1917.

L'auteur établit le calcul des systèmes élastiques de la construction en

partant de la notion de travail de déformation. Dans le *Livre premier*, il donne l'étude des théorèmes fondamentaux relatifs aux dérivées et au minimum de travail de déformation. Il en tire ensuite des règles pratiques pour la résolution des problèmes d'application concernant les poutres droites, les poutres courbes et les systèmes articulés, qui font l'objet des livres II, III et IV.

M. Flamard a résumé dans la *Préface* le point de vue auquel il se place pour établir ces principes fondamentaux. En voici le principal passage :

« Les principes fondamentaux, théorèmes des dérivées du travail et du travail minimum de déformation sont dus au célèbre ingénieur italien Alberto Castigliano. Nous avons établi ces principes généraux d'après le mode d'exposition adopté au cours de notre Thèse sur les *Méthodes nouvelles de la statique des constructions*, nous inspirant par ailleurs des beaux résultats théoriques mis en évidence par M. Bertrand de Fontviollant dans son remarquable Mémoire sur les *Déformations élastiques des pièces et systèmes de pièces à fibres moyennes planes ou gauches*. »

« L'application systématique des principes généraux dont il s'agit, à la recherche des déplacements élastiques absolus et à celle des efforts de liaisons surabondantes, met en jeu les seules dérivées premières du travail de déformation et conduit à des calculs basés sur la simple notion d'intégrale définie, susceptible d'évaluation à la fois graphique et analytique. La méthode du travail de déformation est ainsi caractérisée par la généralité, la précision et la sûreté de son emploi dans l'étude complète et rigoureuse des systèmes élastiques de la construction. Dès lors, au moins équivalente aux procédés ordinaires de calculs fondés sur la géométrie des déformations, relativement aux questions usuelles, la méthode préconisée leur est nettement supérieure dans l'examen et la résolution des nombreux problèmes complexes qu'envisage la théorie de la résistance des matériaux. »

Cet ouvrage apporte une intéressante contribution à l'étude théorique et pratique de la résistance des matériaux.

Œuvres de Charles Hermite, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, par Emile Picard. Tome IV. — 1 vol. gr. in-8°, de 596 p. ; avec 2 planches, reproduction de la médaille du Jubilé d'Hermite et un fac-similé de lettre ; 25 fr. Librairie Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1917.

Ce volume forme le quatrième et dernier des Œuvres de Charles Hermite. Les mathématiciens sauront gré à M. Picard, Secrétaire perpétuel de l'Académie des Sciences, d'avoir pu terminer cette publication, malgré les difficultés de toutes sortes, dues aux circonstances actuelles

Le Tome IV contient les travaux publiés de 1880 à 1901, année de la mort d'Hermite. Ils sont consacrés, pour la plupart, à la théorie des fonctions elliptiques et à leurs applications. Mais on y trouve aussi des mémoires fondamentaux sur les fonctions eulériennes, la théorie des nombres, les polynomes de Legendre, les fractions continues, les fonctions analytiques, etc.

Ce volume renferme en outre des notices biographiques et des discours prononcés par Hermite dans diverses occasions. « Plusieurs de ces pages, dit M. Picard dans l'Avertissement, sont d'un haut intérêt, non seulement au point de vue scientifique, mais parce qu'elles jettent quelque jour sur la

personnalité si originale d'Hermite. Elles sont à rapprocher des lettres d'Hermite à Stieltjes publiées antérieurement, où, à côté du géomètre, apparaît souvent l'homme. On doit d'ailleurs considérer que cette correspondance[1], remarquable à tant de titres, fait partie des Œuvres complètes d'Hermite, comme les quatre Volumes dont nous terminons aujourd'hui la publication. »

L'œuvre du savant géomètre se trouvait dispersée dans un grand nombre de périodiques français et étrangers. Réunie avec beaucoup de soin par M. Picard, elle grandit singulièrement, et forme maintenant un précieux instrument de travail pour les mathématiciens. Ainsi que le remarque la Préface du Tome I, les mémoires d'Hermite sont courts, à peu d'exceptions près. « La marche générale des idées y est toujours mise avec évidence ; mais, surtout dans la première partie de la carrière d'Hermite, la rédaction se présente sous une forme synthétique, et le soin d'établir de nombreuses propositions intermédiaires, dont l'énoncé seul est indiqué, est laissé à la charge du lecteur. Quel fructueux exercice que la lecture d'un de ces Mémoires fondamentaux pour l'étudiant bien doué qui cherche à en rétablir tous les détails. » H. F.

L. Kollros. — **Géométrie descriptive.** — 1 vol. p. in-8° de VIII-154 p., avec 170 fig. ; relié 5 fr. ; Orell Füssli, Zurich, 1918.

Ce *Précis* donne un exposé clair et concis des principes fondamentaux de la Géométrie descriptive, depuis les premiers éléments jusqu'à la photogrammétrie et à la résolution graphique des équations linéaires. C'est un *résumé* du cours professé par l'auteur à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich, où il est complété par de nombreux exercices théoriques et pratiques.

Nous pouvons nous borner à donner un tableau des matières contenues dans ce volume qui est appelé à rendre de grands services aux étudiants. Il comprend quatorze chapitres :

I. Projection cotée. — II. Affinité. — III. Méthode de Monge. — IV. Axonométrie. — V. Homologie. Coniques. — VI. Cônes et cylindres. — VII. Sphère. — VIII. Surfaces de révolution. — IX. Surfaces réglées. — X. Surfaces développables. — XI. Hélices et hélicoïdes. — XII. Projection centrale. — XIII. Cartes géographiques. — XIV. Géométrie descriptive à n dimensions.

Ajoutons que l'auteur utilise la notation, généralement en usage en Suisse, et qui consiste à représenter les points par des lettres majuscules, A, B, C, ..., les droites par des petites lettres a, b, c, ... et les projections par les mêmes lettres affectées d'un indice, A_1, A_2, A_3 ; B_1, ... C_3 ; a_1, a_2, a_3 ; b_1, ... c_3, ... H. F.

Edm. Landau. — **Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale.** — 1 vol. in-8°, 143 p. ; 6 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce petit livre de 143 pages est formé de deux parties bien différentes. La première constitue une introduction à la théorie des nombres algé-

[1] Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, 2 volumes, Paris, 1905 (*Réd.*).

briques. L'auteur s'y propose essentiellement de démontrer par le plus court chemin le théorème fondamental de Dedekind sur la décomposition univoque d'un idéal en idéaux premiers. Pour lire les 50 pages qu'elle contient, il suffit de connaître qu'un nombre ordinaire est décomposable d'une seule manière en nombres premiers, qu'une équation algébrique de degré n a n racines et qu'une fonction rationnelle symétrique s'exprime comme fonction rationnelle des fonctions symétriques élémentaires, toutes connaissances qu'un étudiant acquiert dans sa première année d'études universitaires. La seconde partie se propose de faire connaître aux mathématiciens les résultats les plus importants de la théorie analytique des idéaux, en particulier le théorème que dans tous les corps algébriques il y a asymptotiquement le même nombre d'idéaux premiers. L'auteur avait déjà exposé cette théorie jadis dans son Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen. Depuis lors, la découverte importante de Hecke que la fonction $\zeta_K(s)$ relative à un corps algébrique K quelconque est prolongeable analytiquement dans tout le plan et satisfait à une équation fonctionnelle simple permet de retrouver d'une manière différente les anciens résultats de la théorie et d'obtenir de nouveaux résultats. Aussi le commencement de la deuxième partie est-il consacré à la démonstration du théorème de Hecke. La lecture de la seconde partie ne suppose aucune autre connaissance préalable que celle de la première partie et celle des éléments de la théorie des fonctions analytiques.

On retrouve dans cet ouvrage toutes les qualités de rigueur, de clarté et de précision qui distinguent les travaux antérieurs de M. Landau. En particulier, il ne semble guère possible de ramener à plus de concision la première partie du livre. Rien ne s'y trouve démontré, qui ne soit nécessaire pour la suite et tout ce qui n'est pas nécessaire est élagué. Ce souci de simplification est peut-être poussé trop loin à quelques endroits et risque alors de rendre plus difficile une vue d'ensemble de la théorie.

A noter la composition typographique très soignée ; aucune table d'errata n'accompagne le livre et je n'ai rencontré, à la lecture, aucune faute typographique. M. Plancherel (Fribourg).

L. Lecornu. — **Cours de Mécanique,** professé à l'Ecole Polytechnique. Tome III. — 1 vol. gr. in-8° de IV-670 pages ; 25 fr. ; Gauthier-Villars et Cie, Paris, 1918.

Le troisième volume du *Cours* de M. Léon Lecornu traite de la Mécanique appliquée. Le savant auteur, dans une courte préface, n'ose se flatter d'avoir su passer, sans heurt, de la Mécanique rationnelle des deux volumes précédents, aux applications appuyées sur des formules empiriques. Cependant il suffit de parcourir la première partie du présent livre, consacrée à la résistance des matériaux, pour être complètement rassuré sur la solidité et l'élégance de la transition. Après avoir rappelé la statique rationnelle, particulièrement sous la forme graphique qui relève aussi du Cours de Géométrie de l'Ecole, il entre dans le vif du sujet en étudiant les relations entre efforts et déformations relatifs aux solides. Il sépare soigneusement les résultats empruntés à la théorie de l'élasticité des résultats pratiques venant les simplifier. Dans le même ordre d'idées il n'y a pas que la théorie élastique qui donne quelque chose ; le simple théorème du travail virtuel a été

remarquablement combiné, par M. Bertrand de Fontviolant, avec les principes de la résistance des matériaux.

D'ailleurs, si l'on examine quelques problèmes particuliers (poutres encastrées, posées sur appuis, etc.) on est frappé de la simplicité avec laquelle, par l'intermédiaire d'équations linéaires, on retrouve la plupart des théories de Saint-Venant. Je conseillerai presque d'étudier d'abord ces questions simplifiées à qui voudrait s'occuper ensuite d'élasticité rationnelle ; et le conseil serait vraisemblablement d'accord avec l'ordre historique. Les équilibres élastiques de l'anneau, des ressorts en lames, en spirales, en hélices, sont des questions à propriétés géométriques. L'équilibre d'une plaque est beaucoup plus difficile mais devient cependant relativement abordable, par des moyens élémentaires, de par une certaine manière approchée de tenir compte des conditions au pourtour. Le *flambement* ne va pas sans des considérations de courbure d'où proviennent encore des équations linéaires très simples quand le phénomène tend à se produire après de petites déformations.

Les systèmes *hyperstatiques*, c'est-à-dire surabondamment équilibrés, ont une théorie véritablement grandiose. Le principe du travail minimum est, pour eux, ce que le principe du travail virtuel est pour les systèmes de la statique rationnelle. Les systèmes réticulaires, les poutres à plus de deux appuis illustrent facilement le principe général.

L'équilibre des massifs de terre a été surtout étudié par M. Boussinesq qui (*Comptes rendus*, 1918) poursuit toujours une telle étude. Il l'appuya dès l'abord sur un potentiel logarithmique spécial. On y rencontre d'intéressantes familles de courbes le long desquelles, par exemple, l'éboulement tend à se produire et, dans les cas les plus simples, les murs de soutènement se peuvent étudier par des lois analogues à celles s'appliquant aux digues.

Enfin, à ces questions statiques s'adjoignent, dans des circonstances généralement peu souhaitées mais qu'il faut justement savoir prévoir, certains faits dynamiques. Un système destiné à l'équilibre peut être ébranlé par un choc ; les vibrations des barres nous ramènent notamment aux équations aux dérivées partielles ainsi qu'aux fonctions arbitraires et aux séries de solutions simples qui y satisfont. Une très forte pression, qu'on peut se représenter de manière statique, peut entraîner (effet dynamique) l'écrasement d'un *crusher ;* on mesure ainsi la force d'expansion d'un explosif et voilà la résistance des matériaux rattachée à des questions de balistique intérieure. L'étendue n'y manque pas plus que l'originalité.

L'Hydraulique, image simplifiée de l'Hydrodynamique, a des équations et des explications approchées qui ne vont pas non plus sans quelque élégance. C'est ce que l'on pourrait dire du mouvement régularisé par vitesses moyennes, du théorème de Bernoulli complété pour le cas d'un fluide visqueux et surtout d'un cas simple, d'abord traité par M. Boussinesq, où l'on explique l'apparition des tourbillons par la discussion de l'intégrale d'une simple équation différentielle linéaire. Les premiers problèmes particuliers ont trait aux écoulements par des orifices de formes diverses puis par les déversoirs. Viennent ensuite les pertes de charge par modification brusque du diamètre ou de la direction d'une conduite, les pertes lentes dans les longs tuyaux et le phénomène si curieux et parfois si désastreux du *coup de bélier*. Celui-ci dépend d'une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique, tout à fait analogue à l'équation des cordes vibrantes et

s'intégrant, au premier abord, de la même manière ; mais les circonstances accessoires sont nombreuses et compliquées. La présence de poches d'air dans la conduite, loin d'amortir le phénomène, ne fait souvent que l'exciter. Dans un canal, des phénomènes plus ou moins comparables peuvent être observés ; ce sont le *ressaut*, d'abord immobile mais transformable en ondes de translation, puis l'onde solitaire dont le profil a encore d'intéressantes propriétés géométriques. Quant aux ondes d'oscillation, qui ne sont jamais isolées, leur étude se ramène assez aisément à celle des mouvements oscillatoires les plus simples c'est-à-dire aux mouvements harmoniques.

La Pneumatique reprend, pour les gaz, les questions déjà examinées pour les liquides ; les écoulements gazeux ne diffèrent des écoulements liquides que par la présence d'intégrales prêtes à disparaître, en s'explicitant, pour le cas où l'on reviendrait à l'incompressibilité. A signaler ici de curieuses et simples formules, dues, je crois, à Haton de la Goupillère, pour le temps nécessaire au remplissage d'un récipient mis en communication avec un autre où la pression est maintenue constante. Notons encore l'étude des conditions thermiques dans lesquelles une colonne gazeuse pourrait présenter des ondes permanentes analogues à l'onde solitaire liquide puis les ondes coniques qui suivent un bateau à marche suffisamment rapide ou un projectile marchant plus vite que le son ; ce sont des ondes singulières, enveloppes de familles d'ondes, qui produisent le *claquement* perçu le long de la trajectoire d'une balle.

La résistance de l'air, d'une étude si nécessaire pour la balistique et l'aviation, présente d'étranges paradoxes. Un cylindre circulaire, tournant rapidement autour de son axe et placé dans un courant d'air, a un déplacement possédant une composante perpendiculaire au courant. Certaines plaques pouvant tourner autour d'une normale fixe ont leur rotation entretenue par un courant d'air également normal, ce qui semble invraisemblable par raison de symétrie. L'esprit scientifique simplement curieux peut, à coup sûr, se passionner autant que le technicien pour de semblables questions.

Une remarque tout à fait analogue à cette dernière peut être faite au début de la Thermodynamique. M. Lecornu nous avertit qu'il va être bref et qu'il n'a en vue que ce qui est nécessaire pour la théorie des moteurs thermiques, mais, heureusement, il ne tient pas sa promesse de manière étroite. Je relève des paragraphes d'un extrême intérêt sur les parties quasi-philosophiques de la Thermodynamique. On sait que, dans les transformations réversibles, l'inverse de la température est un facteur intégrant pour la variation infinitésimale de la quantité de chaleur d'où, par intégration alors possible, la fonction *entropie*. Cela peut-il s'expliquer de manière purement mécanique ? M. Lecornu s'en rapporte ici, très élégamment et très brièvement, à Helmholtz, à Lord Kelvin et à Henri Poincaré qui a recherché la nature des mouvements tourbillonnaires n'altérant pas l'existence d'une entropie.

Dans les cycles relatifs aux fluides homogènes on rencontre d'abord ceux dont l'aire mesure le travail ; l'idée de conserver cette représentation entraîne la constitution de diagrammes entropiques pour lesquels on retrouve, sous sa forme générale, le problème bien connu de la conservation des aires planes. D'ailleurs, ces équivalences de mailles constituent une clef intuitive quant aux formules subséquentes.

L'équation caractéristique des gaz parfaits peut être rattachée à la théorie

du viriel ; cette équation et les formules relatives aux diverses transformations de ces gaz subissent des modifications qui, autant que possible, conservent leur aspect quand on passe aux gaz réels. C'est une question de termes complémentaires sur lesquels les physiciens n'ont pas toujours été d'accord : l'approximation la meilleure est généralement du côté des formules simples.

L'étude des vapeurs saturées est riche en résultats géométriques asymptotiques à ceux concernant les gaz parfaits ; Joseph Bertrand a même étudié ainsi les propriétés qui subsistent dans le voisinage de la saturation. Les écoulements des fluides élastiques sont maintenant repris en tenant compte des phénomènes thermiques ; la relation entre la vitesse d'écoulement d'une vapeur et la température correspond encore à un certain cycle dont l'aire figure la variation de force vive. Signalons, à ce sujet, les si curieux compteurs de vapeur basés sur l'écoulement de celle-ci au travers de certains ajutages. La propagation d'une onde plane demande aussi à être complétée au point de vue thermique ; le complément prend naturellement une importance toute particulière quand il s'agit de la propagation des flammes, des ondes de déflagration et d'explosion ; là encore les schèmes géométriques gardent leur curieuse simplicité intuitive.

Dans les généralités relatives aux machines, de nombreuses pages sont consacrées à deux organes essentiels : le volant et le régulateur. On connaît, à coup sûr, leurs rôles distincts, mais que de choses intéressantes à noter quant aux différents cas ou aux différents dispositifs imaginés par des techniciens ou constructeurs ingénieux. Il y a des volants élastiques avec masses portées par des ressorts, d'où, pour l'ensemble, un moment d'inertie variable ; il y a les hélices des avions, pour lesquelles le couple résistant est fonction non d'un déplacement angulaire mais d'une vitesse angulaire. Pour les régulateurs la diversité est plus grande encore ; ils ont une théorie géométrique en tant que systèmes articulés, ils utilisent la pesanteur ou des ressorts, ils deviennent isochrones quand ils tendent à ramener une machine à une vitesse angulaire toujours la même et peuvent alors être réalisés par une des plus simples propriétés de la parabole à axe vertical. Ils ont aussi une théorie statique et dynamique indépendante de leur forme et susceptible d'une interprétation graphique ; tantôt le régulateur tend à modifier les régimes d'une manière asymptotique interprétable par le parcours d'une sorte de spirale, tantôt il détermine un régime cyclique traduisible sur des courbes fermées ou *cycles*. Il y a aussi des régulateurs d'inertie, des régulateurs-volants, curieux petits monstres qui semblent vouloir vivre de la vie de deux organes que la théorie s'attache généralement à bien séparer.

Les freins peuvent être envisagés aussi à des points de vue fort divers. Tantôt ils absorbent de l'énergie qu'il s'agit de détruire, tantôt de l'énergie qu'il s'agit de mesurer (frein de Prony) ; ils reposent sur des frottements généralement solides, parfois liquides, comme dans les pièces d'artillerie dont il faut amortir le recul, parfois aériens dans les moulinets dynamométriques.

Enfin la question des efforts intérieurs, dans une machine, ne peut évidemment être tranchée par le seul théorème des forces vives suffisant, pour l'ensemble du mouvement considéré du point de vue de la dynamique rationnelle. Il y a ici une question analogue à celle des systèmes hyperstatiques avec cette complication qu'il s'agit de forces appliquées à des corps en mouvement ; M. Lerornu s'attache à traiter des cas dont l'élégance est d'au-

tant moins contestable qu'on peut, toujours et encore, l'appuyer sur de remarquables constructions géométriques.

Je ne ferai que signaler les moteurs hydrauliques roues et turbines, rappelant que la turbine est peut-être due à Euler et présente aussi sa curieuse géométrie. Le bélier hydraulique, utilisant la surpression du coup de bélier, est vraiment un appareil étonnant et même de première apparence paradoxal ; M. Lecornu lui consacre un schème très simple.

Quant aux moteurs thermiques je serai également bref, signalant surtout le cas de la combustion interne qui nous a valu l'automobile, le sous-marin (moteur Diesel) et l'avion. Et justement des notions d'aviation terminent ce bel et grand ouvrage ; j'y relève la question de la stabilité automatique dédaignée par les pilotes mais non par les techniciens justement excités par la difficulté du problème.

Peu importe quelques citations de plus ; le troisième volume de M. Lecornu termine magnifiquement un Cours de Mécanique qui doit pouvoir atteindre à toutes les applications et qui y atteint effectivement par la combinaison la plus sûre des formules rationnelles et des tracés expérimentaux, non sans l'intuition profonde, et toujours exprimée avec le maximum d'élégance, de la géométrie et de la physique des faits.

Encore un beau guide pour les jeunes qui demain reconstruiront la France.

A. Buhl (Toulouse).

Maurice d'Ocagne. — **Cours de Géométrie pure et appliquée de l'Ecole Polytechnique.** — Tome II : Cinématique appliquée. Stéréotomie. Statique graphique. Calcul graphique. Calcul grapho-mécanique. Nomographie. — 1 vol. gr. in-8° de 364 pages ; 18 fr. ; Paris, Gauthier-Villars, 1918.

L'Enseignement mathématique, dans le présent volume (p. 30), a consacré un article de fond à deux grands traités de géométrie, publiés à la même époque et destinés à faire grande sensation dans l'enseignement ; l'un était dû à Gaston Darboux, l'autre à M. d'Ocagne, dont l'œuvre s'achève aujourd'hui en un second volume complétant surtout le premier au point de vue des applications.

Ce tome II débute par la Cinématique appliquée ; le souci d'être méthodique et moderne s'y révèle de prime abord, ne serait-ce qu'en ne traitant des divers transformateurs de mouvement qu'après un rappel d'une classification générale des mécanismes due à M. G. Kœnigs. Je me permets de passer sur les divers types d'engrenages, mais je note les élégances propres aux trains épicycloïdaux susceptibles notamment d'associer des rotations très différentes sans que la cause de cette différence soit immédiatement apparente (paradoxe de Fergusson). Les transformateurs de rotations à vitesses variables nous font retrouver des courbes roulantes quelconques, mais avec constructions intermédiaires particulières au sujet ; on construit les profils roulants en partant de courbes dont les abscisses doivent s'enrouler sur des circonférences, ce qui est l'occasion de faire usage d'une construction approchée concernant la quadrature du cercle.

Toutefois le plus grand intérêt apparaît avec les transformateurs géométriques. Les plus simples sont des quadrilatères, dont un côté est invariable, ou *trois-barres* ; on peut leur rattacher le transformateur de Watt donnant la courbe à longue inflexion, c'est-à-dire la solution *approchée* de la transformation *sans guidage* du mouvement circulaire en mouvement

rectiligne. Il est fort intéressant de constater que cette *approximation* peut être perfectionnée par divers et même par une infinité de dispositifs jusqu'à ce que l'on aboutisse à la solution rigoureuse du problème, donnée par les inverseurs. Et comme un point d'un segment glissant, par ses extrémités, sur deux droites décrit une ellipse, le fait de savoir passer du mouvement circulaire au mouvement rectiligne entraîne que l'on sait passer aussi au mouvement elliptique de l'ellipsographe de Hart. Les systèmes articulés gauches ont pour application des plus remarquables la description du plan, ceci par la combinaison de résultats dus à G. Darboux et à M. G. Kœnigs.

La *cinématique graphique* de M. d'Ocagne, qui codifie divers procédés de l'ingénieur Marbec et des professeurs Perry et Smith, ressemble, en effet, étonnamment à la statique graphique. Les vitesses de différents points d'un même transformateur s'assemblent en équipollences d'une simplicité inattendue ; on a ainsi des *cinèmes* dits du premier ordre quant aux vitesses et du second ordre quant aux accélérations. Et l'on peut se convaincre de la simplicité de ces constructions en les appliquant aux transformateurs précédemment rencontrés, notamment à l'inverseur Peaucellier.

Je serai bref en parlant de la Stéréotomie, faute de compétence suffisante. J'y aperçois toutefois de jolies épures représentant généralement des voûtes dont certaines sont de remarquables surfaces réglées sous lesquelles un géomètre aurait grand tort de passer sans lever la tête. Même le fait de ne pas s'occuper effectivement d'architecture n'excuse pas l'indifférence vis-à-vis de surfaces si parfaitement matérialisées et notamment d'arrière-voussures non moins intéressantes pour l'analyste que pour l'architecte. D'ailleurs, le cours effectivement professé par M. d'Ocagne ne comprend que deux leçons de Stéréotomie ; c'est seulement pour laisser le champ libre au choix de beaux exemples (renouvelés, d'une année à l'autre, à l'amphithéâtre) qu'il a donné à ces leçons un développement relativement considérable.

La Statique graphique est une géométrie des contours polygonaux ; deux contours principaux, le *dynamique* et le *funiculaire*, que je n'ai point à définir ici, ont des aspects ou des positions diverses de par le choix arbitraire d'un pôle ; mais, au travers de ces diversités, il est aisé de reconnaître de curieuses propriétés d'invariance interprétables d'ailleurs au moyen de considérations spatiales dépendant d'un complexe linéaire. C'est un nouveau rapprochement des plus intéressants entre la statique et la géométrie cinématique qui, comme on l'a vu dans le tome I, est vivement éclairée par l'introduction de tels complexes.

Une des principales applications de la Statique graphique consiste en l'étude de l'équilibre des systèmes réticulaires, qui sont, en somme, des systèmes polygonaux matérialisés. Et l'on conçoit aisément tout ce qu'il peut y avoir de relations directes ou réciproques entre les segments matériels qui composent de tels systèmes et les segments, plus fictifs, qui représentent les forces ou les moments des forces y appliqués. C'est ce que montre M. d'Ocagne, toujours avec les ressources générales de la géométrie des ensembles de droites.

Le calcul graphique procède de l'idée de construction géométrique ; appliqué d'abord aux équations algébriques, il donne aussi une géométrie des contours polygonaux qui, pour les équations uniques de degré quelconque, sont notamment des *orthogones* qu'on peut tracer sur un transparent à orienter sur un quadrillage fixe. L'intégration graphique rappelle, à l'inverse, les adjointes infinitésimales dont M. d'Ocagne nous a entretenus dans une Note

terminant son premier volume ; dans les deux cas on associe, par exemple, les tangentes d'une courbe C_1 aux ordonnées d'une C_0 et, s'il s'agit d'intégration, il faut évidemment passer de C_0 à C_1. Les différentes constructions des C_1, en partant des C_0 amplifient, de manière très méthodique, diverses formules de quadrature connues depuis fort longtemps mais introduites dans l'Analyse de façons assez disparates. Les C_1 correspondent à une C_0 unique par le choix arbitraire d'un *pôle* ; ces C_1 sont alors liées comme les polygones funiculaires qui dépendent d'un choix arbitraire absolument analogue ; on voit, à nouveau, les remarquables analogies qui s'établissent entre des sujets qui jusqu'ici ont été plutôt traités en des ouvrages séparés, mais qu'un géomètre habile devait réunir dès qu'il lui était permis de s'affranchir des soucis immédiats de telle ou telle spécialisation. Ajoutons qu'après les quadratures proprement dites, on peut étendre la notion d'intégration graphique aux équations différentielles et que certaines méthodes peuvent être considérées comme la traduction du procédé d'approximations successives dû à M. Emile Picard. Nouvel aperçu synthétique qui n'est pas à dédaigner pour arriver, par une voie géométrique, à la théorie analytique de ces approximations.

Le calcul grapho-mécanique, comme son nom l'indique, mécanise le calcul graphique. Son but principal est l'intégration et plus particulièrement l'évaluation d'aires ou de moments attachés à de certains contours fermés ; ses instruments principaux sont les planimètres. En général, les mécanismes de ces appareils sont étonnamment simples et peuvent aboutir au planimètre-hachette qui n'a pas de mécanisme du tout ; c'est un compas invariable portant un petit fer de hachette qui, appuyé sur le papier, décrit un arc pendant que l'autre pointe décrit le contour d'une aire à évaluer. Viennent ensuite les analyseurs harmoniques qui calculent les coefficients d'une série de Fourier.

Les *intégraphes* tracent les courbes C_1 de la section précédente et peuvent aussi intégrer les équations différentielles même lorsqu'elles ne rentrent pas, comme l'équation générale de Riccati, dans les types élémentairement intégrables. On peut en dire autant pour l'équation du mouvement des projectiles dans l'air et même pour les très modernes équations intégrales dont M. d'Ocagne traite un cas emprunté au type de Volterra. Notons encore les intégraphes polaires avantageux pour les intégrales renfermant des fonctions trigonométriques et notamment pour l'intégrale elliptique de première espèce mise sous la forme normale de Legendre.

Passons maintenant à la Nomographie, qui, représentée dans le passé par quelques abaques isolés, doit son développement systématique à M. d'Ocagne lui-même. Il semble qu'ici l'auteur se soit plutôt astreint à comprimer sa pensée pour ne pas donner à ses propres travaux une plus grande place qu'aux précédentes disciplines géométriques ; c'est sans s'éloigner des généralités géométriques qu'il nous présente la science des nomogrammes. Un nomogramme est un tableau graphique où on lit des résultats provenant de données variables ; il est au calcul graphique ce que la table numérique est à l'opération arithmétique isolée. Tout calcul suppose au moins deux nombres et un résultat ; le nomogramme le plus simple suppose trois systèmes de lignes dont on recherche les entrecroisements ponctuels, généralement interpolables à vue. Il importe évidemment beaucoup que ces lignes ne soient pas absolument quelconques ; on peut même espérer se tirer d'affaire, dans beaucoup de cas, rien qu'avec des droites ou des cercles ; de là l'importante notion de la transformation ou *anamorphose* des nomogrammes. Mais le

nomogramme à entrecroisement peut avoir divers inconvénients résultant de sa trop grande densité en certaines régions ; une transformation dualistique le transformera alors en nomogramme à alignement sur lequel on sera ramené à la recherche de points alignés, et cette transformation présentera, en outre, le très grand intérêt de permettre de constituer des monogrammes à plus de trois entrées, ce qui est un fait capital pour les applications. Il y a là quelques idées immédiatement séduisantes par leur généralité et leur simplicité ; je craindrais de les gâter en essayant de plus longues descriptions ; elles intéressent d'ailleurs le géomètre pur autant que le praticien.

M. d'Ocagne les applique à la résolution des triangles sphériques en s'astreignant d'ailleurs à traiter des cas couramment imposés par l'astronomie ; c'est vraiment la table graphique à la disposition de la science qui utilise le plus de tables ; celles qui en utilisent moins pourront *a fortiori* songer aux nomogrammes qui leur seraient le plus avantageux. L'Ouvrage se termine par un nouvel appendice qui ajoute quatre notes du plus haut intérêt aux cinq déjà publiées à la fin du tome premier.

La *Description mécanique des courbes algébriques quelconques*, découverte par le géomètre anglais Kempe, a été étendue aux surfaces algébriques par M. G. Kœnigs ; on envisage ainsi, évidemment, la généralité maximum des systèmes articulés.

La *Statique graphique des systèmes de l'espace* repose sur l'existence du complexe linéaire formé de droites de moment nul. C'est une certaine représentation plane de tels complexes, imaginée par M. Mayor, de Lausanne, qui permet maintenant de traiter sur épures des problèmes statiques spatiaux absolument quelconques.

L'intégration grapho-mécanique de l'équation de Riccati au moyen du planimètre-hachette donne une importance nouvelle à cet appareil d'une simplicité si singulière. On peut trouver, *par quadratures*, le contour à faire décrire à la pointe de l'appareil pour que la hachette décrive la courbe intégrale désirée. Si l'on réfléchit au rôle immense de l'équation de Riccati en géométrie, lequel se confond d'ailleurs avec celui de l'équation linéaire du second ordre, il faut convenir qu'il y a là un résultat de première importance.

Quant aux *Applications de la nomographie à l'intégration graphique*, elles s'ajoutent naturellement au précédent sujet et atteignent jusqu'à l'intégration de diverses équations différentielles du second ordre.

L'impression donnée par le premier volume de l'Ouvrage se maintient intégralement dans le second. Il s'agit bien d'un Cours de Géométrie où l'on voit toujours la technique des hauteurs de la science pure. J'ai cru relever que ce passage se faisait aussi conformément aux grandes traditions de l'Ecole Polytechnique ; j'ai vu que des aperçus inattendus, esthétiques et profonds, étaient souvent dus à des ingénieurs, qui faisaient ainsi de la science appliquée par des moyens que le savant à l'esprit le plus abstrait ne pourrait désavouer. Bel exemple pour la jeune génération qui, hélas ! n'aura que trop à travailler dans le domaine matériel, mais à qui un tel ouvrage peut montrer que la chose est possible sans perdre de vue les lumineux sommets de la science pure. A. Buhl (Toulouse).

A.-S. Ramsey. — **Elementary geometrical optics.** — 1 vol. in-8°, xi-173 p., cart., 6 sh., G. Bell et Sons, London, 1914.

La partie de la physique qu'on appelle « optique géométrique » n'a rien perdu de son intérêt, même de nos jours, quoique la notion de rayon lumi-

neux ne soit pas tout à fait claire dans les théories actuellement admises. Les lois expérimentales de l'optique et leurs conséquences géométriques restent toujours vraies, quel que soit la manière de les interpréter. Il est d'ailleurs utile, pour les raisons didactiques, entre autres, de traiter à part l'étude des rayons.

C'est à ce point de vue qu'a été écrit le livre de M. A.-S. Ramsey. Sous une forme très condensée (173 pages, dont 40 environ sont consacrée aux exemples et problèmes) l'auteur nous expose les phénomènes de réflexion, de réfraction, de dispersion, étudie les miroirs, les lentilles (minces et épaisses, ainsi que leurs systèmes), les télescopes, les microscopes et l'œil humain, ce dernier dans la mesure de ce qu'il faut pour comprendre le fonctionnement des instruments optiques. Parfois même on peut reprocher à l'auteur de trop condenser son exposé. C'est ainsi que nous aimerions voir la théorie des aberrations traitées plus en détail. Il est à regretter de même que l'auteur ne s'est pas consacré assez de place à la théorie du microscope, dont l'exposé n'occupe qu'une page et demie.

Les démonstrations de tous les théorèmes sont rigoureuses et ne demandent que la connaissance des éléments des mathématiques supérieures. Il est encore à noter, à l'avantage du livre, que l'auteur ne se contente pas d'énoncer les lois expérimentales qui servent de base pour l'établissement des théorèmes de l'optique géométrique, mais qu'il donne encore les descriptions des expériences, toujours bien choisies, permettant de vérifier ces lois. Par contre, en décrivant certains phénomènes optiques, l'auteur évite quelquefois de mentionner leur côté physique, qui est pourtant de toute première importance. Pour ne citer qu'un exemple, l'auteur, en définissant l'indice de réfraction, nous dit que celui-ci dépend « on the nature of the media and the kind of light ». Ne serait-il pas plus simple de dire explicitement que l'indice de réfraction dépend de la couleur, d'autant plus que quelques pages plus loin l'auteur établit cette dépendance.

En résumé, le livre de M. Ramsey contient, malgré son petit volume, beaucoup de problèmes bien choisis et bien exposés et illustrés par de nombreuses figures, et il mérite d'être recommandé aux étudiants qui commencent la physique et qui voudraient approfondir leurs connaissances en optique géométrique. A. Tcherniavsky (Genève).

L. Zoretti. — **Tables numériques usuelles.** — 1 vol. in-8° de 52 p. ; 3 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1917.

Ce petit volume contient deux tables principales dont l'usage est facilité par un système d'onglets.

La Table I contient, dans les colonnes intitulées 1, 2, 3, ..., 9, les produits par ces nombres de ceux qui sont inscrits dans la colonne 1. La colonne intitulée $\frac{1}{n}$ contient les inverses des mêmes nombres, ou plutôt les quatre premiers chiffres significatifs de ces inverses. Le symbole 10^{-5} ou 10^{-6} placé en tête signifie qu'il faut, pour avoir la valeur de $\frac{1}{n}$, placer la virgule au cinquième ou au sixième rang à partir de la droite. La valeur inscrite pour $\frac{1}{n}$ est exacte à une demi-unité près de l'ordre du dernier chiffre décimal inscrit.

La colonne n^2 contient le carré de n, ou ce carré divisé par 10 ou par 100, ce qui est indiqué par le multiplicateur 10 ou 100 placé en tête. On n'a inscrit que les quatre premiers chiffres significatifs de ce carré. Le nombre inscrit est donc simplement approché avec une erreur en plus ou moins égale à une demi-unité de l'ordre du dernier chiffre inscrit.

La colonne log n contient les quatre premières décimales du logarithme de n (ou du produit de n par une puissance de 10). L'erreur est toujours d'une demi-unité du dernier ordre.

La Table II donne les valeurs des quatre lignes trigonométrique des arcs de 15′ en 15′, avec trois ou quatre chiffres significatifs, ainsi que les valeurs de ces arcs en grades à un demi-centigrade près, et leurs valeurs en radians avec quatre ou trois chiffres décimaux exacts. Toutes les valeurs inscrites sont approchées à moins d'une demi-unité du dernier ordre.

Quand le dernier chiffre inscrit est un 5, on a indiqué par un chiffre spécial (5*) le 5 *fort*, c'est-à-dire obtenu en forçant un 4 dans le cas où le premier chiffre négligé est égal ou supérieur à 5.

L'interpolation appliquée aux trois dernières colonnes de la Table I permet de calculer, à une unité du dernier ordre près, le nombre qui correspond à un nombre non inscrit.

La *multiplication* se fait au moyen des neuf premières colonnes.

La *division* se fait en multipliant par l'inverse du diviseur ; on trouve cet inverse dans la colonne $\frac{1}{n}$.

L'*élévation au carré* et l'*extraction des racines carrées* se font au moyen de la colonne n^2.

Les *racines* ou *puissances quelconques*, les *exponentielles* se calculent au moyen de la colonne log n.

Ces quelques citations suffisent à montrer que ces tables peuvent en résumer beaucoup d'autres qui seraient peut-être plus complètes ; mais ici l'auteur n'a justement voulu conserver et présenter sous forme maniable que ce qui répondait au besoin immédiat de la pratique courante.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Giornale di Matematiche di Battaglini. — 3me série-vol. 45. — Janvier-août 1917. — V. Segre : Sul moto di una corrente liquida in un canale a cielo in parte scoperto. — R. Occhipinti : Alcune semplici quistioni sulle superficie evolute. — Fr. Tricomi : Sull' iterazione delle funzioni di linee. — Pio Scatizzi : Nuovo integrafo per equazioni di Abel e di Riccati. — A. Crespi ; Forme di spezzamento delle quartiche gobbe di 1a e 2a specie. — M. Pannelli : Sulla Jacobiana di una rete di superficie algebriche. —

Filippo Sibirani : Sopra la collineazione fra piani e fra spazi so vrapposti. — Giuseppe Usai : Una questione di analisi combinatoria. — G. Usai : Una questione di analisi combinatoria. — S. W. Reaves : Metrie properties of flecnodes on ruled surfaces. — V. Gallico : Sulle condizioni iniziali che determinano gli integrali delle equazioni differenziali ordinarie.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — 26 Band, 1917. — R. Mehmke : Dyaden und Kontrajektivität. — F. Jung : Eine einfache Darstellung des Schwung- und Drangmomentes beim starren Körper. — F. Kölmel : Ueber birationale dualistische Transformationen und Grassmannsche Erzeugung von ebenen Kurven dritter Ordnung. — W. Gaedecke : Beiträge zur Theorie der Kissoide. — O. Blumenthal : Karl Schwarzschild. — F, Dingeldey : Zur Erinnerung an Sigmund Gundelfinger. — A. Loewy : Eine algebrische Behauptung von Gauss : — J. v. Szé Nagy : Ueber eine räumliche Darstellung Riemannscher Flächen vom Geschlechte p mit $p + 1$ Symmetrielinien, — L. Fejer - Ueber Kreisgebiete, in denen eine Wurzel einer algebraischen Gleichung liegt. — F. London : Die Erzeugung der Flächen zweiter Ordnung durch Correlationen. — E. Study : Franz London. — Th. Schmid : Gedenkblatt für E. Janisch. — Fr. Schilling : Die bildende Kunst und die Geometrie. — H. Monrmann : Tangentenquadrupel einer gewundenen Kurve 3. Ordnung. — W. Blaschke u. G. Hessenberg : Lehrsätze über konvexe Körper. — W. Blaschke : Altes und neues von Ellipse und Ellipsoid. — J. Horn : Ueber eine nichtlineare Differenzengleichung. — Robert König : Die Charakterisierung der Riemannschen Transzendenten und andere Theoreme. — Fr. Riesz : Ueber Integration unendlicher Folgen. — K. Knopp : Einfaches Beispiel einer stetigen, nirgends differenzierbaren Funktion. — H. Hahn : Ueber stetige Funktionen ohne Ableitung. — W. Weinreich : Die Fadenzeichnung der Hyperbel mit Bemerkungen über die Gärtnerkonstruktion der Ellipse. — W. Gross : Ueber die impliziten Funktionen. — G. Kowalewski : Einfache Herleitung der Eulerschen Sinusformel. — Alfred Loewy : Ein Ansatz von Gauss zur jüdischen Chronologie aus seinem Nachlass. — W. Sternberg : Entwicklung willkürlichern Funktionen nach linearen, homogenen Aggregaten orthogonaler. — G. Klein : Zur Eulerschen Lösung des isoperimetrischen Problems. — M. Bauer : Eine algebraische Behauptung von Gauss. — St. Jolles : Die helikoidische Invarianz des linearen Strahlenkomplexes und eine neue Definition seines Parameters.

Mathematische Annalen. Band 78, Heft 3 u. 4, — E. Noether : Gleichungen mit vorgeschriebener Gruppe. — F. Seidelmann : Die Gesamtheit der kubischen und biquadratischen Gleichungen mit Affekt bei beliebigem Rationalitätsbereich. — H: Falckenberg : Zur Theorie der Kreisbogenpolygone II. — G. Hamel : Eine charakteristische Eigenschaft beschränkter analytischer Funktionen. — G. Pick : Ueber die Beschränkungen analytischer Funktionen durch vorgegebene Funktionswerte. — R. Jentzsch : Ueber Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten. — G. Pólya : Ueber Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten. — A. Haar ; Die Minkowskische Geometrie und die Annäherung an stetige Funktionen. — L. Bieberbach : Ueber die Einordnung des Hauptsatzes der Uniformisierung in die Weierstrassische Funktionentheorie. — W. Gross : Zur Theorie der Differentialgleichungen mit festen kritischen Punkten. —

A. Loewy : Ueber Matrizen- und Differentialkomplexe II u III. — S. Straszewicz : Ueber den Begriff des einfachen Kurvenbogens. — O. Perron : Ein neuer Existenzbeweis für die Integrale eines Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen. — J. Nielsen : Die Isomorphismen der allgemeinen, unendlichen Gruppe mit zwei Erzeugenden. — E. Hecke : Ueber orthogonal-invariante Integralgleichungen. — D. Hilbert : Axiomatisches Denken. — F. Klein : Bericht über den Stand der Herausgabe von Gauss-Werken.

Nouvelles Annales de Mathématiques, dirigées par C.-A. Laisant et R. Bricard : 4me série. Gauthier-Villars, Paris. Tome XVII, 1917. — Picardat : La courbe orthoptique de deux coniques. — R. Goormaghtigh : Sur les seize sphères tangentes à une sphère et à trois plans donnés. — A. Auric : Note sur la Géométrie du triangle. — M. Weill : Sur quelques équations homogènes indéterminées du troisième degré. — Hadamard : Sur l'élimination entre équations différentielles. — R. Goormaghtigh : Sur les centres de courbure des courbes affines d'une courbe donnée. — M. d'Ocagne : Sur le mouvement de la manivelle et de la tige guidée. — F. Gonseth : Quelques propriétés métriques des foyers, des tangentes, etc. — J. Lemaire : Sur le problème de Pappus généralisé. — J. Haag : Sur le calcul approché des quadratures. — G. Fontené : Sur la quantité (DA) (BC) + (DB) (CA) + (DC) (AB) envisagée dans l'espace. — J. Joffroy : Seconde Note sur le problème de Pappus généralisé. — R. Bricard : Le principe de relativité. — Anciennes questions non résolues : 1689, 1690, 1691, 1692, 1693, 1694, 1695, 1705, 1710. 1715, 1721, 1731, 1738, 1747, 1751, 1754, 1761, 1762, 1763, 1776, 1777. — F. Gomes Teixeira : Sur une manière d'engendrer les cubiques unicursales et une classe de quartiques, et sur une relation entre deux transformations. — L. Crelier : Faisceaux de cercles relatifs à la puissance d'une droite. — F. Gonseth : Sur l'orientation d'un groupe de droites. — M. Chalaux : Tout nombre premier de la forme $4n + 1$ est une somme de deux carrés. — F. Balitrand : Remarques sur un article de M. Goormaghtigh. — R. Bouvaist : Sur deux propositions de Laguerre. — Farid Boulud : Recherches géométriques sur le centre de courbure des trajectoires d'une famille quelconque de courbes planes. — L. Crelier : Puissance d'une droite par rapport à son cercle. — P. Delens : Note sur l'extraction rapide de certaines racines exactes d'indice impair. — Ch. Michel : Mouvements plans dans lesquels la tangente a une vitesse angulaire constante. — E.-N. Barisien : Sur les paraboles qui passent par les pieds des normales issues d'un point donné à une ellipse. — M.-F. Egan : [L^2] Foyers et asymptotes des coniques et quadriques. — A. Myller : Sur les surfaces d'égale pente. — F. Gonseth : Sur le centre des moyennes distances d'un groupe de points en ligne droite. — Adrien Favre : Sur les fonctions homogènes. — J.-B. Pomey : Sur une propriété de la fraction rationnelle du second degré. — Ch. Michel : Développantes et développées aréolaires. — G. Fontené : Identités à démontrer. — E. Cahen : Remarques sur un article de M. Mathieu Weill.

La Revue de l'Enseignement des Sciences, Librairie Alcan, Paris, 11me année, 1917, — P. Lugol : Phénomènes sonores dus au déplacement très rapide d'un corps dans l'air. — G. Lapointe : Sur la suite de terme général $\sin nx$. — J. Juhel-Renoy : Sur les moments linéaires. — F. Bracher : Sur la projection d'un angle droit. — R. Berard : Construction du

centre de courbure. — B. Niewenglowski : Algèbre et géométrie. — G. Fontene : Sur les théorèmes de l'angle extérieur. Sur le théorème du segment capable. — P. Montel : Sur les suites récurrentes. — R. Berard : Mouvement sur une sphère d'une figure de forme invariable. — J. Lemaire : Sur la droite de Simson généralisée. — Ch. Michel : Sur la représentation paramétrique des coniques. Sur les transformations centrales. — J. Juhel-Renoy : Sur la géométrie descriptive. — L. Clément : Propriétés corrélatives des coniques démontrés parallèlement. — X... : Sur la réduction d'un angle à l'horizon. — G. Fontene : Relations métriques dans le Triangle. — P. Montel : Sur les limites de fonctione périodiques. — M. d'Ocagne : Quelques réflexions au sujet de l'enseignement élémentaire de la géométrie descriptive. — A. Tresse : Problèmes graphiques relatifs aux surfaces de second degré. — A. Vieillefon : Application du calcul vectoriel au déplacement d'un corps solide. — L. Clément : Note sur les permutations. — G. Bouligand et R. Berard : L'inversion conserve les lignes de courbure. — J. Juhel-Renoy : Moyenne et extrême raison. Sur l'emploi en descriptive du second plan bissecteur comme plan auxiliaire.

Revue de Métaphysique et de Morale. Librairie Colin, Paris. Année 1917. — L. Couturat : Sur les rapports logiques des concepts et des propositions. — A. Reymond : L'éducation et la pédagogie expérimentales. — Henri Dufumier (Nécrologie). — F. Enriques : Sur quelques questions soulevées par l'infini mathématique. — L. Rougier : La symétrie des phénomènes physiques et le principe de raison suffisante. — F. Le Dantec : Encore la dégradation de l'énergie. — F. Couturat : La logique algorithmique et le calcul des probabilités. — A. Padoa : Des conséquences d'un changement d'idées primitives dans une théorie déductive quelconque. — L. Selme : Dynamique généralisée et dégradation de l'énergie. — G. Belot : Enquête sur l'orientation de l'enseignement secondaire. — L. Rougier : De la nécessité de la réforme dans l'enseignement de la logique. — E. Cramaussel : Pour un enseignement philosophique nouveau. — A. Reymond : Les ordinaux transfinis de Cantor et leur définition logique.

Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien. — Band 125, 1916. — K. Federhofer : Ueber die Stabilität der flachen Kugelschale. — R. Fuerth : Ueber die Lage der Windungspunkte bei konformer Abbildung einer Kreisscheibe auf eine einfache überdeckte Kreisscheibe. — A. Klingatsch : Ueber ein Vierhöhen problem. — Id. : Ueber die gegenseitige Orientierung zweier Figuren. — G. Kohn : Ueber kontrajektive Figuren. — F. Kottler : Beschleunigungsrelative Bewegungen und die konforme Gruppe der Minkowski'schen Welt. — E. Kruppa : Rekonstruktion einer Schraubenlinie aus einem Schrägriss. — E. Müller : Schraubflachen und Strahlgewinde. — F. Paulus : Ergänzungen und Beispiele zur Mechanik von Hertz. — A. Plamitzer : Erzeugnisse projektiver Involutionen höheren Grades, deren Träger unikursale Gebilde sind. — R. Schumann : Bestimmung einer Geraden durch Ausgleichung der beobachteten Koordinaten ihrer Punkte nach der Methode der kleinsten Quadrate. — E. Welsch : Quaternionen und binäre Formen zu den Minkowski'schen Grundgleichungen der Elektrodynamik. (III. u. IV). — Id. : Binäranalyse der vierdimensionalen Vektorraumes. — K. Wolf : Ueber den Einfluss der Einspannung auf die Torsionsbeanspruchung eines Kreiszylinders.

Zeitschrift für das Realschulwesen, Wien. — XLII Jahrgang. — O. Danzer : Lösung von Aufgaben über ebene Kurven mit Hilfe räumlicher Betrachtungen. — Franz Redl : Bemerkungen zur Konstruktion der Ellipse und der Hyperbel aus konjugierten Durchmessern, — Frantz Rathschueler: Ueber eine besondere Schwerpunktslage an ebenen Flächen. — Joh. Schuster : Einige Bemerkungen über das Tetraeder. — Q. Vetter : Einführung der Sätze von Pascal und Brianchon in die Mittelschule. — P. v. Schaewen : Ueber pythagoreische Dreiecke. — P. v. Schaewen : Quadrazahlen zu ermitteln, deren Summe einem Biquadrate gleich ist. — Prof. Wanka-Braunau : Krümmungsradien in elementarer Behandlung. — O. Danzer : Ermittlung der Scheitelkrümmengskreise von Kegelschnitten mit Hilfe räumicher Betrachtungen. — E. Czuber : Zur Vollendung eines grossen Werkes. — P. v. Schaewen : $ax^2 + bxy + cy^2 = z^4$ in rationalen Zahlen zu lösen. — F. Schiffner : Ein Beitrag zu den praktischen geometrischen Schülerübungen der Unterstufe. — A. Haltmeyer ; Zur Behandlung des Kräftepaares im Unterrichte. — L. Baumgartner : Kennzeichen für die Teilbarkeit dekadischer Zahlen durch 7 und 13.

2. Livres nouveaux :

W. Ahrens. — **Altes und Neues aus der Unterhaltungsmathematik.** — 1 vol. in-8°, 206 p. ; 5 M. 60 ; Julius Springer. Berlin.

G. Candido. — **La Risultante di due quadratiche.** — 1 fasc. in-4°, 26 p.; Raffaello Giusti, Livorne.

E. Cohn. — **Physikalische über Raum und Zeit.** 3. Auflage. — 1 fasc. in-8°, 31 p; 1 M. 20; B. G. Teubner, Leipzig.

Z. G. de Galdeano. — **Nociones de crítica matemática.** — 1 fasc. in-8°, 76 p.; 2 pesetas ; G. Casanal, Zaragoza.

Z. G. de Galdeano. — **Las construciones matemáticas adaptadas al complemento de análisis infinitesimal.** — 1 fasc. in-8°, 76 p.; 2 pesetas ; G. Casanal, Zaragoza.

L. Kiepert. — **Grundriss der Differential und Integralrechnung,** II, 11. vermehrte Auflage. — 1 vol. in-8°, 932 p.; Helwingsche Verlagsbuchhandlung. Hannover.

M. Lindow. — **Differentialrechnung,** 2. Auflage. — 1 vol. in-8°, 96 p. ; 1 M. 50 ; (*Aus Natur u. Geisteswelt*, n° 387), B. G. Teubner, Leipzig.

H. E. Timerding. — **Der mathematische Unterricht an den höheren Knabenschulen nach dem Kriege.** — 1 fasc. in-8°, 22 p.; 0,80 M.; B. G. Teubner, Leipzig.

Mathematisch-physikalische Bibliothek. — Volumes in-16, de 50 à 60 p.; 1 M. 30, B. G. Teubner, Leipzig : Bd. 2. H. Wieleitner. — **Der Begriff der Zahl.** 2. Aufl. — Bd. 13. P. Mænnchen. — **Geheimnisse der Rechenkünstler.** 2. Aufl. — Bd. 28. P. Luckey. — **Einführung in die Nomographie.** I. Teil : Die Funktionsleiter. — Bd. 29. A. Baruch. — **Die Grundlagen unserer Zeitrechnung.** — Bd. 30. W. Lietzmann. — **Was ist Geld?**

NOTIONS D'ARITHMOGÉOMÉTRIE

PAR

Emile TURRIÈRE (Montpellier).

(5e et dernier article)[1]

L'arithmogéométrie sur les courbes et les surfaces transcendantes. Généralisation de l'arithmogéométrie.

101. — L'étude des arithmopoints des courbes ou des surfaces transcendantes est assez naturelle après les considérations qui précèdent, mais les principes qui permettent de rechercher certaines solutions des équations ordinaires de l'analyse indéterminée, tels que ceux qui sont à la base des travaux de FERMAT ou d'EULER, par exemple, ne sont plus d'aucune utilité dans le domaine des équations transcendantes. Ici, plus de fil directeur, plus de généralités possibles sur les relations entre les solutions. Seules quelques équations très spéciales de l'analyse transcendante ont pu jusqu'ici être soumises à des recherches arithmotrigonométriques.

De ces très rares équations indéterminées transcendantes douées de solutions rationnelles, que nous connaissons présentement, les deux plus anciennes semblent encore avoir

---

[1] Voir l'*Enseignement mathématique*, 18e année, 15 mars 1916, pp. 81-110, et 15 novembre 1916, pp. 397-428; 19e année, 15 mai 1917, pp. 159-191 et juillet-septembre-novembre 1917, pp. 233-272.

Voir aussi *Le problème de Léonard de Pise et de Jean de Palerme*, dans *L'Enseignement Mathématique*, 17e année, septembre-novembre 1915, pp. 315-324; et une Note *Au sujet d'un article de M. A. Gérardin*, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*, [4e], t. XVIII, février 1918, pp. 43-49.

Une erreur s'est glissée dans mon précédent article, à l'occasion de la démonstration de l'impossibilité de l'équation arithmotrigonométrique $\sin u + \sin v = 1$; le résultat est exact. J'aurai très prochainement l'occasion de revenir sur cette question.

été primitivement envisagées par L. Euler ; mais il ne s'agit nullement ici de spéculations du genre de celles qui font l'objet des mémoires dont la réunion a constitué les admirables *Commentationes arithmeticæ ;* il ne s'agit plus, dis-je, de questions arithmétiques et c'est dans de tout autres circonstances que ces deux équations ont été mentionnées par Euler.

L'une des deux équations auxquelles je fais allusion est la suivante :

$$\text{arc tang}\, x + \text{arc tang}\, y = \frac{\pi}{4} \; ;$$

elle admet la solution $x = \frac{1}{2}$ et $y = \frac{1}{3}$, d'après la relation d'Euler :

$$\text{arc tang}\, \frac{1}{2} + \text{arc tang}\, \frac{1}{3} = \frac{\pi}{4} \; .$$

L'autre, beaucoup plus importante, est l'équation :

$$x^y = y^x \; ;$$

elle représente une courbe transcendante douée d'une infinité d'arithmopoints, au sujet desquels L. Euler s'étend assez longuement, dans un passage qui mérite d'être cité presque intégralement :

« Telle est la courbe comprise dans l'équation :

$$x^y = y^x \; ;$$

« on voit bien sur-le-champ que l'appliquée y est constam-
« ment égale à l'abscisse x, de sorte que la ligne droite
« inclinée à l'axe sous un angle demi-droit satisfait à l'équa-
« tion. Il est cependant visible que l'équation proposée a
« une signification plus étendue que celle de la ligne droite
« $y = x$, et que par conséquent celle-ci ne peut exprimer
« tout ce que contient l'autre $x^y = y^x$; car on peut satisfaire
« aussi à cette dernière sans que x soit égal à y. Par exemple,
« si $x = 2$, y peut être égal à 4 ; ... nous aurons :

$$x = t^{\frac{1}{t-1}} \, , \qquad y = t^{\frac{t}{t-1}} \; \ldots$$

« Il y a donc une infinité de nombres x et y qui, pris deux « à deux, peuvent satisfaire à l'équation $x^y = y^x$; tels sont « les nombres suivants, *en s'en prenant à ceux qui sont « rationnels :*

$$x = 2\,, \qquad y = 4\,,$$

$$x = \frac{9}{4}\,, \qquad y = \frac{27}{8}\,,$$

$$x = \frac{64}{27}\,, \qquad y = \frac{256}{81}\,,$$

$$x = \frac{625}{256}\,, \qquad y = \frac{3125}{1024} \text{ etc. ...}$$

« Quoi qu'il y ait, dans ces courbes et dans les autres « semblables, une infinité de points qui peuvent être dimi- « nués algébriquement, elles ne peuvent cependant être « mises au nombre des courbes algébriques, parce qu'elles « renferment une infinité d'autres points qu'il est impossible « d'aligner d'une manière semblable[1]. »

102. — La propriété de la courbe d'équation $x^y = y^x$ d'admettre les arithmopoints semble avoir été l'origine de deux questions concernant la courbe transcendante représentée par l'équation[2]

$$(x+1)^y = x^{y+1} + 1\,,$$

douée des arithmopoints de coordonnées ($x = 1$, $y = 1$), ($x = 2$, $y = 2$) et de tous les arithmopoints de l'axe Oy ($x = 0$, y quelconque), ainsi que la courbe[3] d'équation

$$x^y = y^x + 1\,,$$

qui est douée elle aussi des arithmopoints de coordonnées ($x = 2$, $y = 2$), ($x = 3$, $y = 2$) et de tous les arithmopoints de l'axe Ox.

D'autre part, la relation d'Euler :

$$\text{arc tang}\,\frac{1}{2} + \text{arc tang}\,\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}\,,$$

---

[1] *Introduction à l'Analyse infinitésimale*, par Léonard Euler, trad. J.-B. Labey, t. II, imprimé en 1797, p. 297-298.

[2] *Nouvelles Annales de Mathématiques*, [2], t. XV, 1876, p. 144 et p. 545-547.

[3] Ibid., [2], t. XIV, 1875, p. 288, et [2], t. XV, 1876, p. 44-46.

et celles analogues de Véga et de Machin :

$$2\text{arc tang}\,\frac{1}{3} + \text{arc tang}\,\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}\,, \qquad \text{(Véga)}$$

$$4\text{arc tang}\,\frac{1}{5} - \text{arc tang}\,\frac{1}{239} = \frac{\pi}{4}\,, \qquad \text{(Machin)}$$

ont donné lieu à divers travaux.

Une question posée, au sujet de ces relations d'Euler, de Véga et de Machin dans l'*Intermédiaire des Mathématiciens*[1], a provoqué la publication de toute une série de Mémoires importants de M. Carl Störmer[2], concernant des équations de cette nature.

M. C. Störmer a notamment démontré que, en outre des solutions d'Euler, de Véga et de Machin, l'équation

$$m\,\text{arc tang}\,\frac{1}{x} + n\,\text{arc tang}\,\frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}\,,$$

n'admet en nombres entiers qu'une seule solution nouvelle :

$$2\text{arc tang}\,\frac{1}{2} - \text{arc tang}\,\frac{1}{7} = \frac{\pi}{4}\,.$$

M. E.-B. Escott[3] a d'autre part rappelé l'existence des recherches de Gauss dans cet ordre d'idées et il a en outre

---

[1] Question n° 377 (S. Gravé), t. I, 1894, p. 228.

[2] Carl Störmer, *Solution complète en nombres entiers* m, n, x, y, *et* k *de l'équation*

$$m\,\text{arc tang}\,\frac{1}{x} + n\,\text{arc tang}\,\frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}\,.$$

(Christiania Videnskabsselskabschrifter, 1895.)

Sur les solutions entières $x_1 \ldots x_n \ldots z_1 \ldots z_n$, k, *de l'equation :*

$$x_1\,\text{arc tang}\,\frac{1}{z_1} + x_2\,\text{arc tang}\,\frac{1}{z_2} + \ldots + x_n\,\text{arc tang}\,\frac{1}{z_n} = k\frac{\pi}{4}\,.$$

(C. R., t. CXXII, 27 janvier 1896, p. 175-177.)
(» » et 3 février 1896, p. 225-227.)

Sur l'application de la théorie des nombres entiers complexes à la solution en nombres rationnels de l'équation

$$c_1\,\text{arc tang}\,x_1 + \ldots + c_n\,\text{arc tang}\,x_n = k\frac{\pi}{4}\,.$$

(Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Christiania, 1896.)

Solution complète en nombres entiers de l'équation :

$$m\,\text{arc tang}\,\frac{1}{x} + n\,\text{arc tang}\,\frac{1}{y} = k\frac{\pi}{4}\,.$$

(Bulletin de la Société mathématique de France, t. XXVII, 1899, p. 160-170.)

[3] *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, 1896, t. 3, p. 276.

indiqué une formule intéressante :

$$\frac{\pi}{4} = 22\text{arc tang}\,\frac{1}{28} + 2\text{arc tang}\,\frac{1}{445} - 5\text{arc tang}\,\frac{1}{1393} - 10\,\text{arc tang}\,\frac{1}{11018}\,.$$

Il convient enfin de signaler ici l'existence d'arithmopoints sur la courbe logistique : cette proposition négative, concernant l'impossibilité en nombres rationnels de l'équation

$$e^x = y\,,$$

a été établie en 1882 par F. Lindemann[1]. Elle a donné lieu tout récemment à un très intéressant travail de MM. G. N. Bauer et H. L. Slobin « *Some transcendental Curves and Numbers* »[2].

Il est vraisemblable que la liste précédente des travaux où se trouvent des résultats susceptibles d'être rattachés à l'arithmogéométrie des courbes et des surfaces transcendantes est loin d'être complète; en tous cas, leur nombre est certainement encore restreint.

103. — Généralisation de l'arithmogéométrie. — La même remarque s'applique aussi aux recherches faites autour d'une généralisation importante et naturelle de l'arithmogéométrie dont la première manifestation se trouve dans des travaux de Ang. Genocchi.

G. Lamé[3] avait, en 1840, publié un remarquable mémoire sur un cas particulier du dernier théorème de Fermat; il avait établi l'impossibilité en nombres entiers de l'équation indéterminée :

$$x^7 + y^7 = z^7\,;$$

A. Cauchy[4], M. Lebesgue[5] et le P. Pépin[6] avaient à cette

---

[1] *Ueber die Zahl* π, Mathematische Annalen, XX, 1882, S. 213-225.

[2] Rendiconti del Circolo matematico di Palermo, XXXVI, 1913, p. 327-337.

[3] G. Lamé. *Mémoire d'Analyse indéterminée démontrant que l'équation* $x^7 + y^7 = z^7$ *est impossible en nombres entiers*, Journal de Mathématiques pures et appliquées (de Liouville), [1], t. V, 1840, pp. 195-211.

[4] A. Cauchy. Rapport sur le Mémoire précédent (ibid.), p. 211-215; cf. aussi C. R., t. IX, 16 septembre 1839, p. 359-363.

[5] M. Lebesgue. *Démonstration de l'impossibilité de résoudre l'équation* $x^7 + y^7 + z^7 = 0$ *en nombres entiers* (Journal de Mathématiques pures et appliquées (de Liouville), [1], t. V, 1840, p. 276-279.

[6] Le P. Pépin. *Impossibilité de l'équation* $x^7 + y^7 + z^7 = 0$. C. R., t. LXXXII, 1876, p. 676-679 et 743-747. Cette impossibilité est ici rattachée à celle d'une équation $x^4 + 7^2y^4 = \square$ appartenant à une famille plus étendue d'équations étudiées par Edouard Lucas.

occasion présenté quelques remarques et simplifié la démonstration de G. Lamé.

Poussant plus loin l'analyse de cette équation particulière de Fermat, A. Genocchi établit que, non seulement, *elle est impossible en nombres entiers, mais aussi en prenant pour* x, y, z *les racines d'une même équation du troisième degré à coefficients rationnels;* cette impossibilité est rattachée à celle de l'équation

$$x^4 + 6x^2 - \frac{1}{7} = \square ,$$

en nombres rationnels [1].

104. — La propriété négative de l'équation $x^7 + y^7 + z^7 = 0$, de ne point posséder non seulement des arithmopoints, mais encore des points dont les coordonnées homogènes x, y et z soient exprimables par les racines d'une même équation cubique rationnelle, doit être considérée comme le premier théorème d'une généralisation de l'arithmogéométrie : cette nouvelle branche de l'étude géométrique d'une équation indéterminée de l'analyse diophantine aurait pour objet la recherche de ceux des points particuliers d'une courbe donnée, représentée au moyen d'une équation rationnelle, par chacun desquels puisse passer une courbe de même nature, mais d'un degré moindre imposé a priori : les points situés sur une arithmodroite seraient précisément les arithmopoints de la courbe donnée; les points situés sur une conique constitueraient une seconde famille; la troisième famille serait celle des points situés sur une cubique d'équation rationnelle.

En d'autres termes, cette généralisation de l'arithmogéométrie consisterait à substituer à l'ensemble des nombres rationnels celui des nombres quadratiques, puis celui des nombres cubiques ou plus généralement celui des nombres appartenant à un certain domaine imposé de rationalité. Le programme d'une telle étude a été tracé dans un mémoire

[1] A. Genocchi. *Sur l'impossibilité de quelques équations doubles*, C. R., t. LXXVIII, 9 février 1874, p. 433-435. — *Généralisation du théorème de Lamé sur l'impossibilité de l'équation* $x^7 + y^7 + z^7 = 0$, C. R., t. LXXXII, 1876, p. 910-913.

de H. Poincaré : *Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques*[1].

Généralisation par voie complexe.

105. — Dans les derniers paragraphes ci-dessus, j'ai rappelé quelques rares essais d'extension de l'arithmogéométrie, qui se rattachent tous à l'étude bien difficile des arithmopoints de courbes ou de surfaces transcendantes spéciales, ou encore à celle de ceux des points des courbes ou surfaces algébriques dont les coordonnées sont exprimables non plus rationnellement mais au moyen de nombres appartenant à un certain domaine imposé de rationalité.

Ce sont là deux directions bien distinctes vers lesquelles l'arithmogéométrie semble devoir s'orienter. Le grand intérêt qui est actuellement attaché au célèbre théorème de Fermat ne peut que provoquer des recherches arithmogéométriques autour des courbes spéciales d'ordre élevé, ou même d'ordre indéterminé, plus ou moins analogues aux laméennes. Les belles recherches de M. C. Störmer sont d'autre part de nature à faire naître le désir d'entreprendre des études semblables pour d'autres types d'équations transcendantes.

Ce sont là, je le répète, des questions qui seront certainement étudiées dans un avenir plus ou moins éloigné de nous.

A côté de ces deux extensions naturelles de l'arithmogéométrie, je crois devoir signaler enfin une troisième généralisation essentiellement différente des précédentes, car elle consiste en une prolongation de l'arithmogéométrie dans le domaine des grandeurs et des nombres imaginaires. De même, en effet, que la considération de ceux des éléments de certaines figures géométriques, qui sont repérés par des nombres rationnels, a pu présenter un certain intérêt, de même l'*étude des éléments réels des figures complexes* peut parfois conduire à des résultats qui, s'ils ne semblent

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (de Liouville), 5e série, t. 7, 1901, p. 161-233.

offrir aucune utilité immédiate, sont néanmoins suffisamment curieux pour mériter de ce fait d'être mentionnés ici.

Le sujet de cette étude des éléments réels de figures imaginaires est évidemment immense, en raison même du nombre illimité des figures imaginaires de la géométrie plane et de la géométrie spatiale. Il y a donc lieu de limiter les développements qui vont suivre à ceux des résultats qui paraissent tout spécialement les plus curieux.

106. — Dans tout ce qui va suivre, les figures complexes considérées seront définies par des points dont les coordonnées seront des nombres imaginaires de la forme $x + iy$. Un point imaginaire du plan dépend ainsi de quatre nombres réels ; un point de l'espace dépend de six nombres réels.

Le principe, qui est à la base des remarques suivantes, est que, sur toute droite imaginaire du plan représentée par une équation

$$(a + ia')X + (b + ib')Y + (c + ic') = 0 ,$$

il existe un point réel. Corrélativement, parmi toutes les droites pivotant autour d'un même point imaginaire, il existe une droite réelle, en géométrie plane bien entendu.

Lorsque la droite imaginaire varie dans le plan [en entendant par variation de la droite imaginaire celle des quatre paramètres réels qui figurent dans son équation après division par $c + ic'$, par exemple], le point réel se déplace dans ces conditions et son déplacement est parfaitement déterminé par la loi de variation des coefficients de la droite imaginaire. Toutefois le déplacement du point réel ne précise nullement celui de la droite, puisque la représentation analytique d'une droite de cette nature s'effectue au moyen de quatre paramètres réels.

107. — Définition des courbes orthoptiques. — La loi la plus simple de variation d'une droite imaginaire, dans le plan, consiste à faire dépendre les quatre coefficients réels de l'équation de cette droite d'un paramètre réel unique.

Les deux droites réelles, représentées par les équations respectives

$$aX + bY + c = 0 \quad \text{et} \quad a'X + b'Y + c' = 0 ,$$

qui déterminent par leur intersection le point réel de la droite imaginaire, enveloppent alors deux courbes réelles du plan ; le point réel considéré décrit un certain lieu géométrique, réel lui aussi.

Plus particulièrement, supposons que l'équation de la droite imaginaire soit l'équation canonique

$$X \cos \varphi + Y \sin \varphi - \varpi = 0 \ ;$$

φ est ici un azimut complexe :

$$\varphi = t + i\mathrm{T} \ ;$$

de même la distance ϖ de l'origine des coordonnées à cette droite imaginaire est un nombre imaginaire :

$$\varpi = p + i\mathrm{P} \ ;$$

t est supposé variable et pris pour paramètre destiné à repérer la droite imaginaire ; T, p, P sont, en d'autres termes, quatre fonctions données de la variable réelle t.

Si maintenant ce paramètre t prend un accroissement réel, tout se passe comme pour le cas d'une ∞^1 de droites réelles ; le point d'intersection de deux droites voisines de paramètres t et $t + dt$ a une limite lorsque dt tend vers zéro et par suite les droites imaginaires considérées enveloppent une courbe imaginaire représentée par les fonctions précédentes T, p et P.

Cela étant, la tangente imaginaire considérée est douée d'un point réel, défini comme intersection des deux droites réelles représentées respectivement par les équations :

$$x \cos t + y \sin t = \frac{p}{\operatorname{ch} \mathrm{T}} \ ,$$

$$- x \sin t + y \cos t = \frac{\mathrm{P}}{\operatorname{sh} \mathrm{T}} \ ;$$

celles-ci sont évidemment deux droites rectangulaires, qui enveloppent deux courbes réelles c_1 et c_2 simplement définies par les équations polaires tangentielles qui précèdent. Ainsi donc :

La courbe réelle, lieu des points réels situés sur les tangentes d'une courbe imaginaire, peut toujours être SIMPLEMENT *définie comme l'orthoptique de deux courbes réelles.*

Cette proposition rattache donc la notion de courbe orthoptique d'une courbe réelle à celle de la courbe réelle d'une certaine figure imaginaire.

108. — DROITES IMAGINAIRES DE L'ESPACE AYANT UN POINT RÉEL. — Alors que, sur toute droite imaginaire du plan, il existe toujours un point réel, il n'en est pas de même en géométrie spatiale.

Soit une droite imaginaire générale de l'espace. Elle part du point imaginaire μ de coordonnées

$$\xi = x_1 + ix_2 , \quad \eta = y_1 + iy_2 , \quad \zeta = z_1 + iz_2 ;$$

sa direction est définie par des coefficients

$$\alpha = a_1 + ia_2 , \quad \beta = b_1 + ib_2 , \quad \gamma = c_1 + ic_2 ;$$

les coordonnées d'un point quelconque de la droite sont :

$$\Xi = \xi + \lambda\alpha , \quad \mathrm{H} = \eta + \lambda\beta , \quad \mathrm{Z} = \zeta + \lambda\gamma ,$$

le paramètre λ étant l'imaginaire $l_1 + il_2$. Pour que ce point courant de la droite puisse être réel, il faut et il suffit que les parties purement imaginaires des expressions des trois coordonnées Ξ, H, Z soient simultanément nulles :

$$\begin{aligned} x_2 + l_1 a_2 + l_2 a_1 &= 0 , \\ y_2 + l_1 b_2 + l_2 b_1 &= 0 , \\ z_2 + l_1 c_2 + l_2 c_1 &= 0 ; \end{aligned}$$

il en résulte la condition suivante d'existence d'un point réel sur la droite imaginaire considérée :

$$\begin{vmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 ;$$

l_1 et l_2 s'obtiennent alors par le système linéaire ci-dessus

écrit et les coordonnées du point réel M sont alors les suivantes :

$$X = x_1 + a_1 l_1 - a_2 l_2 ,$$
$$Y = y_1 + b_1 l_1 - b_2 l_2 .$$
$$Z = z_1 + c_1 l_1 - c_2 l_2 .$$

109. — Définition de la développante d'une courbe plane réelle. — Parmi les courbes imaginaires de l'espace ordinaire, les plus remarquables sont certainement les lignes de longueur nulle. Leurs équations au moyen d'un paramètre réel t et d'une fonction $F(t)$ de cette variable réelle sont :

$$\begin{aligned} \xi &= \int (1 - t^2) F''' dt &&= (1 - t^2) F'' + 2tF' - 2F , \\ \eta &= i \int (1 + t^2) F''' dt &&= i \{ (1 + t^2) F'' - 2tF' + 2F , \\ \zeta &= 2 \int t F''' dt &&= 2tF'' - 2F' ; \end{aligned}$$

F', F'' et F''' désignent les dérivées première, seconde et troisième de cette fonction générale $F(t)$. Dans le cas actuel on a donc

$$\begin{aligned} x_1 &= (1 - t^2) F'' + 2tF' - 2F , & x_2 &= 0 , \\ y_1 &= 0 , & y_2 &= (1 + t^2) F'' - 2tF' + 2F , \\ z_1 &= 2tF'' - 2F' , & z_2 &= 0 ; \end{aligned}$$

les coefficients de direction de la tangente imaginaire à cette courbe imaginaire sont :

$$\begin{aligned} a_1 &= (1 - t^2) F''' , & a_2 &= 0 . \\ b_1 &= 0 , & b_2 &= (1 + t^2) F''' , \\ c_1 &= 2tF''' , & c_2 &= 0 . \end{aligned}$$

La condition d'existence d'un point réel sur cette droite imaginaire est manifestement satisfaite quelle que soit la fonction $F(t)$; les valeurs de l_1 et de l_2 sont ici

$$l_1 = - \frac{y_2}{b_2} , \qquad l_2 = 0 ,$$

et les coordonnées du point réel sont par suite :

$$x = 4 . \frac{tF' - F}{1 + t^2} ,$$
$$y = 0 ,$$
$$z = - 2 . \frac{(1 - t^2) F' + 2tF}{1 + t^2} .$$

Ce point décrit une courbe réelle située dans le même plan que la courbe (c_1) décrite par le point réel de coordonnées x_1, y_1, z_1. Comme les diverses coordonnées introduites sont liées par la relation $dx_1^2 + dz_1^2 = dy_2^2$, y_2 n'est autre que l'abscisse curviligne s_1 de cette courbe réelle (c_1) et puisque l_1 est égal à $-\frac{y_2}{b_2} = -\frac{y_2}{y_2'}$, les coordonnées du point réel M deviennent :

$$x = \frac{1}{y_2'}(x_1 y_2' - y_2 x_1') = x_1 - s_1 \frac{dx_1}{ds_1},$$

$$y = 0,$$

$$z = \frac{1}{y_1'}(z_1 y_2' - y_2 z_1') = z_1 - s_1 \frac{dz_1}{ds_1};$$

ces dernières équations prouvent que ce point (x, y, z) décrit une développante par le fil de la courbe réelle (c_1).

En résumé : *toutes les tangentes d'une courbe minima de l'espace sont douées d'un point réel. La courbe lieu de ces points réels n'est autre qu'une développante de la courbe réelle plane* (c_1).

Comme la courbe plane (c_1), dont la ligne de longueur nulle peut être déduite au titre d'hélice particulière du cylindre de section droite (c_1), est absolument générale, cette proposition définit d'une manière inattendue la développante d'une courbe plane.

110. — Plus généralement, supposons que la droite imaginaire de l'espace appartienne à une ∞^1 développable : les douze paramètres $(x_1, \ldots, z_2)$, $(a_1, \ldots, c_2)$ sont des fonctions réelles de la seule variable réelle t liées par les relations :

$$a_1 = \frac{dx_1}{dt}, \quad b_1 = \frac{dy_1}{dt}, \quad c_1 = \frac{dz_1}{dt},$$

$$a_2 = \frac{dx_2}{dt}, \quad b_2 = \frac{dy_2}{dt}, \quad c_2 = \frac{dz_2}{dt};$$

la condition d'existence d'un point réel sur une telle tan-

gente imaginaire à une courbe imaginaire est alors :

$$\begin{vmatrix} x_2 & \frac{dx_2}{dt} & \frac{dx_1}{dt} \\ y_2 & \frac{dy_2}{dt} & \frac{dy_1}{dt} \\ z_2 & \frac{dz_2}{dt} & \frac{dz_1}{dt} \end{vmatrix} = 0 .$$

On se donnera, pour y satisfaire, la courbe gauche réelle (c_2) lieu du point M_2 de coordonnées x_2, y_2, z_2. P et Q étant deux fonctions de la variable réelle t, on posera :

$$dx_1 = Pd(Qx_2) ,$$
$$dy_1 = Pd(Qy_2) ,$$
$$dz_1 = Pd(Qz_2) ;$$

la courbe (c_1) lieu du point (x_1, y_1, z_1) est alors définie, à une translation arbitraire près, par trois quadratures :

$$x_1 = PQx_2 - \int Qx_2 dP ,$$
$$y_1 = PQy_2 - \int Qy_2 dP ,$$
$$z_1 = PQz_2 - \int Qz_2 dP ;$$

si, par exception, la courbe (c_2) est un axe de coordonnées, l'axe Oz par exemple, la condition est satisfaite quelle que soit la courbe (c_1), puisque x_2, y_2, x'_2 et y'_2 sont nuls ; l_2 est nul et l_1 prend la valeur $-\frac{z_2}{z'_2}$, de sorte que les coordonnées du point réel M sont alors :

$$x = x_1 - z_2 \frac{dx_1}{dz_2} , \qquad y = y_1 - z_2 \frac{dy_1}{dz_2} , \qquad z = z_1 - z_2 \frac{dz_1}{dz_2} ;$$

la courbe (c_1) reste indéterminée ; le point M est un point de la tangente en M_1 à cette courbe réelle (c_1), à une distance $M_1M = z_2 \frac{dz_1}{dz_2}$ du point M_1 de contact de la tangente. En pre-

nant plus particulièrement z_2 proportionnel à l'abscisse curviligne s_1 de la courbe (c_1), $z_2 = ks_1$, la courbe lieu de M est une développante par le fil de la courbe (c_1). Ce résultat constitue par suite une généralisation de celui qui a été indiqué au paragraphe précédent, à propos des courbes de longueur nulle (k est alors égal à l'unité et z_1 est nul, aux notations près).

* * *

111. — Je n'insiste pas sur cette question qui ne présente qu'un intérêt de curiosité. Il me suffira de dire que les remarques qui précèdent ne sont pas les seules qu'il est possible de faire dans la considération des éléments de certaines figures imaginaires du plan ou de l'espace. C'est ainsi que des transformations rationnelles bien connues peuvent être rattachées à ces mêmes considérations et que l'étude des droites de l'espace qui sont douées d'un point réel met en évidence certains systèmes rectilignes, congruences ou complexes, bien connus par ailleurs.

Paris, le 1er février 1918.

SUR LA « VARIÉTÉ MOYENNE » DE DEUX VARIÉTÉS CONVEXES

PAR

Georges TIERCY (Genève).

§ 1.

On connaît la définition de « corps moyen » de deux corps convexes donnés : soient C_1 et C_2 ces corps donnés ; on joint un point A_1 de C_1 à un point A_2 de C_2 ; on prend le point milieu M du segment $(A_1 A_2)$; le lieu des points M est le corps moyen de C_1 et C_2.

Les propriétés de ces « corps moyens » peuvent être établies analytiquement ; il suffirait pour cela d'utiliser la « théorie des corps convexes » de Minkowski [1].

Les démonstrations deviennent extrêmement simples, si l'on procède par voie géométrique. Je me suis d'ailleurs placé d'emblée dans l'espace à n dimensions ; en cours de route, nous examinerons des cas de l'espace ordinaire. Comme cas particulier, nous envisagerons celui où toutes les droites servant à la construction de la variété moyenne ont une direction constante.

§ 2.

Soient donc deux variétés convexes, C_1 et C_2 ; la variété moyenne, que nous désignerons par (C), est aussi une variété convexe. Soit n le nombre des dimensions de ces variétés.

[1] MINKOWSKI. *Gesammelte Abhandlungen*, II, p. 131-260.

Pour construire la variété moyenne, procédons de la manière suivante :

Situons l'espace à n dimensions dans l'espace immédiatement supérieur à $(n+1)$ dimensions ; concevons que la variété C_1 soit située dans le (n — plan) défini par l'équation :

$$x_{n+1} = 0 \ ,$$

tandis que la variété C_2 serait située dans le (n — plan) défini par l'équation :

$$x_{n+1} = 2\alpha \ .$$

Considérons alors la plus petite variété convexe contenant les deux variétés proposées ; et coupons cette variété à $(n+1)$ dimensions par le (n — plan) défini par l'expression :

$$x_{n+1} = \alpha \ .$$

L'intersection donne une variété à n dimensions ; c'est la « variété moyenne » de C_1 et C_2.

Prenons d'abord quelques exemples.

a) Premier exemple. Soit le cas de $(n = 1)$; les deux variétés données sont donc deux segments de droite, portés sur une droite indéfinie représentant l'espace à une dimension. Situons cette droite dans un plan, l'axe auxiliaire étant perpendiculaire à la droite ; la variété C_1 sera portée par l'axe des x lui-même, tandis que la variété C_2 sera située sur la droite définie par :

$$y = 2 \ . \qquad (\text{avec} \quad \alpha = 1)$$

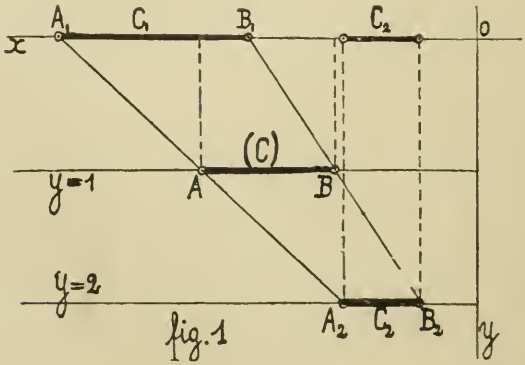


fig. 1

La plus petite variété convexe à $(n+1)$ dimensions contenant les segments C_1 et C_2 est le trapèze $(A_1B_1B_2A_2)$. Coupons ce trapèze par la droite :

$$y = 1 ;$$

on obtient le segment (AB); c'est la variété moyenne des deux segments proposés. Il n'y a plus qu'à revenir à l'espace à une dimension, par une simple translation du segment (AB) parallèlement à l'axe des y.

On aurait obtenu le même résultat en suivant la définition initiale : prendre le milieu de toute droite unissant un point d'une des variétés proposées à un point de l'autre variété. On constatera (fig. 2) pour ce premier exemple

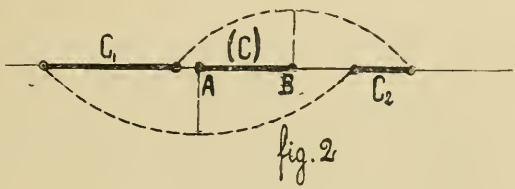


fig. 2

que les points extrêmes A et B sont les milieux des droites joignant, dans l'espace donné, les points extrêmes des variétés C_1 et C_2 ; et cela d'une seule manière.

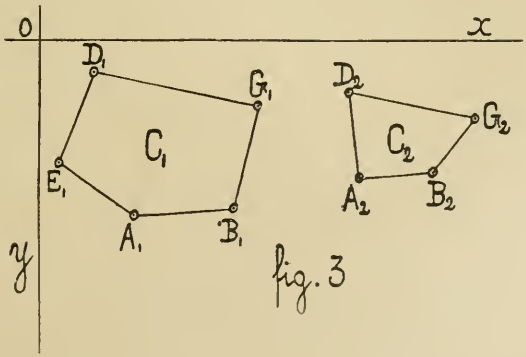


fig. 3

En outre, remarquons que la valeur du segment (C) est égale à la moyenne arithmétique des valeurs des segments C_1 et C_2.

b) Autre exemple. Prenons le cas de $(n = 2)$; et consi-

dérons deux polygones plans, chacun ayant une orientation bien déterminée par rapport aux axes de référence.

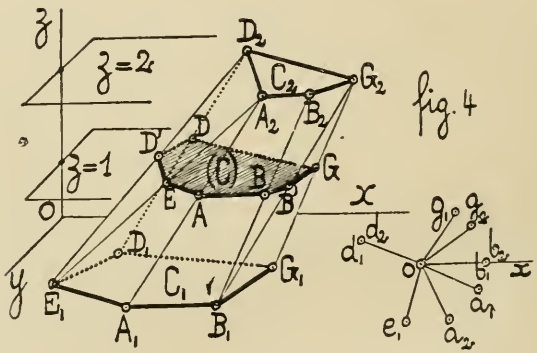
Plaçons cet espace a deux dimensions dans l'espace à trois dimensions; l'axe auxiliaire étant perpendiculaire au plan des polygones donnés; la variété C_1 restera dans le plan :

$$z = 0 ;$$

la variété C_2 sera située dans le plan :

$$z = 2 ;$$

mais elle gardera son orientation par rapport aux axes des x et des y.



Le plus petit volume convexe limité par les bases C_1 et C_2 est un prismatoïde; ses faces latérales sont des trapèzes ou des triangles; on aura un trapèze lorsque les polygones C_1 et C_2 présenteront deux côtés parallèles; par exemple, les côtés $(A_1 B_1)$ et $(A_2 B_2)$ fournissent un trapèze, de même que les côtés $(D_1 G_1)$ et $(D_2 G_2)$; quant aux triangles, on les obtiendra en étudiant l'orientation des différents côtés des variétés proposées par rapport à l'un des axes de référence; on prendra successivement comme bases des triangles latéraux, les côtés indiqués par la « rose d'orientation » (fig. 4); on comprend ici l'importance de la conservation de l'orientation respective des variétés C_1 et C_2.

Coupons ce prismatoïde par le plan :

$$z = 1 ;$$

on obtient un polygone (ABB'GDD'E) ; c'est la variété moyenne des deux variétés proposées.

On revient alors à l'espace à deux dimensions par une translation du polygone obtenu parallèlement à l'axe des z. La construction est facile ; il suffit de la faire en perspective cavalière exacte.

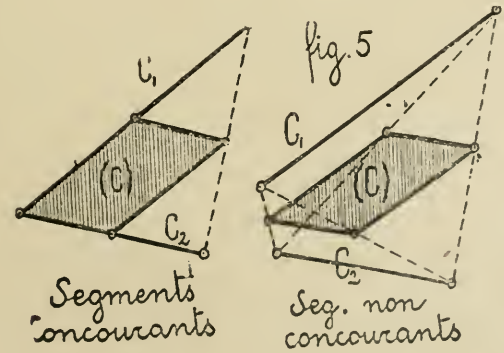
En opérant directement sur la figure (3) à deux dimensions, d'après la définition initiale (qui consiste à prendre le milieu de toute droite unissant un point de C_1 à un point de C_2, dans l'espace où ces figures sont placées), le lecteur obtiendra le même résultat ; c'est évident, car cela revient à ne considérer que la projection orthogonale de la figure (4) sur le plan xy.

On voit immédiatement que : 1° les points extrêmes de la variété solution, ou sommets, sont les milieux de droites joignant des points extrêmes des figures données ; il ne saurait en être autrement ;

2° la longueur du pourtour du polygone (C) est la moyenne arithmétique des longueurs des pourtours de C_1 et C_2.

c) Remarque I. Comme cas particulier de ce deuxième exemple, considérons celui où les polygones C_1 et C_2 se réduisent à deux segments rectilignes, concourants ou non. La variété moyenne est alors un parallélogramme, dont l'un des angles est égal à l'angle formé par les directions de C_1 et C_2.

On a les dessins suivants dans l'espace E_2 :



Si l'on utilise l'espace à trois dimensions, la variété moyenne cherchée sera l'intersection, par le plan ($z = 1$), d'un tétraèdre, dont l'arête C_1 sera dans le plan primitif ($z = 0$) et dont l'arête C_2 sera dans le plan ($z = 2$); on sait que cette section est un parallélogramme, dont les côtés ont pour valeurs respectives $\left(\frac{C_1}{2}\right)$ et $\left(\frac{C_2}{2}\right)$.

Remarque II. Ce qui précède s'étend immédiatement au cas où les variétés C_1 et C_2 sont des surfaces planes convexes quelconques. La variété moyenne sera une surface plane convexe; et le pourtour de cette variété aura pour valeur la moyenne arithmétique des longueurs des pourtours de C_1 et C_2.

Revenons au cas général de deux variétés convexes C_1 et C_2 à n dimensions. La représentation graphique n'est plus possible; peu importe; le processus géométrique indiqué permet d'établir les propriétés fondamentales de la variété moyenne.

On a donc situé les variétés C_1 et C_2 dans l'espace immédiatement supérieur, à $(n + 1)$ dimensions: la variété C_1 dans le (n — plan) défini par:

$$x_{n+1} = 0 ,$$

et la variété C_2 dans le (n — plan)

$$x_{n+1} = 2\alpha ,$$

en conservant leur orientation respective. On a alors considéré la plus petite variété convexe à $(n + 1)$ dimensions contenant C_1 et C_2; et l'on a coupé cette variété par le (n — plan)

$$x_{n+1} = \alpha .$$

L'intersection donne la variété moyenne cherchée, variété convexe à n dimensions.

On établit alors aisément les remarques suivantes:

a) A tout couple de points, A_1 de C_1 et A_2 de C_2, correspond un point de la variété moyenne (C). Si les deux points A_1 et A_2 sont des points intérieurs de C_1 et C_2, le point milieu A de $(A_1 A_2)$ est un point intérieur de la variété (C).

Inversement, à chaque point intérieur A de (C) correspond au moins un couple de points, A_1 de C_1 et A_2 de C_2.

b) Supposons que A_1 soit un point intérieur de C_1, et que A_2 soit un point frontière de C_2; le point A ne saurait alors être qu'un point intérieur de (C). En effet, imaginons, tracée autour du point A_1, une petite (n — variété) convexe V entièrement comprise dans l'intérieur de C_1; et considérons, dans l'espace à $(n+1)$ dimensions, un cône de sommet A_2 et dont la base serait cette variété V. L'intersection de ce [$(n+1)$ — cône] par le (n — plan)

$$z = \alpha$$

appartient tout entière à la variété (C), et contient le point A dans son intérieur.

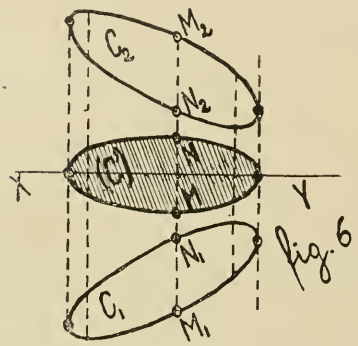
c) Chaque point F de la frontière de la variété (C) correspond au moins à un couple de points F_1 et F_2 des variétés C_1 et C_2, F_1 étant sur la frontière de C_1 et F_2 sur la frontière de C_2. En effet, d'après la remarque *b)*, aucun des points F_1 et F_2 ne saurait être un point intérieur.

d) Si un point E de (C) est un point extrême de la variété moyenne, les points E_1 et E_2, qui lui correspondent, sont, non seulement des points « frontière », mais encore des points extrêmes de C_1 et C_2; en outre, au point E ne correspond qu'un seul couple de points E_1 et E_2. Cette remarque résulte immédiatement de la définition des « points extrêmes ».

Corollaire. Si l'on relie un point frontière F_1 quelconque de C_1 à un point frontière F_2 quelconque de C_2, le point milieu de la droite $(F_1 F_2)$ n'est pas forcément sur la frontière de (C). Par exemple, dans le cas de ($n = 2$), si l'on prend un point de C_1 situé sur $(E_1 A_1)$ et un point de C_2 situé sur $(B_2 G_2)$, le milieu de la droite qui joint ces deux points est à l'intérieur du polygone (C). (Voir fig. 3 et 4.)

§ 3.

Considérations relatives au cas de ($n = 2$) et au cas de ($n = 3$). Considérons deux courbes convexes, planes, orthogonalement *symétriques* l'une de l'autre par rapport à un axe (XY); traçons toutes les cordes ($M_1 N_1 N_2 M_2$) perpendiculaires à l'axe (XY); et marquons (fig. 6) les points milieux M et N des segments ($M_1 N_2$) et ($N_1 M_2$). On construit ainsi une courbe (C′) convexe, qu'on peut appeler : *courbe moyenne de* C_1 *et* C_2 *relative à la direction* (XY).



Cette courbe (C′) n'est pas identique à la courbe moyenne générale (C), définie précédemment; son pourtour est plus petit que celui de (C), et elle est entièrement située à l'intérieur de (C); nous démontrerons ce détail dans la remarque I.

D'autre part, d'après ce que nous avons établi, la courbe (C) a le même pourtour que chacune des courbes symétriques C_1 et C_2; en effet, le pourtour de (C) est égal à la moyenne arithmétique des pourtours de C_1 et C_2, et ces deux derniers ont la même longueur.

Si donc on appelle p la valeur du pourtour de chacune des courbes données, $\mathfrak{P}$ le pourtour de la courbe moyenne (C′) relative à la direction (XY), et P le pourtour de la courbe moyenne générale (C), on a les relations :

$$\mathfrak{P} \leq \mathrm{P} \; ; \qquad \mathrm{P} = p \; ; \qquad \mathfrak{P} \leq p \; .$$

On a donc établi que le périmètre de la courbe (C′) est plus petit que celui des courbes proposées, ou lui est au plus égal.

Or, remarquons que la courbe (C′) n'est pas autre chose

que la « transformée de Steiner de la courbe C_1 relativement à une direction perpendiculaire sur (XY)[1] » ; on l'obtient en portant sur toutes les cordes (M_1N_1) prolongées, de part et d'autre de l'axe (XY), la moitié de la longueur (M_1N_1). On démontre ainsi que la « transformée de Steiner relative à la direction (M_1N_1) » a en général un pourtour plus petit que celui de la courbe primitive C_1.

Pour que le pourtour de (C′) soit égal à celui de C_1, on voit immédiatement la condition : il faudrait que la courbe C_1 ait un axe de symétrie parallèle à (XY).

Remarquons d'ailleurs que l'aire de la courbe est conservée, quelle que soit la courbe convexe C_1.

Remarque I. Nous avons dit que le pourtour de la courbe (C′) est plus petit que celui de la courbe (C), et par conséquent plus petit que celui de chacune des courbes symétriques données. Etablissons ce théorème, géométriquement et par le calcul.

Prenons la droite (XY) comme axe des x, et une des tangentes communes comme axe des y (fig. 6′).

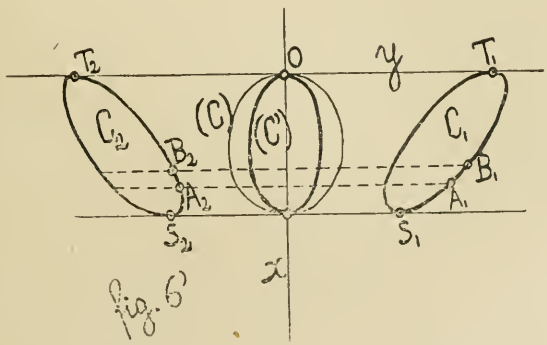


fig. 6′

Géométriquement : Cela résulte de la construction même des courbes (C) et (C′). Prenons en effet deux petits arcs cor-

[1] Steiner. *Œuvres*, II, p. 264-267.

respondants $\widehat{A_1B_1}$ et $\widehat{A_2B_2}$ (fig. 6′). Si on les assimile à des segments de droites (fig. 6″), et qu'on cherche les variétés

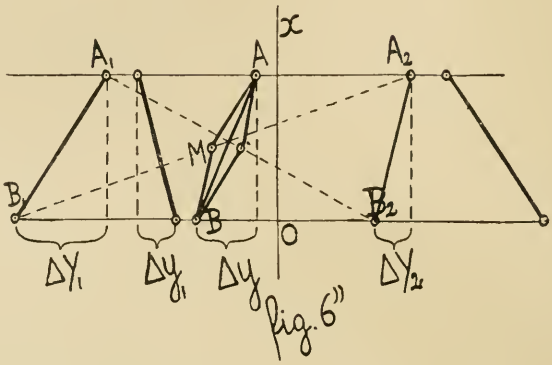


fig. 6″

(C) et (C′) déduites de ces segments, on a :

$$\overline{AB} < \overline{AM} + \overline{MB} .$$

On étend immédiatement à la courbe entière.

Par le calcul : Soient

$$y = y_1(x) \qquad \text{et} \qquad y = Y_1(x)$$

les équations des deux branches $\widehat{S_1T_1}$ de la courbe C_1, la fonction $Y_1(x)$ se rapportant à l'arc extérieur. Les équations de la courbe C_2 seront :

$$\begin{cases} y = Y_2(x) = -y_1(x) , \\ y = y_2(x) = -Y_1(x) , \end{cases}$$

$Y_2(x)$ se rapportant à l'arc intérieur $\widehat{S_2T_2}$.

On a alors, en désignant toujours par p le pourtour de C_1 et de C_2, et par P celui de la courbe moyenne générale (C) :

$$\begin{cases} P = p = \int \sqrt{1 + Y_1'^2}\, dx + \int \sqrt{1 + y_1'^2}\, dx \\ \qquad = \int \sqrt{1 + Y_1'^2}\, dx + \int \sqrt{1 + Y_2'^2}\, dx . \end{cases}$$

Quant à la courbe moyenne (C′) relative à la direction (O.x), courbe dont le pourtour est désigné par $\mathfrak{P}$, il vient :

$$\Delta y = \frac{\Delta Y_1 + \Delta Y_2}{2} \; ; \qquad \text{(fig. 6″)}$$

$$y' = \frac{Y'_1 + Y'_2}{2} \; ;$$

$$\mathfrak{P} = 2 \int \sqrt{1 + \left(\frac{Y'_1 + Y'_2}{2}\right)^2} \, dx \; .$$

On vérifie immédiatement qu'on a :

$$\mathfrak{P} \leq P \; .$$

Pour qu'il y ait égalité ($\mathfrak{P} = P$), on voit qu'il faudrait :

$$Y'_1(x) = Y'_2(x) \; ,$$

c'est-à-dire :

$$Y_1(x) = Y_2(x) + K,$$

K étant une constante. Autrement dit : les courbes C_1 et C_2 devraient présenter un axe de symétrie parallèle à (O.x). C'est également ce qu'indique le raisonnement géométrique basé sur les fig. 6′ et 6″.

Remarque II. Plus généralement, toutes les fois que deux courbes convexes C_1 et C_2 sont comprises entre deux tangentes parallèles (fig. 7), on peut considérer la courbe

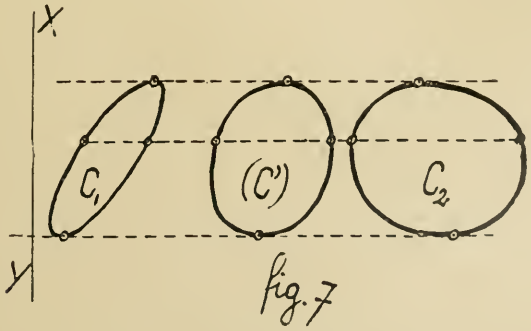


fig. 7

moyenne (C′) relative à la direction (XY) perpendiculaire à celle des tangentes.

Dans ce cas, la courbe (C′) n'a pas d'axe de symétrie orthogonale.

Application de cette remarque : Considérons le cas où les courbes C_1 et C_2 se réduisent à deux segments de droites concourants (fig. 8). Joignons les extrémités A_1 et A_2, et cherchons la variété moyenne (C′) de C_1 et C_2 relative à la direction (XY) perpendiculaire à la droite $(A_1 A_2)$. Les variétés proposées ne sont symétriques l'une de l'autre par rapport à aucun axe (symétrie orthogonale). La variété moyenne (C′) obtenue n'est alors autre chose que la médiane (OA') du triangle $(OA_1 A_2)$.

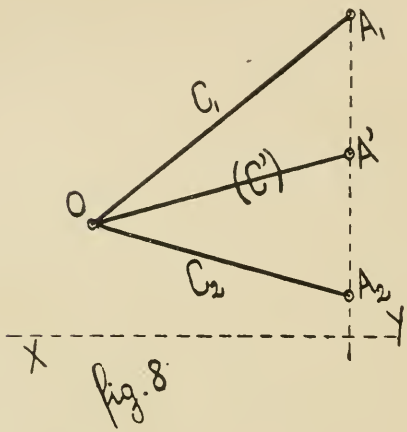


fig. 8

Considérons maintenant, dans l'espace E_3, deux corps convexes quelconques C_1 et C_2, symétriques l'un de l'autre par rapport au plan π (la fig. 6 peut encore servir ; il suffit de poser que le plan π est représenté par sa trace XY sur le plan du dessin). En opérant comme dans le cas de $(n = 2)$, on construit un volume convexe (C′), qu'on peut appeler : « Corps moyen de C_1 et C_2 relativement au plan π ».

Ce corps (C′) est tout entier contenu dans le corps moyen général (C) précédemment défini ; cela résulte des définitions mêmes de (C) et (C′). D'ailleurs, on vérifie aisément que la surface de (C′) est plus petite que celle de C_1 ; soient en effet (fig. 6′) :

$$z = Z_1(x, y), \qquad z = z_1(x, y),$$

les équations des deux portions $\widehat{S_1T_1}$ de la surface de C_1, la fonction $Z_1(x, y)$ donnant la portion extérieure. Soient encore :

$$\begin{cases} z = Z_2(x, y) = -z_1(x, y), \\ z = z_2(x, y) = -Z_1(x, y), \end{cases}$$

les équations des deux portions $\widehat{S_2T_2}$ de la surface de C_2, la fonction $Z_2(x, y)$ se rapportant à la portion intérieure.

Désignons par s la surface de C_1 ou de C_2; et $\mathcal{S}$ celle de la variété (C'). Posons ensuite :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial Z_1}{\partial x} = P_1 , \\ \dfrac{\partial Z_1}{\partial y} = Q_1 ; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial z_1}{\partial x} = p , \\ \dfrac{\partial z_1}{\partial y} = q ; \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Z_2}{\partial x} = P_2 , \\ \dfrac{\partial Z_2}{\partial y} = Q_2 ; \end{cases}$$

il vient :

$$\begin{cases} s = \int\int \left[\sqrt{1 + P_1^2 + Q_1^2} + \sqrt{1 + p^2 + q^2}\right] dx\,dy \\ \quad = \int\int \left[\sqrt{1 + P_1^2 + Q_1^2} + \sqrt{1 + P_2^2 + Q_2^2}\right] dx\,dy . \end{cases}$$

Puis, pour la variété (C') :

$$z'_x = \frac{P_1 + P_2}{2} ; \qquad z'_y = \frac{Q_1 + Q_2}{2} ;$$

$$\mathcal{S} = 2\int\int \sqrt{1 + \left(\frac{P_1 + P_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{Q_1 + Q_2}{2}\right)^2}\, dx\,dy .$$

Or, ce corps (C') n'est pas autre chose que le « transformé de Steiner de la variété C_1 relativement à une direction perpendiculaire au plan π » (voir *Œuvres* de STEINER, II, p. 302); on l'obtient en portant sur toutes les cordes (M_1N_1) prolongées, et de part et d'autre du plan π, la moitié de la longueur du segment (M_1N_1). Il en résulte que le « transformé de Steiner de la variété C_1 relativement à une direction (M_1N_1) d'ailleurs quelconque » a en général une surface plus petite que celle des variétés symétriques proposées.

Pour que la surface soit la même, il faudrait :

$$P_1 = P_2 \qquad \text{et} \qquad Q_1 = Q_2 ;$$

c'est-à-dire :

$$Z_1(x, y) = Z_2(x, y) + K ,$$

avec $K =$ constante; il faudrait donc que le corps C_1 présente un plan de symétrie parallèle au plan π; l'opération de Steiner reviendrait alors à déplacer le corps C_1 en translation, perpendiculairement à son plan de symétrie.

Remarque I. On verrait facilement que la variété (C′) a le même volume que C_1 ou C_2.

Remarque II. Pour pouvoir appliquer l'opération (C′), il n'est point nécessaire que les corps C_1 et C_2 soient symétriques l'un de l'autre par rapport à un certain plan π ; il suffit qu'ils soient convexes et inscrits dans un même cylindre. Mais alors, le corps moyen (C′), relatif au plan π normal aux génératrices du cylindre, ne présente plus de plan de symétrie orthogonale.

Remarque III. On pourra de même, dans l'espace E_n à n dimensions, construire une variété (C′) correspondant aux deux variétés C_1 et C_2, lorsque ces dernières seront orthogonalement symétriques l'une de l'autre par rapport à un certain (n — plan) π.

§ 4.

Combinaison sommatoire géométrique de deux variétés C_1 et C_2 dans l'espace E_n.

Considérons la variété moyenne (C) générale de C_1 et C_2. Et construisons une variété semblable (V) avec un rapport de proportionnalité égal à 2. Cette variété (V) présente toutes les arêtes de C_1 et toutes celles de C_2, en grandeur et orientation ; de même, on y trouve toutes les faces de C_1 et celles de C_2 en vraie grandeur (il y a, en plus, d'autres faces « de liaison »).

On obtiendrait le même résultat si l'on cherchait à construire directement la plus petite variété convexe possible présentant toutes les arêtes de C_1 et toutes celles de C_2 en grandeur et en orientation, et seulement ces arêtes (elles peuvent d'ailleurs figurer plusieurs fois).

Nous pouvons appeler cette variété (V) la « somme géométrique de C_1 et C_2 ; ou plutôt, afin d'éviter toute confusion avec la terminologie employée dans la théorie des vecteurs, nous dirons : « Combinaison sommatoire géométrique » des variétés C_1 et C_2.

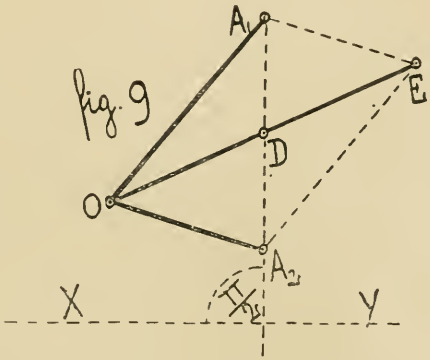
Exemple : Si on a deux sphères de rayons R_1 et R_2, la variété (V), qui leur correspond, est une sphère de rayon $(R_1 + R_2)$.

Il est évident que cette variété (V) possède, relativement aux variétés primitives C_1 et C_2, les mêmes propriétés que la variété moyenne générale (C).

On pourra construire de même une « combinaison sommatoire (V′) relative à un certain (n — plan) π » chaque fois que les variétés C_1 et C_2 seront inscrites dans un cylindre dont les génératrices seront normales à π ; cette variété (V′) sera semblable à la variété (C′), le rapport de proportionnalité étant 2.

Exemple (avec $n = 2$) conduisant à la résultante de deux vecteurs :

Soient C_1 et C_2 deux segments de droites concourants (fig. 9) ; et construisons la variété moyenne (C′) relative à la direction (XY) ; on obtient la médiane (OD) du triangle (OA_1A_2).



Si on la double, on obtient la diagonale (OE) du parallélogramme construit sur (OA_1) et (OA_2).

D'où l'énoncé : La résultante de deux vecteurs (OA_1) et (OA_2), ou somme géométrique ordinaire de ces deux vecteurs, n'est autre chose que la « combinaison sommatoire géométrique (V′), relativement à la direction (XY), des deux segments (OA_1) et (OA_2) ».

Genève, juillet 1915.

CONTRIBUTION
A LA CONSTRUCTION DES ÉLÉMENTS DOUBLES D'UNE INVOLUTION HYPERBOLIQUE

PAR

Fr. Redl (Zell s/Ybbs).

Une involution, de sommet S, est déterminée par les paires de rayons ST, ST′ et SA, SA′ de la fig. 1; un rayon en est représenté par ΣΣ′, de trait plus marqué. D'après une propriété connue, les six sommets d'un quadrilatère complet (dans la figure: TT′AA′ΣΣ′) peuvent être placés sur trois paires de droites correspondantes d'une involution. Dans notre cas, deux sommets viennent sur le rayon double ΣΣ′.

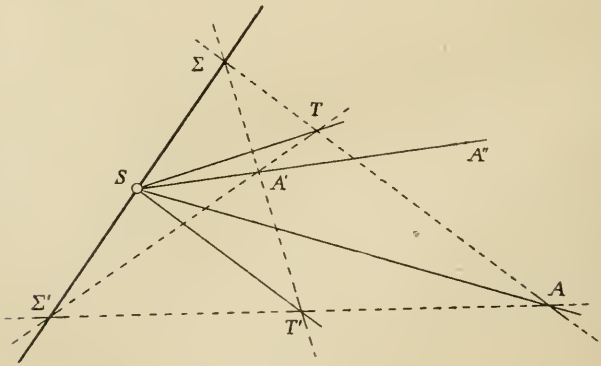


Fig. 2.

La conique qui touche ST en T = (1.2); ST′ en T′ = (4.5) et qui passe par A = 3 contient aussi A′ = 6, car ΣΣ′ est la droite de Pascal de l'hexagone numéroté. Maintenons T, T′ et A fixes, tandis que nous faisons tourner la droite de Pascal autour de S; le point d'intersection de ΣT′ et Σ′T décrit la conique en question, et vient par conséquent aussi en A″,

seconde intersection de SA′. La droite de Pascal représente alors le second rayon double de l'involution.

Réciproquement si, au lieu d'un rayon double, on donnait la conique qui touche une paire de l'involution en T et T′, et coupe l'autre en A′ et A″ (respectivement A et A_1), on trouverait les rayons doubles en construisant les points Σ (Σ') et $\Sigma_1 = AT \times A''T'$ ($\Sigma'_1 = AT' \times A''T$), le point A_1 convenant au même degré que A. La fig. 2 indique la construction. La droite TA est coupée par T′A′ et T′A″ en Σ, resp. Σ_1 ; SΣ et SΣ_1 sont les rayons cherchés. Comme les points T et T′ sont arbitraires, on peut admettre que la conique est un cercle.

On obtient facilement une autre construction des rayons doubles (fig. 2) avec l'aide des points R et R_1 sur la polaire TT′ du point S. R et R_1 sont choisis conjugués suivant le

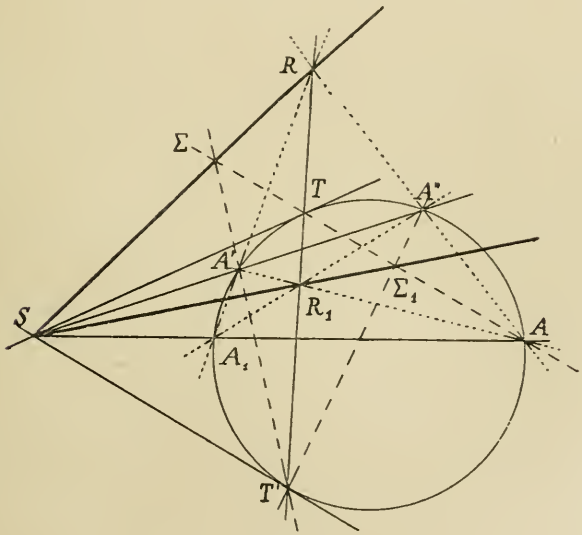


Fig. 2.

cercle, et divisent harmoniquement le segment TT′ ; d'autre part comme points diagonaux du quadrilatère complet $AA_1A'A''$, ils sont aussi divisés harmoniquement par les côtés opposés SA et SA′, etc. Nous avons ainsi une construction des éléments doubles pour le cas où l'une des paires embrasse l'autre : par la paire extérieure (TT′) on décrit un

cercle arbitraire, et l'on détermine le pôle (S), par rapport à ce cercle, du support de l'involution. On joint ce dernier aux points intérieurs par des droites dont les intersections avec le cercle ($A'A''$ et AA_1) sont à joindre entre elles, ce qui conduit aux points doubles R, R_1.

On obtiendrait finalement une troisième construction des rayons doubles en se servant (dans la fig. 2) du théorème suivant lequel deux points diagonaux du quadrilatère complet $AA_1A'A''$ doivent toujours se trouver sur une diagonale du quadrilatère des tangentes aux points précités.

En généralisant par projection la dépendance entre les rayons doubles indiquée dans la fig. 2, on peut, selon les circonstances, l'utiliser pour construire un rayon double, lorsque l'autre est donné. Dans ce but on se sert habituellement des propriétés harmoniques du quadrilatère complet, comme d'ailleurs on s'en rend compte dans la fig. 2, en relation avec les points R et R_1. Mais comme on peut aussi arriver au point R en partant de Σ_1, ceci nous conduit, en combinaison avec la méthode que nous venons de rappeler, au procédé suivant. Si l'on mène par un point arbitraire du rayon double intérieur (extérieur) deux droites dont chacune coupe les quatre rayons de l'involution ; si ensuite on considère comme correspondants les points d'intersection de la première droite auxiliaire, et ceux de la seconde, par les rayons conjugués de l'involution, les droites de jonction des quatre paires de points correspondants passent par un même point du rayon double extérieur (intérieur).

Inversement, si nous partons de $R(R_1)$ pour gagner $\Sigma_1(\Sigma)$, nous trouvons encore une seconde solution de notre problème : Si l'on mène, par un point arbitraire du rayon double intérieur (extérieur) deux droites, dont chacune coupe une paire *différente* de rayons de l'involution, les droites de jonction des quatre points d'intersections, convenablement appairées, se coupent sur le rayon double extérieur (intérieur).

Pour compléter la fig. 2, nous ajoutons la remarque suivante : Si la tangente $A'(A'')$ coupe la droite AA_1 en $P(P')$, et la tangente $A(A_1)$ la droite $A'A''$ en $Q(Q')$, $PQ(P'Q')$ passe par R_1. De même pour le point R. Si, par exemple, les tan-

gentes A′ et A_1 coupent les tangentes T et T′ en V et V′, W et W′, les droites VW′ et WV′ passent par R.

Des constructions dualistiques à celles de la fig. 2, nous ne relevons que la seconde, et nous l'effectuons dans la fig. 3

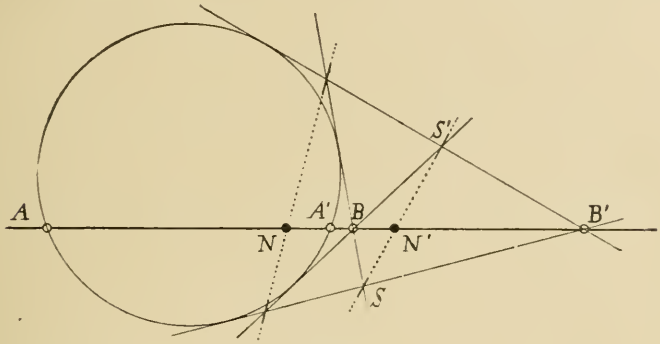


Fig. 3.

qui montre comment on trouve de façon très commode les points doubles d'une involution donnée par deux paires de points. On mène par une des paires — AA′ dans la figure — un cercle quelconque et on lui mène depuis les points B et B′ de la seconde paire, les quatre tangentes possibles, etc. Les points N et N′ conjugués suivant le cercle, divisent harmoniquement la diagonale BB′ du quadrilatère des tangentes, et sont les points cherchés.

Si deux tangentes forment un angle très obtus, leur point d'intersection qui, de plus, peut se trouver près du support, ne peut naturellement pas être employé dans une construction de quelque exactitude. Si l'un au moins des points doubles est obtenu avec sécurité, on construit l'autre en se servant des propriétés harmoniques du quadrilatère, ou du pôle du support suivant le cercle. Mais les remarques faites à propos de la fig. 2, prises dualistiquement, donnent aussi le moyen d'éviter des points d'intersection peu favorables de tangentes. X étant un point convenablement choisi de la droite SS′, XA coupe BS(BS′) en P(P′); XA′ coupe B′S(B′S′) en Q(Q′). PQ(P′Q′) détermine alors sur le support de l'involution le second point double N.

Traduction de M. F. Gonseth (Zurich).

EXTRACTION DE LA RACINE $n^{\text{ième}}$ D'UN NOMBRE RÉEL PAR APPROXIMATIONS SUCCESSIVES

PAR

Mladen T. Béritch (Belgrade, Serbie).

Pour extraire la $n^{\text{ième}}$ racine d'un nombre réel, il y a différents procédés par approximations successives. Pour obtenir les valeurs approchées par défaut et par excès, on emploie ou deux fonctions ou une fonction dans laquelle on fait deux substitutions. Dans les deux cas, on est obligé d'exécuter deux opérations.

J'indique dans la présente Note un procédé qui fournit à la fois, par le même calcul, les deux valeurs approchées (l'une par défaut, l'autre par excès). De plus il fournit le moyen de savoir d'avance le nombre de chiffres communs à la racine cherchée et à deux valeurs approchées.

Ce procédé pourra être généralisé et appliqué au calcul des racines réelles d'une équation, ou des solutions d'un système des équations algébriques ou transcendantes, ce qui fera l'objet de Notes ultérieures.

1. — Désignons par a la valeur arithmétique de la racine $\sqrt[n]{A}$ et considérons la fonction

$$\varphi(t) = f\left[1 - \frac{1}{n}\left(1 - \frac{A}{t^n}\right) - \frac{n-1}{2n^2}\left(1 - \frac{A}{t^n}\right)^2\right].$$

La fonction $\varphi(t)$ est toujours croissante lorsque t varie de 0 à $+\infty$ (φ' étant le carré). Pour $t = 0$ on a $\varphi(0) = -\infty$; quand t croît de $t = 0$ jusqu'à la valeur $f = \alpha = \sqrt[n]{\frac{A}{2}}$, la fonction $\varphi(t)$ croît en restant plus petite que t; pour $t = \alpha$ on a $\varphi(\alpha) = \alpha$; quand t croît de α jusqu'à a, la fonction $\varphi(t)$ croît en restant plus grande que t; pour $t = a$ on a $\varphi(a) = a$; quand t croît de a jusqu'à $+\infty$, la fonction $\varphi(t)$ croît en restant plus petite que t; pour

$t = +\infty$ on a $\varphi(\infty) = \infty$. Dans l'intervalle (α, a) cette fonction satisfait à l'inégalité

$$t \leqq \varphi(t) \leqq a \qquad \text{(les égalités ayant lieu pour } t = \alpha \text{ et } t = a) \ , \qquad (1)$$

et dans l'intervalle $(a, +\infty)$ la même fonction satisfait à l'inégalité

$$t \geqq \varphi(t) \geqq a \qquad \text{(les égalités ayant lieu pour } t = a) \ . \qquad (2)$$

Donc dans l'intervalle $(\alpha + \varepsilon, +\infty)$ l'égalité $t = \varphi(t)$ n'existe que pour $t = a$.

Donnons à t une valeur positive $t = g$, plus petite que a et plus grande que α; cette valeur t satisfait à l'inégalité

$$\frac{A}{2} < g^n < A \ , \qquad (3)$$

en vertu de (1) ou encore

$$g < \varphi(g) < a \qquad (1')$$

de sorte que, g étant une valeur approchée par défaut de $\sqrt[n]{A}$, $\varphi(g)$ en sera aussi une valeur approchée par défaut, mais plus rapprochée de la valeur exacte a que g. En posant $\varphi(g) = g_1$, $\varphi(g_1) = g_2, \ldots$, la suite : $g, g_1, g_2, \ldots$ fournira donc des valeurs de plus en plus approchées par défaut de $\sqrt[n]{A}$ et convergeant uniformément vers cette limite.

De même donnant à t une valeur positive $t = h$, plus grande que a (qui satisfait à l'inégalité $h^n > A$), en vertu de (2) on aura

$$a < \varphi(h) < h \ , \qquad (2')$$

de sorte que, h étant une valeur approchée par excès de $\sqrt[n]{A}$, $\varphi(h)$ en sera aussi une valeur approchée par excès, mais plus rapprochée de la valeur exacte a que h. En posant $\varphi(h) = h_1$, $\varphi(h_1) = h_2, \ldots$, la suite $h, h_1, h_2, \ldots$ fournira donc des valeurs de plus en plus approchées par excès de $\sqrt[n]{A}$ et convergeant uniformément vers cette limite.

On a ainsi deux suites de valeurs, obtenues à l'aide d'une valeur arbitraire $t = g$ (qui satisfait à l'inégalité (3)) et d'une valeur $t = h$ ($h^n > A$) ; elles se rapprochent de plus en plus de la valeur exacte a de la racine et finissent par en différer aussi peu qu'on voudra.

2. — Si l'on remplace g_i (resp. h_i) par une valeur approchée g'_i (resp. h'_i) plus grande que g_i (resp. plus petite que h_i) et plus com-

mode pour le calcul à effectuer, deux cas pourront se présenter :

$$\varphi(g'_i) > g'_i \qquad (\text{resp. } \varphi(h'_i) < h'_i) \qquad (a)$$

les deux valeurs approchées g_i et g'_i (resp. h_i et h'_i) sont toutes les deux par défaut (resp. par excès),

$$\varphi(g'_i) < g_i \qquad (\text{resp. } \varphi(h'_i) > h'_i) \qquad (b)$$

la valeur g'_i (resp. h'_i) n'est plus la valeur approchée par défaut (resp. par excès) mais la valeur approchée par excès (resp. par défaut) puisqu'elle satisfait à l'inégalité (2) (resp. (1) et non à l'inégalité (2)). Donc il faudra écrire $g'_i = h$ (resp. $h'_i = g$).

Dans la pratique on pourra procéder de la manière suivante :

Donnons à t une valeur arbitraire h plus grande que $\sqrt{A}$ (c'est-à-dire telle que $h^n > A$) ; on calcule $\varphi(h)$, on pose $\varphi(h) = h_1$, on choisit un nombre h'_i plus petit que h_1 et plus commode pour le calcul de $\varphi(h)$; on trouve $\varphi(h'_i)$ plus grand ou plus petit que h'_i. Dans le deuxième cas h'_i est la valeur approchée par excès, dans le premier cas, h'_i est la valeur approchée par défaut, donc h'_i est une valeur désignée par g.

Si l'on a $\varphi(h'_i) < h'_i$ on pose $\varphi(h'_i) = h_2$ et on continue de la même manière.

Si l'on a $\varphi(h'_i) > h'_i$ on posera $h'_i = g$, $\varphi(g) = g_1$, on choisit une valeur g'_i plus grande que g_1 et plus commode pour le calcul ; on calcule $\varphi(g'_i)$ qui peut être plus grand ou plus petit que g'_i, qui est d'après cela une valeur approchée par défaut ou par excès.

On continue en choisissant toujours : une valeur plus grande, si la valeur trouvée était la valeur approchée par défaut ; ou une valeur plus petite, si la valeur trouvée était la valeur approchée par excès. De cette manière on se rapprochera de la racine a des deux côtés, la valeur exacte de la racine restant toujours comprise entre la plus grande des valeurs de g_i et la plus petite des valeurs de h_i. En poussant suffisamment les calculs, on resserre cet intervalle autant qu'on veut.

3. — En supprimant le troisième terme du crochet, la fonction $\varphi(t)$ devient la fonction

$$\psi(t) = t\left[1 - \frac{1}{n}\left(1 - \frac{A}{t^n}\right)\right].$$

Cette fonction $\psi(t)$ est infinie pour $t = 0$; quand t croît de $t = 0$ jusqu'à $t = a$, $\psi(t)$ décroît ; pour $t = a$, on a $\psi(a) = a$; quand t

croît de $t = a$ jusqu'à $+\infty$, $\psi(t)$ croît; pour $t = +\infty$ on $\psi(\infty) = +\infty$. La fonction $\psi(t)$ satisfait à l'inégalité

$$\psi(t) \geqq t \qquad (\text{si } t > 0)$$

l'égalité n'ayant lieu que pour $t = a$.

Si $t = g$, c'est-à-dire si t est une valeur approchée par défaut de a, $\varphi(g)$ l'est aussi, tandis que $\psi(g)$ est une valeur approchée par excès. On aura l'inégalité

$$g < \varphi(g) < a < \psi(g) ,$$

donc la racine cherchée a sera comprise entre deux valeurs $\varphi(g)$ et $\psi(g)$.

En connaissant le premier chiffre décimal (ou les deux chiffres) différent de zéro, de l'expression $1 - \frac{A}{t^n}$, on connaîtra approximativement la valeur du terme supprimé

$$\frac{n-1}{2n^2}\left(1 - \frac{A}{t^n}\right)^2 . \qquad (4)$$

Le nombre des zéros qui suivent la partie entière de la valeur numérique de ce terme est le nombre de chiffres communs à deux valeurs approchées, appartenant en même temps à la valeur exacte de la racine cherchée.

En effet les deux fonctions qui donnent les deux valeurs approchées l'une par défaut (la fonction φ) et l'autre par excès (la fonction ψ) ne diffèrent que par le produit de (4) et de t; les deux crochets ne diffèrent que par le terme (4). Donc les deux crochets auront les mêmes chiffres quand le terme (4) contient des zéros qui suivent la partie entière de la valeur numérique de ce terme.

La valeur exacte a aura des chiffres qui sont communs aux deux fonctions f et φ; donc on connaîtra le nombre de chiffres exacts qu'on peut obtenir de l'opération envisagée.

Les valeurs approchées peuvent être calculées avec autant de chiffres qu'on veut, mais il suffit de calculer un ou deux chiffres qui suivent les chiffres communs.

Premier exemple. Calculer $\sqrt{1000}$; on a ici $n = 2$, $A = 1000$.

Posons $t = 32 = h$ $(32^2 > 1000)$, on trouve $\varphi(h) = 31{,}625 = h_1$; choisissons un nombre plus petit que h_1, plus commode pour le calcul $h'_1 = 31{,}62 = g$ $(31{,}62^2 < 1000)$. Le terme (4) est ici $\frac{1}{8}0{,}00017^2 = 0{,}000000004$, la valeur exacte a aura huit chiffres communs aux deux valeurs approchées, on calculera ces valeurs

approchées avec neuf ou dix chiffres, on aura

$$\varphi(g) = 31{,}62277657 = g_1 \ , \qquad \psi(g) = 31{,}62277670 \ .$$

Choisissons un nombre plus grand que $g_1 = \varphi(g)$ et plus petit que $\psi(g)$ avec lequel il est plus commode à calculer φ, c'est $g_1' = 31{,}6227766$ $(g_1' < 1000)$; le terme (4) a ici la valeur à peu près $\frac{1}{20}21$, la valeur exacte a aura 20 ou 21 chiffres exacts, communs aux deux valeurs approchées φ et ψ, que nous calculerons avec 21 ou 22 chiffres; on trouve ainsi (en calculant 22 chiffres)

$$\varphi(g_1') = 31{,}622\,776\,601\,683\,793\,3\,1998$$

$$\psi(g_1') = 31{,}622\,776\,601\,683\,793\,3\,2001$$

(on n'a ici que 18 chiffres de la valeur exacte, les deux valeurs diffèrent en quatre chiffres, mais la vraie différence n'est que 0,0003 du dernier chiffre commun).

Deuxième exemple. Calculer $\sqrt[5]{1000}$; on a ici $n = 5$, $A = 1000$. Posons $t = 4 = h$ $(4^5 > 1000)$; le terme (4) est 0,00004 et il faut calculer avec cinq ou six décimales: on trouve $\varphi(t) = 3{,}98108 = h_1$. Choisissons maintenant h_1' plus petit et plus commode pour le calcul, par exemple $h_1' = 3{,}98$. Posons $t = h_1' = 3{,}98 = g$, $(g^5 < 1000)$ la valeur du terme (4) étant 0,000 000 15, calculons avec huit chiffres, nous trouvons

$$\varphi(t) = 3{,}9810717 = g_1 \ , \qquad \psi(t) = 3{,}9810723 \ .$$

Nous avons trouvé six chiffres de la valeur exacte $a = 3{,}98107\ldots$ (On pourrait prendre aussi $g_1' = 3{,}981072$, etc.)

NOTE SUR LES PERMUTATIONS[1]

PAR

A. AUBRY (Dijon).

II. — Exercices.

1. — I. Les duades *ab*, *cd*, *ef* appartenant à une certaine permutation des sept premières lettres, la déterminent si on sait en outre que ces duades encadrent respectivement une, trois et cinq lettres. (Voir *E. M.*, 1917, p. 281.)

II. Les duades *ac*, *bd*, *ce*, *df* et *eg* déterminent une permutation des mêmes lettres, si on sait que la première, la troisième et la cinquième encadrent chacune une lettre.

III. Les duades *dg*, *ad*, *bf*, *ae*, *cg* déterminent une permutation des mêmes lettres si les deux premières encadrent chacune deux lettres et les deux dernières, chacune trois.

2. — Quatre hommes A, B, C, D et leurs femmes *a*, *b*, *c*, *d* sont sur une même ligne ; chaque mari est à gauche de sa femme et de plus il y a une personne entre A et *a*, deux entre B et *b*, trois entre C et *c* et quatre entre D et *d*. Comment ces huit personnes sont-elles disposées ?

La combinaison de $C_{\cdot\cdot\cdot}c$ et de $D_{\cdot\cdot\cdot\cdot}d$ ne peut donner que l'une des formules

$$C_{\cdot}D_{\cdot}c_{\cdot\cdot}d\ , \qquad CD_{\cdot\cdot}c_{\cdot}d\ , \qquad D_{\cdot}C_{\cdot\cdot}dc\ , \qquad D_{\cdot\cdot}C_{\cdot}d_{\cdot}c_{\cdot}\ ;$$

combinant avec $B_{\cdot\cdot}b$, elles en donnent six, dont deux seulement permettent l'introduction de $A_{\cdot}a$: on a ainsi les deux solutions BCD*b*A*cad* et DAC*a*B*dcb*.

Pour cinq ménages, on n'a aucune solution.

3. — I. Déterminer les permutations des dix premières lettres telles que les duades *ab*, *ef*, *bc*, *fg*, *cd* encadrent un même nombre de lettres, ainsi que *af*, *ei*, *fj*, *id*.

---

[1] Voir *L'Enseign. Mathém.*, Tome XIX, p. 280-294, 1917.

Des deux formules $a_x b_z e_x f$ et $a_y f$ on tire $2x + z + 2 = y$, et des deux suivantes $a_x b_z e_y i_y d$ et $a_x b_x c_x d$, $x + z + 2y + 3 = 3x + 2$; d'où, en éliminant z, $y = x + \frac{x+1}{3}$.

La valeur $x = 0$ donne $y = 0$, solution illusoire.

Pour $x = 2$, on a $y = 3$; et pour $x = 5$, $y = 7$, résultat inacceptable.

La solution unique $x = 2$, $y = 3$ conduit à la permutation $aehbficgjd$.

II. Même question pour les douze premières lettres, les deux groupes de duades étant

$$cj\ ,\ ge\ ,\ kb\ ,\ al\ ,\ if\ ,\ hd \quad \text{et} \quad ke\ ,\ ib\ ,\ gj\ ,\ ad\ ,\ hf\ .$$

Soit $g_t e$, $h_t d$, $k_u e$, $a_u d$; une même permutation ne peut donner les chaînes kge et had, car il s'ensuivrait d'une part $t < u$ et d'autre part $t > u$. On a donc, ou bien

$$kge\ ,\ ikb\ ,\ gcj\ ,\ ahd\ ,\ hif\ , \quad \text{d'où} \quad a_v h_v i_v k_v g_v c_x j\ ,$$

ou

$$gke\ ,\ kib\ ,\ cgj\ ,\ had\ ,\ ihf\ , \quad \text{d'où} \quad c_y g_y k_y i_y h_y a_z d\ .$$

v et y ne peuvent être que 0 ou 1, sans quoi la permutation aurait plus de douze lettres. De là, après treize essais, les trois solutions,

$$ahikgcldfbej\ , \quad alhdifkbgecj\ , \quad cgkihajebfdl\ .$$

4. — De combien de manières peut-on disposer sur une ligne n animaux, dont un chien a et un chat b, de manière que le chat ne soit pas à côté du chien? Associant les deux éléments ab et ba aux $n - 2$ autres lettres, on aura les $2(n-2)!\,(n-1)$ permutations où a et b sont voisins. De la, la réponse.

5. — Permutations telles qu'aucune lettre ne soit à côté de sa voisine naturelle.

C'est impossible pour trois lettres. Pour quatre, on a $cadb$ et $bdac$. Pour cinq, on ajoutera e, à toutes les places possibles et on effectuera les permutations tournantes. D'où vingt-deux permutations. On continuera de même.

Ainsi on ne saurait placer sur une ligne deux choux, deux chèvres et deux loups, de manière qu'un loup (une chèvre) ne soit pas à côté d'une chèvre (d'un chou). Mais on peut placer deux choux, deux chèvres, deux loups et deux chasseurs, de façon qu'aucun chasseur (aucun loup, aucune chèvre) ne soit à côté d'un loup (d'une chèvre, d'un chou). On peut ajouter deux gendarmes, qu'on s'interdira de placer auprès des chasseurs, etc.

6. — I. Combien peut-on construire de tétraèdres avec six droites égales ou avec six triangles équilatéraux égaux? (Ferriot.)

II. Combien de cubes avec douze droites égales ou six carrés égaux? (Mac-Mahon.)

III. Mêmes questions avec des droites ou des carrés de deux couleurs, deux droites ou deux carrés de même couleur ne pouvant se toucher.

IV. De combien de manières peut-on exprimer le cube ABCD*dcba*?

V. Combien de trajets ininterrompus peut-on réaliser avec les douze arêtes et les quatre grandes diagonales d'un cube? Ou bien avec les arêtes et quatre des petites diagonales?

7. — Les permutations de n lettres fournissent ensemble $\frac{1}{2} C_{n,2} n!$ inversions. (Stern.)

8. — I. Une permutation de n lettres et ses tournantes d'ordre impair sont de mêmes ou de différentes classes selon que n est impair ou pair. Elle est toujours de même classe que ses tournantes d'ordre pair. Par exemple *bcdea* provient de *abcde* par le renversement des quatre duades *ab*, *ac*, *ad*, *ae* : elle est donc de la même classe que *abcde*.

II. Les permutations de n lettres *ab* ... *cd* et *dc* ... *ba* sont de la même classe si n est de l'une des formes 4, 4 + 1, et de classes différentes dans les autres cas, car les nombres d'inversions diffèrent de

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} .$$

III. Il en est de même pour les permutations de $2n$ lettres

$$ab \ldots d\mathrm{AB} \ldots \mathrm{D} \qquad \text{et} \qquad a\mathrm{A}b\mathrm{B} \ldots d\mathrm{D} .$$

IV. Les permutations de $2n$ lettres *ab* ... *d*AB ... D et AB ... D*ab* ... *d* sont ou ne sont pas de la même classe suivant que n est pair ou impair, car les n^2 duades *a*A, *a*B, ... *b*A, ... changent de sens.

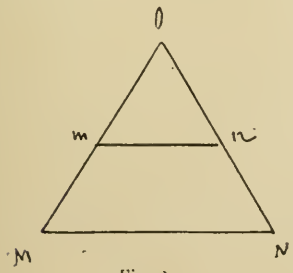


Fig. 1.

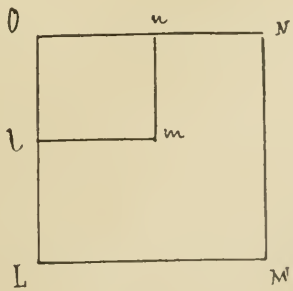


Fig. 2.

9. — Les habitants des maisons m, n (fig. 1) veulent changer de logement avec ceux des maisons M, N, en se servant de la mai-

son actuellement vacante O et d'après cette règle que chaque fois qu'une maison sera vide, elle sera réoccupée par l'un de ses voisins, jusqu'à exécution complète du programme.

1° Désignant par a, b, B, A, les habitants actuels des maisons m, n, N, M, le changement demandé s'opérera comme l'indique la formule

$$baABabABabBA\ , \qquad (\alpha)$$

laquelle veut dire que b commencera en allant en O, puis a en allant en n, puis A en m, etc.

L'étude de ces mouvements se fait facilement à l'aide de jetons ou de simples morceaux de carton portant les indications a, b, B, A.

2° On peut considérer la maison vide comme un jeton O, qu'on échange successivement avec ses voisins. Dans ce cas, la formule (α) indique que l'opération

$$(O, b)(O, a)(O, A)(O, B)(O, a)(O, b)(O, A)(O, B)(O, a)(O, b)(O, B)(O, A)$$

appliquée à la permutation OabBA, la transforme en OABba.

3° Toute autre disposition est possible, soit en faisant mouvoir les jetons sur le petit triangle puis sur le grand, soit inversement en opérant sur le grand et ensuite sur le petit. Les plus compliquées de ces opérations demandent 19 mouvements; la plus courte, 3 seulement.

4° Opérons de même avec les carrés Om, OM (fig. 2). On a à considérer la permutation abcCBA de six jetons placés aux points l, m, n, N, M, L. Tout mouvement se ramène à une combinaison de trajets sur les périmètres des deux carrés; celui des jetons du petit carré change abcCBA en cabCBA, et sur le grand carré en cbCBAa. Dans les deux cas, la parité du nombre des inversions ne change pas; donc si deux permutations sont de deux classes différentes, il est impossible de passer de l'une à l'autre: telles sont abcCBA et ABCcba.

Ainsi on ne peut échanger à la fois les jetons de mêmes lettres[1]; de même pour deux hexagones ayant un angle commun, pour deux octogones, etc.; tandis qu'on le peut pour les pentagones, ce qui demande 48 mouvements; pour les heptagones, ce qui en demande 96; etc.[2]

10. — Appelons *nœud* du n^e ordre une courbe unicursale à n points doubles, fermée ou non et figurant un fil passant, tantôt sur lui-même, tantôt au-dessous. Parcourant le fil dans un sens

---

[1] Mais on peut changer A avec B, c'est-à-dire transformer abcCBA en bacCAB; il faut 28 mouvements.

[2] Voir Ed. Lucas et Rouse-Ball, op. cit., plusieurs jeux basés sur des règles analogues.

déterminé, on notera chaque croisement, en le désignant par une lettre accentuée ou non, selon qu'en ce point le fil passe dessus ou dessous. Le nœud se notera par une permutation de n lettres accentuées et des mêmes lettres non accentuées : ainsi, pour trois croisements, on écrira par exemple $ab'c'a'bc$. Un cas très remarquable est celui où le fil passe alternativement sur et sous lui-même [1] : dans ce cas, le nœud est *indénouable*.

Le premier problème de cette théorie est de définir, si c'est possible, un nœud d'après une permutation donnée. Avec un ou deux croisements, on a les boucles dénouables aa', $ab'ba'$, $aa'bb'$; — avec trois croisements, le nœud simple $abcabc$, qui a pour *pseudo-axe* la *médiane* de ac (c'est-à-dire qu'il peut être dessiné symétriquement par rapport à la perpendiculaire au milieu de la distance ac) ; — avec quatre, 1° la permutation $abcdbadc$ donne le nœud double ayant le milieu de bd comme pseudo-centre, 2° deux de ses tournantes donnent deux autres nœuds ayant ab pour pseudo-axe ; — avec cinq, on a : 1° la permutation $abcdeabcde$, qui a pour pseudo-axes, ae et sa médiane, 2° la permutation $abcdeadcbe$ et deux de ses tournantes ayant pour pseudo-axes, bcd, dbc, eca ou ace (cinq formes différentes) ; — avec six, 1° la permutation $abcdefdabcfe$ (trois formes ayant bd pour pseudo-axes) et ses tournantes, 2° deux autres permutations données à l'exercice suivant. — On ne tient pas compte des courbes présentant des boucles, ce qui a lieu quand deux mêmes lettres se suivent immédiatement dans la permutation.

Voici quelques autres nœuds d'ordres plus élevés, obtenus graphiquement :

$abcdefgcbadgfe$ (axe, méd. de ade), $abcdeabfdghefcgh$ (axe, ce),

$abcdefbgdhfagche$ (axe, ef), $abcdefgabgbijhfcdeij$ (axe, df).

11. — I. Peut-on concevoir un canal passant alternativement sur et sous lui-même à l'aide de ponts de mêmes hauteurs, c'est-à-dire tels qu'il y ait même différence de niveau entre l'eau supérieure et l'eau inférieure ? Soient les lettres a, b, c ... l, en nombre impair; on a la solution unique abc ... $labc$ ... l. il n'y a pas de solution pour un nombre pair de lettres.

II. Peut-on imaginer un chemin de fer qui se croise six fois lui-même, successivement par-dessus, par-dessous et à niveau ? On a le tracé $abcdefbafedc$ (qui peut prendre quatre formes différentes, avec comme axes, ab, $dcfe$, $cfed$ ou $cdef$) et ses tournantes.

---

[1] La possibilité d'une telle alternance est démontrée *S. Œ.* (suppl. de juin 1913) et étendue aux courbes multicursales.

Les conditions que doit présenter une permutation pour qu'elle figure un nœud, pour que celui-ci soit susceptible de symétrie, qu'il soit entièrement dénouable (tel que $ab'c'a'bc$), etc., posent des questions d'analysis situs sur lesquelles on pourra revenir.

III. Tracer une route se croisant six fois elle-même en deux hameaux, deux villages et deux villes, de manière à rencontrer deux fois de suite un hameau, un village et une ville. On a le tracé *abcabdefdefc* (qui peut prendre six formes, susceptibles de symétrie par rapport à *ae* ou la médiane de *ae*) et ses tournantes[1].

12. — Numérotons, sur un *quadrillage* indéfini, les horizontales 1, 2, 3, ... et les verticales 1′, 2′, 3′, ... Considérons la formule symétrique

$$62'34'51'73'65'56'37'15'43'26' .$$

qu'on interprétera ainsi : suivre l'horizontale 6 jusqu'à la verticale 2′, qu'on descendra jusqu'à l'horizontale 3, laquelle on suivra jusqu'à 4′, et ainsi de suite. On arrivera à un *angle d'encadrement*, qu'on peut représenter simplement par la formule

$$6234517365 .$$

En voici d'autres plus ou moins heureux :

365124 , 6531724 , 624367154 , 54824371632 , 63825487143

537245876132 , 437258761321678 .

On peut ainsi figurer de nombreux motifs de grecques et autres ornements d'architecture, fermés ou non, unicursaux ou non.

13. — I. Généraliser le problème du n° **6**, et résoudre le problème inverse.

II. Quatre hommes, A, B, C, D, leurs femmes a, b, c, d, et leurs enfants α, β, γ, δ sont placés dans cet ordre sur une ligne. Comment arriver, par un minimum d'échanges, à ce que chaque enfant soit entre ses deux parents ?

14. — I. L'opération (a, b) change la duade ab en ba. Elle ne change rien aux duades ac et bc, mais change le sens des duades ac et cb.

II. L'opération $(a, c)(b, d)$ ne change rien aux duades ab, cd ou ad, cb et change le sens des duades ab, dc ou ad, bc.

III. L'opération $(a, b)(a, c)(b, c)$ effectuée dans l'ordre indiqué, laisse b inchangé ; de même $(a, b)(a, c)(a, d)(a, e)(b, c)(b, d)(b, e)(c, d)(c, e)(d, e)$ laisse c inchangé ; etc. (Voir exercice **37**.)

IV. Quel que soit l'ordre dans lequel on applique à une permutation les deux opérations $(a, b)(c, d)$ et $(a, c)(b, d)$, le résultat est le même que si on lui appliquait $(a, d)(b, c)$.

15. — I. Une certaine permutation des six premières lettres pré-

[1] Autre question du même genre. Selon que le nombre des faces d'un prisme est pair ou impair, on peut ou on ne peut marquer les arêtes, des lettres a, b, c, de manière que deux arêtes de même lettre ne se touchent pas et qu'on puisse tracer sur la surface une ligne unicursale rencontrant les arêtes dans l'ordre a, b, c, a, b, c ...

sente les duades be, ef et, après avoir effectué l'échange (b, f), les duades bd, fc. Quelle est-elle ?

On a, dans la transformée, les duades fe, eb, bd, fc, d'où, sauf a, les quatre formes

$$fcebd\ , \qquad fecbd\ , \qquad febcd\ , \qquad febdc\ ,$$

et mettant a à toutes les places, 24 formules possibles.

II. Une permutation contient les duades ab, ae, cd, cf; on y fait les échanges $(a, d)(b, c)(e, f)$, après quoi on a la nouvelle duade ef. Quelle est cette permutation ?

La transformée est définie par les duades ae, ba, dc, df, ef, ce qui ramène au problème du n° **1**, 7°. (*E. M.*, 1917, p. 281.)

16. — I. Une permutation de quatre lettres peut subir, de 96 manières différentes, les six échanges de toutes ses lettres, sans que finalement elle se trouve modifiée. Ainsi on a :

$$(\mathrm{A}, b)(\mathrm{B}, a)(\mathrm{A}, \mathrm{B})(a, b)(b, \mathrm{B})(a, \mathrm{A}) = 1\ .$$

Cette solution peut se figurer par un quadrille dont chaque personnage change de place avec tous les autres et seulement une fois, en ramenant la situation primitive :

Aa	bB	aA	Aa
bB	Aa	Bb	bB

II. Soient n entiers 1, 2, ... n, disposés en cercle, et k premier avec n.

1° Echangeons 1 et $k + 1$, puis 1 et $2k + 1$, puis 1 et $3k + 1$, et ainsi de suite. Après n opérations, on retrouvera la disposition primitive, sauf que chaque lettre aura tourné de k rangs.

2° On trouve le même résultat en échangeant les nombres 1 et $k + 1$, puis celui-ci et $2k + 1$, ensuite ce dernier et $3k + 1$, et ainsi de suite.

3° Si on échange les nombres occupant actuellement les points 1 et $k + 1$, puis ceux des points 2 et $k + 2$, puis ceux des points 3 et $k + 3$, et ainsi de suite, on obtiendra encore le même résultat, mais après $k(n - k)$ opérations.

17. — I. Un ouvrage en n volumes est rangé dans un certain ordre. Le ranger dans l'ordre naturel, avec le moins de déplacements possible.

II. Le même ouvrage est rangé de droite à gauche. Le ranger de gauche à droite, en déplaçant deux volumes à la fois.

18. — On a une pile de cahiers numérotés de 1 à n et dont le n° a renvoie au n° b, celui-ci au n° c, celui-ci au n° d, etc., les lettres a, b, c, d, ... désignant les nombres 1, 2, 3, ... n, dans un certain

ordre. On tire, pour le consulter, le cahier n° h qu'on replace sur la pile, puis celui auquel il se réfère et qu'on replace de même sur la pile, et ainsi de suite. Finalement les cahiers sont placés, en partant du bas, et quel que soit leur ordre primitif, dans l'ordre indiqué par la tournante de abc ... commençant par h.

19. — Un quartier de la ville que j'habite possède deux pharmaciens, un autre trois, un autre quatre, un autre cinq et enfin un dernier six. Ils s'entendent entre eux pour fermer certaines pharmacies le dimanche, de manière qu'il en reste toujours au moins une d'ouverte dans chaque quartier et que chacun d'eux ait eu, après un certain temps, le même nombre de repos hebdomadaires. Comment se fera le roulement ?

Il faudra 120 dimanches et on aura :

1er quartier	60 fois	1, 2 ;	
2e »	20 »	12, 23, 31, 1, 2, 3 ;	
3e »	15 »	123, 234, 341, 412, 1, 2, 3, 4 ;	
4e »	12 »	1234, 2345, . . 5123, 1, 2, 3, 4, 5 ;[1]	
5e »	10 »	12345, 23456, ... 61234, 1, 2, 3, 4, 5, 6 .	

20. — A l'aide de déplacements de ses termes par-dessus deux autres, on peut toujours ou on ne peut jamais ramener une permutation donnée à la permutation naturelle, selon qu'elle est de la première ou de la seconde classe. Ed. Lucas a énoncé ce théorème sans démonstration.

1° Si les trois termes successifs f, g, h sont changés en h, f, g, la duade fg ne change pas, mais les deux autres fh et gh deviennent hf et hg. Ainsi si h est le plus petit des trois, il y a deux inversions de moins.

Si les quatre termes f, g, h, i sont changés en i, g, f, h, les deux duades fh, gh ne sont pas changées, mais les autres fg, fi, gi, hi deviennent gf, if, ig, ih ; de sorte que si i est le plus petit terme, il y a quatre ou deux inversions de moins, selon que $f \gtrless g$.

2° Si 1 est à un rang impair, par déplacements successifs, on l'amènera à sa place ; s'il est à un rang pair, on l'amènera à la deuxième place et on déplacera de deux rangs à droite le nombre qui occupe la première place.

Si 2 est à un rang pair, on l'amènera à sa place ; s'il est à un rang impair, on l'amènera à la troisième place et on déplacera de deux rangs à droite le nombre qui occupe la deuxième place.

Et ainsi de suite.

3° Le nombre des inversions diminuant, sans changer de parité, si primitivement il était pair, il finira par s'annuler, c'est-à-dire

[1] On a aussi pour ce quartier, la solution

123, 234, ... 512, 12, 23, 34, 45, 51 .

qu'on aura la permutation naturelle ; s'il était d'abord impair, il arrivera à la valeur 1 et on aura la permutation $123 \ldots (n-2)\, n\, (n-1)$, qui est irréductible à $123 \ldots n$.

Par exemple, on peut assurer que 7365124 ne peut, par le moyen indiqué, se transformer en 1234567.

21. — Deux permutations réciproques (n° 5, VII) sont de même classe (Netto). Conséquence de ce que l'introduction du nombre $n+1$ entre le k^e et le $(k+1)^e$ termes d'une permutation des n premiers entiers la change ou ne la change pas de classe selon que $(n-k)$ est pair ou impair.

22. — I. Dans une permutation de $2n-1$ lettres, on intercale les $n-2$ premières entre les $(n-1)$ dernières. Les transformées successives commencent par la n^e lettre, la $(n^2)^e$, la $(n^3)^e$, ... ; le nombre k des transformées est ainsi donné par la relation $n^k \equiv 1$ (mod $2n-1$).

Les cycles de la substitution conduisant d'une transformée à l'autre sont de la forme $(a, an, an^2, an^3, \ldots)$.

II. Le f^e terme d'une permutation étant h, on remplace le chiffre h par le chiffre f. La 1re transformée commence par le 2e chiffre, la 2e par le 4e, la 3e par le 8e, ... de sorte que le nombre k des transformées est donné par la relation $2^k \equiv 1$.

Les cycles de la substitution sont de la forme $(a, b, c, d, \ldots)$, b désignant la a^e lettre, c la b^e, d la c^e, ...

III. Les cycles de la substitution permettant de passer d'une permutation à sa réciproque, sont de la forme $(a, b, c, d, \ldots)$, a désignant la h^e lettre et h la b^e, b la k^e et k la c^e, ...

Les permutations qui sont leurs propres réciproques, — c'est-à-dire celles qui restent inchangées par la transformation d'Euler, — se trouvent en appliquant à la permutation naturelle des échanges différents et contenant toutes les lettres : telle est la permutation 47618325, obtenue en appliquant à 12345678 la substitution $(1, 4)(2, 7)(3, 6)(5, 8)$.

23. — I. Considérons la permutation P formée par les restes de la division des $p-1$ premiers multiples de a par le nombre premier p ; a est résidu ou non résidu de p selon que P est de première ou de seconde classe (Zolotaref). Conséquence de l'exercice **8** I et de ce qui suit.

Soit g une racine primitive de p et posons $g^h \equiv a$, $g^k \equiv n$: substituer la permutation $Q' = g^h, g^{h+1}, g^{h+2}, \ldots$ à $P' = 1, g, g^2, \ldots$ revient à substituer $P = a, 2a, 3a, \ldots$ à $Q = 1, 2, 3, \ldots$, car, dans les deux cas, on remplace, par exemple, n par an ; or Q' est la h^e tournante de P' et d'autre part, si $h = 2j$, on a $(g^j)^2 \equiv a$.

II. On remarquera que les cycles de la substitution $\begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ sont de la forme $(k, ka, ka^2, \ldots)$; si a est une racine primitive, la substitution est $(1, a, a^2, \ldots a^{p-1})$.

III. Soient Q la permutation 1, 2, 3, ... $p-1$ et P celle des valeurs (mod p) des puissances de la racine primitive g; si $g^k \equiv h$, on a : $\left(\frac{P}{Q}\right)^k = (1, h, h^2, \ldots)$. Le cycle du deuxième membre contient $(p-1)$ termes, si h est elle-même une racine primitive.

De même, a désignant une racine non primitive fournissant une période de f termes, si on considère la substitution $S = (1, a, a^2, \ldots a^f)$ et qu'on pose $a^l \equiv b$, la substitution $S^l = (1, b, b, \ldots b^f)$ aura également f termes.

Ainsi soient $p = 11$, $g = 2$, $k = 6$; il viendra P = 1, 2, 4, 8, 5, 10, 9, 7, 3, 6; et pour $k = 4$, P = 1, 4, 5, 9, 3, 1, 4, 5, 9, 3.

Soit $a = 3$, la période de S est 1, 3, 9, 5, 4 et on a, pour celles de S^2, S^3, S^4,

1, 9, 4, 3, 5, 1, 5, 3, 4, 9, 1, 4, 5, 9, 3.

24. — On place douze jetons numérotés de 1 à 12 sur les numéros du tableau ci-contre. On relève ces jetons *colonne par colonne*,

1	2	3
4	5	6
7	8	9
10	11	12

dans l'ordre 1, 4, 7, 10, 2, 5, ... et on recommence de même, en plaçant les jetons *par rangées* et les relevant par colonnes. Après cinq opérations de ce genre, on retrouve la disposition primitive. Voici du reste les transformations :

1	4	7	1	10	8	1	6	11	1	5	9	1	2	3
10	2	5	6	4	2	5	10	4	2	6	10	4	5	6
8	11	3	11	9	7	9	3	8	3	7	11	7	8	9
6	9	12	5	3	12	2	7	12	4	8	12	10	11	12

Les jetons extrêmes ne changent pas de place; les autres se déplacent suivant l'un des cycles (2, 5, 6, 10, 4) ou (3, 9, 11, 8, 7) : le jeton 3 par exemple, couvre successivement les n°s 3, 9, 11, 8, 7, 3, ... du tableau ; inversement, le n° 3 du tableau est successivement recouvert par les jetons 3, 7, 8, 11, 9, 3, ...

Agissant de même sur le tableau disposé comme ci-contre, on trouvera également une période de cinq permutations dont les

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12

cycles sont inverses des précédents.

Ces résultats se vérifient ainsi en général : soit $ab - 1 = p$ et t le *gaussien* de a, c'est-à-dire la plus petite valeur de x qui donne $a^x \equiv 1$; t est aussi le gaussien de b, puisque $ab \equiv 1$. Après k opérations, le jeton placé d'abord sur le n° n du tableau, recouvrira le n° déterminé par la formule $1 + (n - 1)a^k$; si $k = t$, ce n° est égal à n : donc la période des transformées en contient t.

Réciproquement, le jeton N recouvrant après k opérations le n° n, sera déterminé par la formule

$$n \equiv 1 + (N - 1)a^k , \qquad \text{d'où} \qquad Na^k \equiv (n - 1) + a^k ,$$

et, en multipliant par a^{t-k} et se rappelant que $a^t \equiv 1$,

$$n \equiv 1 + (N - 1)a^{t-k} .$$

Substituer le deuxième tableau revient donc à échanger a et b ; les deux formules deviennent ainsi :

$$1 + (n - 1)b^k \equiv 1 + (n - 1)a^{t-k} , \qquad n = 1 + (N - 1)a^k .$$

Pour $a = 4$, $b = 3$, $p = 11$, les numéros recouverts par les jetons placés d'abord sur 5, par exemple, seront les valeurs de $1 + 4 . 4^k$ pour $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, c'est-à-dire 5, 6, 10, 4, 2, 5.

De même, pour les tableaux

3×2	4×2	5×2	6×2	4×3	5×3	6×3	5×4	6×4	6×5

il faudra

4	3	6	10	5	6	16	9	11	14

opérations.

Le cas de $a = b = 4$ rappelle un tour de cartes connu.

25. — Aux exemples de Cauchy donnés au n° **9**, ajouter les puissances des substitutions circulaires des 7, 8, 9 et 10 premières lettres.

26. — I. On a, en partant de la permutation quelconque *abcde* et lui appliquant successivement les trois substitutions indiquées au premier membre :

$$(a, b, c).(a, c, b, d).(a, c)(b, d) = \begin{pmatrix} abcde \\ bcade \end{pmatrix} \begin{pmatrix} bcade \\ dbcae \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dbcae \\ bdace \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} abcde \\ bdace \end{pmatrix} = (a, b, d, c) .$$

De là, un autre moyen de trouver le produit de plusieurs substitutions.

II. On a les relations suivantes, de Cauchy :

$$(a, b)(b, c)(c, d) \ldots (k, l) = (l, k \ldots c, b, a)$$

$$(a, b)(a, c)(a, d) \ldots (a, l) = (a, b, c \ldots l),$$

permettant de transformer un cycle de n lettres en substitutions de $n-1$ échanges, et qui appliquées à la permutation $\ldots abc \ldots kl \ldots$ ont pour effet de déplacer (n° 7) l immédiatement avant a, ou a immédiatement après l.

III. L'inverse du produit RTU ... V est $V^{-1} \ldots U^{-1}T^{-1}R^{-1}$ (Cauchy).

27. — I. Effectuer les produits $(a, b, c).(a, c, b)$, etc. ; $(a, b).(a, b, c).(a, b, c, d)$, etc. ; $(a, b, c).(b, c, d)$, etc.

II. Faire le produit de (a, b, c, d, e) par chacun des cycles

$$(b, c, d), \quad (b, c, d, e, f), \quad (b, d), \quad (a, c, e), \quad (a, c, e, b, d),$$

et de (a, b, c, d, e, f) par chacun de ceux-ci

$$(b, c, d, e, f, g), \quad (a, c, e), \quad (b, d, f), \quad (a, c, e, b, d, f).$$

Donner les formules générales.

28. — 1° Il y a toujours une substitution X qui, multipliée par la substitution donnée R, en reproduit une autre, donnée également, S. Ce *quotient* est $X = SR^{-1}$.

2° On peut aussi trouver aisément la ou les substitutions qui, appliquées à S, produisent une substitution semblable donnée T, ainsi que la ou les *racines* $n^{\text{èmes}}$ d'une substitution donnée. Par exemple, les 4! substitutions qui, appliquées à $(a, b)(c, d, e)(f, g, h, i)$, donnent $(a, b, c, d)(e, f, g)(h, i)$; ainsi que les $(n-1)!\,k^{n-1}$ racines $n^{\text{èmes}}$ de la substitution formée de n cycles de k lettres chacun.

De là, la solution de nombreuses *équations*, telles que

$$XRX = S \; ; \qquad RXS = SXR \; ; \qquad RSX = XRS \; ;$$

$$RX = SY, \; RS = YX \; ; \quad RX = SY, \; RY = XS \; ; \quad RX = SY, \; XR = YS \; ;$$

2° Au reste, certaines équations n'ont que des solutions *imaginaires*. Par exemple, pour $R = (a, b, c, d)$, ni $X^2 = R$, ni par suite (pour $X = RY$, $YRY = 1$, n'ont aucune solution ; tandis que $XRX = R$ en a une et $RXR = X$, quatre. — Plus généralement, soient $S^a = 1$, $T^b = 1$; si X est une racine de $SXT = X$, ou de $SX = XT$, il y en a au moins ab, lesquelles sont de la forme $S^f X T^g$.

29. — I. Si l'application de R à T donne le même résultat que celle de S à T, le produit SR^{-1} est échangeable avec T.

II. Si R appliquée à S donne T, R^{-1} appliquée à T donne S.

III. Si R appliquée à S et T donne S′ et T′, appliquée à (ST), elle donne (S′T′).

30. — Soient deux substitutions circulaires R, S, d'un même nombre de lettres. Pour k quelconque, le k^e terme de R étant f, le k^e terme de S étant g, et celui qui suit g dans R, le même que celui qui suit f dans S; l'application de R à S donne le même résultat que celle de S à R. Exemple : $R = (a, b, c, d, e, f)$, $S = (c, f, e, b, a, d)$.

Si la lettre suivant g dans R est la même que celle précédant f dans S, on a : $RSR = SRS$. Donner des exemples.

31. — Le produit des substitutions (a, b) et S a un cycle de plus ou de moins que S selon que a et b appartiennent ou non à des cycles différents de S. Ainsi les produits de $(a, b, c)(d, e, f, g)$ par (a, d) et par (e, f) sont respectivement (a, b, c, d, e, f, g) et $(a, b, c)(d, f, g)(e)$.

Il suit de là que deux permutations sont ou ne sont pas de la même classe selon que la substitution qui les lie contient un nombre pair ou un nombre impair de cycles ayant un nombre pair de lettres. Cela tient à ce que les substitutions

$$(a, b, \ldots c, d, e, \ldots h) \quad \text{et} \quad (a, b, \ldots c)(d, e, \ldots h)$$

appliquées à la permutation $ab \ldots cde \ldots h$, en fournissent deux autres qui n'en diffèrent que par l'échange de a et de d. C'est aussi une conséquence de **26**, II.

Ce théorème, dû à Cauchy, permet de déterminer la classe d'une permutation, bien plus aisément que par le dénombrement des inversions.

32. — Vérifier analytiquement l'assertion de l'exercice **9**, 2°. Le produit des échanges indiqués est en effet égal à $(b, B)(a, A)$.

De même, la formule analogue à (α) et fournissant l'échange de A et de B est

$$a\mathrm{AB}ba\mathrm{AB}ba\mathrm{B}ba\mathrm{BA}ba\mathrm{BA}b\ ;$$

il s'ensuit que la substitution $(O, a)(O, A)(O, B) \ldots (O, b)$ appliquée à la permutation $(OabBA)$, la transforme en $OabAB$, et en effet le produit de ces 19 échanges est (A, B).

La disposition primitive $OabBAa$ devient $ObBAa$ en exécutant les opérations représentées par la formule $b\mathrm{BA}ab$; la substitution

$$(O, b)(O, B)(O, A)(O, a)(O, b) = (b, B, A, a)$$

change donc la permutation $OabBA$ en $ObBAa$. On voit comment on pourrait résoudre graphiquement certaines questions de substitution.

33. — Un objet susceptible d'une définition précise $F(a, b, c, \ldots l)$ subit une opération qui change sa définition en $\varphi(b, l, c, \ldots a)$.

Pour que les lettres de la nouvelle définition soient dans l'ordre naturel, on modifiera celles de la première suivant la substitution $\begin{pmatrix} abc \ldots l \\ blc \ldots a \end{pmatrix}$.

Appliquer cette remarque au problème suivant. Un carré est divisé en 4^n carrés égaux par des parallèles aux côtés; inscrire dans chacun de ces carrés un numéro tel que, repliant le grand carré n fois dans un sens et n fois dans l'autre, on obtienne une brochure qui, coupée, présente ses 4^n pages exactement numérotées.

34. — Un cube étant désigné par la formule ABCD$dabc$, où ABCD est la face supérieure, et DCcd la face antérieure; si on lui fait faire une rotation de 90° autour de l'une des arêtes bc, ba, ad, dc, il faudra faire subir à cette formule l'une des substitutions

$$\left.\begin{array}{ll} (A, a, b, B)(C, D, d, c), & (A, D, d, a)(B, C, c, b), \\ (A, B, b, a)(C, c, d, D), & (A, a, d, D)(B, b, c, C). \end{array}\right\} \quad (\alpha)$$

Si on fait tourner le cube de 90°, de 180° ou de 270° autour de Aa, les substitutions seront

$$\left.\begin{array}{ll} (A, B, C, D)(a, b, c, d), & (A, C)(a, c)(B, D)(b, d), \\ & (A, D, C, B)(a, d, c, b). \end{array}\right\} \quad (\beta)$$

La première substitution (α) répétée donne

$$(A, a, b, B)^2(C, D, d, c)^2 = (A, b)(B, a)(C, d)(D, c),$$

ce qui représente par conséquent la position du cube ayant tourné de 180° autour de bc, c'est-à-dire le cube badCBAD: répétée encore deux fois, elle devient $= 1$, ce qui est évident, puisque le cube a tourné de 360° autour de bc.

Le produit des deux premières substitutions (α) est $(a, B, D)(b, C, d)$ et représente la substitution qui aurait pour effet de faire tourner le cube, d'abord de 90° autour de bc, puis de 90° autour de Aa.

On peut ainsi définir sans figures divers mouvements de la droite et du cube, ainsi que du tétraèdre.

35. — 1° Soient les n égalités $RT = R'T' = \ldots = R'''T''' = S$, R et T étant échangeables, ainsi que R′ et T′, ...; on a:

$$RR' \ldots R'''ST''' \ldots T'T = S^{n+1}. \quad (\alpha)$$

2° Soient les deux substitutions échangeables

$$R = (A, D)(B, C)(a, b)(c, d), \qquad T = (A, B)(C, D)(a, d)(b, c);$$

posons

$$RT = (A, C)(B, D)(a, c)(b, d) = S;$$

une relation entre différentes substitutions étant indépendante des lettres qui la composent, cette relation a encore lieu si celles-ci subissent une substitution quelconque. Par suite, appliquons A, b, C, d à R, T et S ; il vient $R'T' = S$, en écrivant

$$R' = (A, c)(B, d)(C, a)(D, b), \qquad T' = (A, a)(B, b)(C, c)(D, d).$$

De même, si on applique à R' et T' la substitution $(A, B)(C, D)$, il viendra $R''T'' = S$, en écrivant

$$R'' = (A, d)(B, c)(C, b)(D, a), \qquad T'' = (A, b)(B, a)(C, d)(D, c).$$

On a ainsi d'après 1° :

$$RR'R''ST''T'T = S^4 = 1 ; \qquad (\beta)$$

donc *on peut, de plusieurs manières, transformer une permutation de huit lettres, par échanges successifs, de manière que chacune d'elles change de place une seule fois avec toutes les autres et que finalement on retrouve la disposition primitive.* Comme à l'exercice **16**, I, on figurera cette solution par un quadrille comme ci-

$$\begin{array}{cc} A & B \\ a & b \\ d & c \\ D & C \end{array}$$

contre : les sept groupes de mouvements simultanés β sont symétriques.

3° Le théorème a lieu pour $4n$ lettres $abcdefgh\ldots$ On pose, par exemple :

$$R = (a, c)(b, d)(e, g)(f, h)\ldots \qquad T = (a, d)(b, c)(e, h)(f, g)\ldots$$
$$R' = (a, e)(b, f)(g, c)(h, d)\ldots \qquad T' = (a, f)(b, e)(g, d)(h, c)\ldots$$
$$R'' = (a, g)(b, h)(e, c)(f, d)\ldots \qquad T'' = (a, h)(b, g)(e, d)(f, c)\ldots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$S = (a, b)(c, d)(e, f)(g, h)\ldots$$

d'où [1]

$$RR'\ldots S\ldots T'T = 1.$$

4° Ce théorème a encore lieu pour une $(4n+1)^e$ lettre j, ce qu'on voit en remplaçant n des échanges n'ayant pas de lettres communes, $(a, b), (c, d), \ldots$ par $(a, j)(a, b)(b, j), (c, j)(c, d)(d, j), \ldots$

[1] $RT = S$, $R'T' = S$, ... puisque par exemple $(a, c)(b, d).(a, d)(b, c) = (a, b)(c, d)$.

En remplaçant de même (a, b), ... par les substitutions équivalentes

$$(a, j)(a, k)(a, l)(a, m)(a, b)(b, m)(b, l)(b, k)(b, j), \ldots$$

et ajoutant la substitution $(j, k)(l, m)(j, l)(k, m)(j, m)(k, l)$, on passera d'une formule de $4n$ lettres à une de $(4n+4)$ lettres, ce qui donne une nouvelle démonstration du théorème 3°.

5° Mais il n'a pas lieu pour $(4n+2)$ ou $(4n+3)$ lettres, car alors la permutation aurait à subir un nombre impair d'échanges, ce qui ne peut donner qu'une permutation de classe différente.

6° On remarquera que (β) peut se remplacer par la relation

$$S(RT)(R'T')(R''T'') = S^4 = 1,$$

et que toute substitution-unité formée d'échanges seulement, peut être écrite en commençant par l'un quelconque des échanges. De là, de nouvelles solutions du problème de 2°, qu'on multipliera encore en remarquant que si l'une d'elles est désignée par $\varphi(A, B, \ldots)$, $\varphi(A, b, \ldots)$, par exemple, en est une également.

36. — I. Soient deux groupes, d'un même nombre de lettres, A, B, C, ... $a, b, c, \ldots$ et soit $efg \ldots$ une des tournantes de celui-ci. Posons

$$R = (A, a)(B, b) \ldots, \qquad R' = (A, b)(B, c) \ldots, \ldots$$

$$T = (A, e)(B, f) \ldots, \qquad T' = (A, f)(B, g) \ldots, \ldots$$

La substitution $V = (a, b, c, \ldots)$, qui, appliquée à R et T les change en R′ et T′, change aussi (RT) en $(R'T')$; en outre, à cause de la symétrie de la construction de (RT), toutes les lettres s'y trouvent et les rangs des lettres, dans chacun des cycles de ce produit, sont en progression arithmétique de même raison, ce qui fait qu'ils ont même nombre de lettres : donc l'application de V à (RT) ne fait qu'y changer les cycles les uns dans les autres. Ainsi on a : $RT = R'T' = \ldots$

II. Soit un groupe de n hommes et n femmes; faire changer de place chaque homme avec chaque femme, une seule fois, de façon que la disposition primitive se retrouve. — Il y a n^2 échanges, donc n ne peut être impair. Soit $n = 2\nu$: avec les notations de I, si e désigne la ν^e femme, on aura

$$RR'R'' \ldots T''T'T = R^\nu T^\nu$$

ce qui donne une solution, si ν est pair.

III. De là, aisément, une troisième démonstration du théorème de l'exercice **35**, 3°.

37. — Le président d'une société, voulant assurer son maintien à la présidence, fait édicter un règlement d'après lequel chaque

sociétaire changera annuellement de place avec tous les autres. Comment s'y prendra-t-il pour être seul à garder sa place ?

Pour n impair quelconque, les solutions sont fournies par l'exercice **14**, III ; d'autre part, toute formule relative à $(2n-1)$ lettres $a, b, c, d \ldots g$ en donne une pour une lettre de plus h, en remplaçant $(n-1)$ échanges n'ayant pas de lettres communes, comme $(a, b), (c, d), \ldots$ par $(a, h)(a, b)(b, h), (c, h)(c, d)(d, h), \ldots$ et ajoutant à la fin (g, h).

38. — Dans un groupe de n hommes, n femmes et n enfants, peut-on permuter chaque enfant avec chacune des $2n$ grandes personnes et une fois seulement, de manière à retrouver la disposition primitive ?

Soit $n = 3$; remarquons que $(A, a, \alpha) = (\alpha, A)(\alpha, a)$, et posons

$$R = (A, a, \alpha)(B, b, \beta)(C, c, \gamma), \qquad S = (A, c, \beta)(B, a, \gamma)(C, b, \alpha),$$

$$T = (A, b, \gamma)(B, c, \alpha)(C, a, \beta) ;$$

on aura :

$$RT = S^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad SRT = RTS = TSR = 1 .$$

On s'inspirera de ce procédé pour les autres valeurs de n multiples de 3.

SUR LA RECTIFICATION APPROCHÉE D'UN ARC DE CERCLE

PAR

Ant. Pleskot (Pilsen).

Dans cette Note nous présentons une construction générale de la rectification approchée d'un arc de cercle : quelques constructions connues en forment un cas particulier.

Soit (fig. 1) un cercle K de centre O et de rayon r et AB l'axe correspondant à un angle au centre φ.

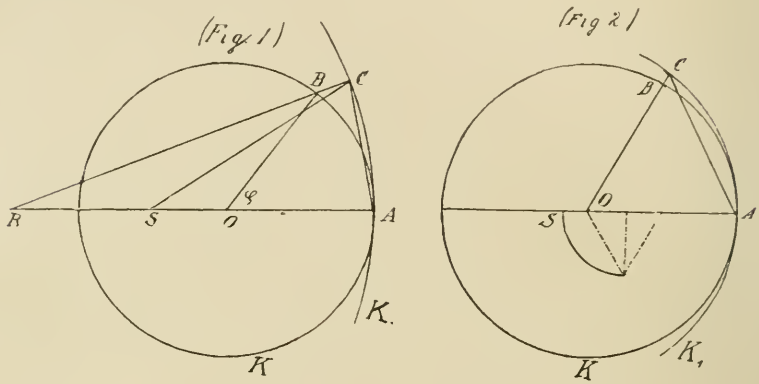
On décrit d'un point S pris sur la droite AO le cercle K_1, tangent au cercle K en A : soit a le rayon de ce cercle, c'est-à-dire

$$AS = a = \frac{r}{k}, \qquad (k \text{ constante}).$$

Sur la droite AO nous prenons encore le point R, dont la distance au point O est donnée par l'expression

$$\mathrm{OR} = d = \frac{12ar - 3r^2 - 8a^2}{3r^2 - 4a^2} \cdot r = \frac{12k - 3k^2 - 8}{3k^2 - 4} r \,. \qquad (1)$$

La droite RB coupe le cercle K_1 en C. *La longueur* AC *est approximativement égale à l'arc* AB.



Par le calcul un peu long, mais simple, on trouve

$$\mathrm{AC} = r\varphi + r\varphi^5(\alpha_0 + \alpha_1\varphi + \ldots) \;;$$

l'erreur $\Delta = r\varphi - \mathrm{AC}$ est proportionnelle au rayon et approximativement à la 5me puissance de l'angle φ.

Suivant le choix de k, nous obtenons différentes constructions. Elles seront simples pour $k < 1$.

Construction I. — Nous laissons le point R coïncider avec le centre O ; $d = 0$; la quantité k est donnée par l'équation (1) :

$$3k^2 - 12k + 8 = 0 \,,$$

d'où l'on tire

$$k = \frac{0 - 2\sqrt{3}}{3} \,, \qquad \text{et} \qquad a = \frac{r}{k} = \frac{r}{4}(3 + \sqrt{3}) \,.$$

La longueur a peut être facilement construite.

La rectification approchée est donc la suivante (fig. 2) : De S comme centre on décrit le cercle K_1 de rayon $\mathrm{AS} = \frac{r}{4}(3 + \sqrt{3})$. Le côté OB coupe le cercle K_1 en C et la longueur AC est approxi-

mativement égale à celle de l'arc AB. La longueur AC est donnée par les équations

$$AC = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} \sin \frac{\omega}{2}, \qquad \omega = \varphi - \varepsilon, \qquad \sin \varepsilon = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3} \sin \varphi .$$

De ces équations on peut calculer les erreurs d'approximation ; celles-ci sont inférieures à celles que l'on obtient par la construction de Cusanus.

Construction II. — Le résultat est encore meilleur si l'on prend R au point diamétralement opposé à A, c'est-à-dire si $d = r$.

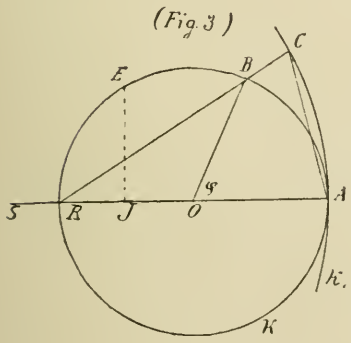
Pour la quantité k on a maintenant l'équation

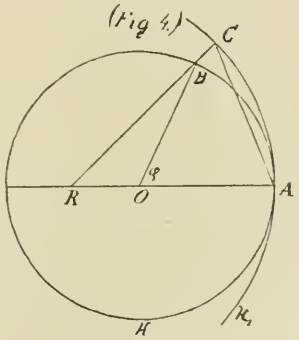
$$\frac{12k - 8 - 3k^2}{3k^2 - 4} = 1 ,$$

d'où l'on tire

$$k = \frac{3 - \sqrt{3}}{3}, \qquad a = \frac{r}{k} = \frac{3 + \sqrt{3}}{2} r .$$

La construction est la suivante (fig. 3) :





Si $OJ = \frac{r}{2}$, la perpendiculaire menée du point J à la droite OA coupe le cercle donné en E. On fait $JS = JE$; puis le cercle K_1 décrit du centre S avec un rayon SA, coupe la droite RB au point C et la longueur AC est très approximativement égale à l'arc AB. On peut se servir de cette construction pour les angles de 0 à 90°.

La longueur AC est donnée par les équations :

$$AC = (3 + \sqrt{3}) \sin \frac{\omega}{2}, \qquad \omega = \frac{\varphi}{2} - \varepsilon, \qquad \sin \varepsilon = \frac{2\sqrt{3} - 3}{3} \sin \frac{\varphi}{2} .$$

De ces équations on peut évaluer les erreurs Δ d'approxima-

tion: on trouve, pour $\varphi = 60°$, $\Delta = 0{\cdot}0003r$, pour $\varphi = 90°$, $\Delta = 0{\cdot}00021r$.

Cette construction résulte de la première si l'on rectifie après la première construction l'arc d'angle $\frac{\varphi}{2}$ et de rayon $2r$.

Construction III. — On obtient une construction très simple si l'on fait coïncider le point R avec le point S, c'est-à-dire, si l'on pose

$$r + d = a\ , \qquad \text{d'où} \qquad 1 + \frac{d}{r} = \frac{1}{k}\ ;$$

l'équation (1) devient

$$1 + \frac{12k - 8 - 3k^2}{3k^2 - 4} = \frac{1}{k}\ , \qquad \text{ou} \qquad (3k - 2)^2 = 0\ ,$$

d'où

$$k = \frac{2}{3}\ , \qquad \text{et} \qquad a = \frac{3}{2}r\ .$$

La construction est la suivante (fig. 4) : Prenons $OR = \frac{r}{2}$.

Du point R on décrit le cercle K_1 de rayon RA. La droite RB coupe ce cercle en C. La longueur AC est approximativement égale à l'arc AB, Elle est donnée par les équations

$$AC = 3r \sin\frac{\varphi}{2}\ , \qquad \sin\omega = \frac{2\sin\varphi}{\sqrt{5 + 4\cos\varphi}}\ .$$

La valeur approchée est identique à celle qu'on obtient par la construction donnée par M. d'Ocagne.

Enfin nous posons $k = 0$; d'où $a = \infty$ et $d = 2r$; le cercle K_1 est remplacé par la tangente au cercle K et nous trouvons la construction de Cusanus.

Les constructions ci-dessus permettent aussi de résoudre le problème inverse : porter sur une circonférence, à partir d'un point donné, un arc de longueur donnée.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'un problème de Lagrange sur la construction des cartes géographiques.

Lagrange a posé dans le Tome IV de ses Œuvres complètes le problème suivant, qu'il a rencontré à propos de la construction des cartes géographiques :

Etant donné trois points R, R′, R″, déterminer deux points A et B tels que les rapports $\frac{RA}{RB}$, $\frac{R'A}{R'B}$, $\frac{R''A}{R''B}$ soient entre eux dans des rapports donnés, et que les différences des angles ARB, AR′B, AR″B soient également données.

Dans l'*Enseignement Mathématique* du 15 janvier 1914, nous avons donné un procédé approximatif pour résoudre ce problème, qui avait l'avantage d'indiquer une méthode assez générale pour trouver la solution de différents problèmes de géométrie plane, et qui consistait en principe à remplacer le problème proposé par un problème de géométrie dans l'espace plus simple.

Au contraire, la solution suivante est rigoureuse et non approximative. Comme nous l'avons déjà fait remarquer dans la première solution, il suffit de construire une figure semblable à la proposée ; on peut donc se donner arbitrairement AB en grandeur et en position et chercher à construire le triangle RR′R″ à la condition qu'il soit semblable au triangle formé par les trois points donnés R, R′, R″. Le problème se présente alors sous la forme suivante :

Considérons le faisceau des cercles C qui passent par les points A et B ; si l'un d'eux est considéré comme lieu du point R, le lieu du point R′ sera un autre cercle tel que l'angle de ces deux cercles soit égal à la différence $\widehat{ARC} - \widehat{AR'B}$; de même le lieu de R″ sera un troisième cercle de ce faisceau. Considérons d'autre part le faisceau de cercles C′, orthogonal au premier, constitué par les cercles lieux des points dont le rapport des distances aux points A et B est constant, si l'un d'eux est considéré comme lieu du point R, le lieu du point R′ sera un autre cercle du faisceau et de

même pour R″, ces deux derniers cercles étant déterminés dès que le premier est donné.

Les intersections de ces trois couples de cercles deux à deux fournissent un triangle RR′R″, mais il faut que ce triangle RR′R″ soit semblable à un triangle donné. Comment s'arranger pour arriver à remplir cette dernière condition. Transformons la figure par inversion, le pôle d'inversion étant le point A et la puissance d'inversion étant $\overline{AB}^2$.

Le faisceau de cercles C va se transformer en un faisceau de droites C_1 passant par B. L'ensemble des trois cercles de ce faisceau dont nous avons parlé se transformera en un ensemble de trois droites C_1 passant par B et faisant entre elles des angles donnés.

D'autre part, le faisceau des cercles C′ va se transformer en un faisceau de cercles concentriques C'_1 ayant pour centre le point B.

Comme un calcul simple le montre aisément, le cercle lieu des points pour lesquels $\frac{RA}{RB} = \lambda$ se transformera en un cercle de rayon $\varrho = \frac{AB}{\lambda}$; ceci nous montre immédiatement que l'ensemble des trois cercles de ce faisceau se transforme en un ensemble de trois cercles concentriques dont les rapports des rayons sont donnés. Il en résulte immédiatement que le triangle $R_1R'_1R''_1$ dont les sommets sont les inverses des points R, R′, R″ et toujours semblable à lui-même, indépendamment de l'orientation du faisceau des droites C_1; nous pouvons donc nous donner arbitrairement l'ensemble de trois droites C_1, ainsi que l'ensemble de trois cercles C_2. Nous avons ainsi un certain triangle $r_1r'_1r''_1$ par l'intersection des droites et cercles correspondants de ces deux ensembles. Il faut maintenant déterminer le centre d'inversion a tel que l'inverse par rapport à ce centre du triangle $r_1r'_1r''_1$ soit semblable au triangle RR′R″.

Si les longueurs des côtés du triangle RR′R″ sont représentées par α, β, γ, il faut que l'on ait (d'après la formule qui donne la longueur du segment limité par les inverses de deux points donnés)

$$\frac{\dfrac{r_1r'_1}{ar_1 \cdot ar'_1}}{\alpha} = \frac{\dfrac{r'_1r''_1}{ar'_1 \cdot ar''_1}}{\beta} = \frac{\dfrac{r''_1r_1}{ar''_1 \cdot ar_1}}{\gamma}.$$

Ces égalités montrent immédiatement que les rapports

$$\frac{ar_1}{ar'_1}, \quad \frac{ar'_1}{ar''_1}, \quad \frac{ar''_1}{ar_1}$$

sont connus, et égaux à

$$\frac{\beta . r_1'' r_1}{\gamma . r_1' r_1''}, \quad \frac{\gamma . r_1 r_1'}{\alpha . r_1'' r_1}, \quad \frac{\alpha . r_1' r_1''}{\beta . r_1 r_1'}.$$

Donc le point a se détermine par l'intersection des cercles lieux des points dont le rapport des distances à r_1, r'_1, r''_1 est connu. Mais si l'on connaît un de ces points a, relatif à un certain ensemble de trois cercles C_2, tous les autres points a, relatifs à tous les ensembles de trois cercles C_2 seront sur la droite Ba par raison d'homothétie. Il suffit donc de porter sur cette droite un segment, égal à BA, pour obtenir le point A_1, ce qui détermine en définitive l'orientation du faisceau des trois droites C_1 par rapport à BA, c'est-à-dire justement la quantité que nous nous étions donnée arbitrairement.

Le problème est donc résolu.

L. Ballif (Lorient).

CHRONIQUE

Académie des Sciences de Paris.

Prix décernés.

Dans sa séance annuelle du 2 décembre 1918, après un éloquent discours du Président M. Paul Painlevé, l'Académie a décerné les prix proposés pour 1918. Nous avons déjà mentionné les prix attribués à Sir Joseph Larmor, à MM. Paul Montel, A. Belopolskij, Fr. Sy et au père Stanislas Chevalier. Parmi les prix concernant les sciences mathématiques, le palmarès publié dans les Comptes Rendus du 2 décembre 1918 contient en outre les noms suivants :

Mathématiques. *Prix fondé par l'Etat : Grand prix des sciences mathématiques* (3000 fr.). — L'Académie avait mis au concours l'étude de l'*itération* d'une substitution en rappelant que le point de vue *local* avait été seul considéré jusqu'alors et en invitant les concurrents à se placer au point de vue *général*. Trois Mémoires ont été déposés au secrétariat. Le prix a été attribué à M. Gaston Julia, ancien élève de l'Ecole normale supérieure, lieutenant d'infanterie, lauréat du prix Bordin en 1917. Une mention très honorable a été décernée à feu Samuel Lattès, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse.

Mécanique. *Prix Henri de Parville* (1500 fr.). — Le prix est attribué à M. Emile Belot, pour ses mérites scientifiques et industriels.

Fonds de recherches scientifiques. — *Fondation Gegner.* — Un prix de la valeur de 2000 fr. est décerné à feu Samuel Lattès, professeur à la Faculté des Sciences de Toulouse, pour ses travaux d'analyse mathématique.

Fondation Jérôme Ponti. — Un prix de la valeur de 2000 fr. est attribué à M. Paul Barbarin, professeur au Lycée Saint-Louis, pour ses travaux sur la géométrie non-euclidienne. — Un prix de la valeur de 1500 fr. est décerné à M. Louis Fabry, astronome adjoint à l'Observatoire de Marseille, pour ses travaux sur les éphémérides des petites planètes.

Fondation Henri Becquerel. — Un prix de la valeur de 2000 fr. est décerné à M. Camille Gutton, professeur à la Faculté des Sciences de Nancy, pour ses travaux de physique, notamment ceux qui ont trait à la défense nationale. — Un prix de la valeur de 2000 fr. est attribué à M. Pierre Fatou, astronome adjoint à l'Observatoire de Paris, pour ses travaux sur la théorie des séries et l'itération des fonctions rationnelles.

Questions mises au concours.

Grand prix des sciences mathématiques (3000 fr.). — Question posée pour 1920 : Perfectionner la théorie des fonctions d'une variable, qui sont susceptibles de représentations par des séries trigonométriques de plusieurs arguments fonctions linéaires de cette variable.

Prix Bordin (3000 fr.). — Question posée pour 1921 : Perfectionner les théories sur l'*analysis situs,* développée par Poincaré dans des mémoires célèbres. On cherchera à rattacher, au moins dans des cas particuliers étendus, les questions de géométrie de situation, concernant une multiplicité donnée, à l'étude d'expressions analytiques convenablement choisies.

Astronomie. *Prix Damoiseau.* Prix triennal (2000 fr.). — Question posée pour 1917 et reportée en 1920, aucun mémoire n'ayant été déposé : Calculer plus exactement, en tenant compte des résultats des expéditions récentes, l'attraction de la Lune sur le bourrelet formé à la surface de la Terre par les marées. Examiner l'effet de cette attraction sur la vitesse angulaire de rotation de la Terre.

Question proposée pour 1920 : Perfectionner en quelques points importants les travaux de Poincaré et de M. Liapounoff sur les figures d'équilibre relatif d'une masse fluide en rotation, soumise à l'attraction newtonienne. L'Académie appelle particulièrement l'attention sur la question de stabilité et l'étude des oscillations infiniment petites autour d'une figure stable.

Les *conditions générales des concours* sont reproduites dans les Comptes Rendus du 2 décembre 1918, p. 922.

Médailles de la Société Royale de Londres.

Dans sa séance du 30 novembre 1918, la Société Royale de Londres a décerné les Médailles suivantes :

Médaille Copley : M. le Prof. H. A. Lorentz, de l'Université de Leyde, pour ses belles recherches de Physique mathématique.

Médaille Rumford : MM. Ch. Fabry et A. Pérot, pour leurs contributions à l'avancement de l'Optique effectuées en collaboration.

Médaille Hughes : M. I. Langmuir, l'éminent physicien américain, pour ses travaux de Physique moléculaire.

Académie Royale de Belgique.

La classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique a suspendu, pendant l'occupation, ses réunions officielles et ses publications. Des membres des trois classes de l'Académie résidant à Bruxelles, Liége ou Gand, ont tenu des réunions privées dans ces trois villes. L'armée d'occupation a installé un lazaret dans les locaux de l'Académie de Bruxelles ; il en est résulté que des pièces faisant partie des collections de l'Académie ont disparu et que des manuscrits destinés à ses publications seront probablement perdus.

Etats-Unis. — Thèses de doctorat.

Pendant l'année universitaire 1917-1918, les universités américaines ont décerné les doctorats suivants dans le domaine des sciences mathématiques :

University of California (Berkeley). — Frank R. Morris : Classification of involutory cubic space transformations. — Mary Helen Szryter : The hypersurface of the second degree in four-dimensional space. — James S. Taylor : A Set of five postulates for Boolean algebras in terms of the operation « exception ».

Catholic University of America (Washington). — Otto J. Ramler : Three-cusped hypocycloids fulfilling certain assigned conditions.

University of Chicago. — Israel A. Barnett : Differential equations with a continuous infinitude of variables. — Jacob M. Kinney : The general theory of congruences without any preliminary integrations. — Ernest P. Lane : Conjugate systems with indeterminate axis of curves. — James E. McAtee : Modular invariants of a quadratic form for a prime power modulus. — William P. Ott :

The general problem of the type of the brachistochrone with variable end points. — Levi S. Shively : A new basis for the metric theory of congruences. — Webster G. Simon : On the solution of certain types of linear differential equations in infinitely many variables.

Columbia University (New-York). — Glenn James : Some theorems on the summation of divergent series.

Cornell University (Ithaca, N.-Y.). — H. H. Dalaker : On the otomorphic functions of the group. — Anna M. Howe : The classification of plane involutions of ordre tree.

University of Illinois (Urbana). — Raymond Franklin Borden : On the Laplace-Poisson mixed equation. — Hobart Dickinson Frary : The Green's function for a plane contour. — Merlin Grant Smith : On the zeros of functions defined by homogeneous linear differential equations containing a parameter.

University of Pensylvania (Philadelphia). — George H. Hallett : Linear order in three dimensional Euclidean and double elliptic space. — Harry M. Shœmaker : A generalized equation for vibrating membranes.

Syracuse University (New-York). — Mrs. Edward Drake Roe : Interfunctional expressibility problems of symmetric functions.

J.-H. Graf.

(1852-1918)

Le Professeur J.-H. Graf a occupé une place trop importante dans la vie mathématique suisse pour que *l'Enseignement mathématique* ne lui consacre pas quelques paroles de sympathie et de reconnaissance au moment où sa mort laisse un grand vide que nous aurons de la peine à combler.

Né le 10 août 1852 à Töss, près de Winterthour, il fréquenta les écoles primaires de son village, puis les écoles secondaires de Zurich. En 1868, il entra à l'école normale privée de Muristalden, près de Berne, et, en 1871, à l'Ecole polytechnique fédérale de Zurich. Il obtint successivement les diplômes de maître primaire bernois et zurichois et de maître secondaire zurichois.

Il fonctionnna quelque temps comme maître dans une des écoles secondaires de Zurich et, en 1874, il fut nommé maître de mathématiques et de physique au Gymnase libre de Berne.

A Berne, il profita de ses loisirs pour suivre les cours de l'illustre mathématicien Schläfli, qui enseignait à cette époque à l'Université. Graf présenta sa thèse de doctorat en 1878 et en 1879 il se faisait agréer comme privat-docent.

Professeur extraordinaire en 1890, il était nommé professeur ordinaire en 1892, au moment où Schläfli quittait l'enseignement.

Doué d'une puissance de travail prodigieuse et d'un sens pratique merveilleux, Graf fit une carrière brillante. Professeur très écouté et très aimé de ses élèves, il sut donner un relief particulier à la section mathématique de l'Université de Berne. Sous son influence et avec des collègues émérites, il est vrai, cette section devint rapidement l'une des plus importantes de la Suisse.

Graf fut deux fois Doyen de la Faculté de philosophie et Recteur de l'Université en 1905-06. Il était également membre de la délégation suisse dans la Commission internationale de l'enseignement mathématique ; il faisait partie de la Société mathématique suisse et de la Société suisse des professeurs de mathématiques.

Très connu dans les milieux scientifiques pour ses divers travaux sur les fonctions besséliennes, eulériennes et sphériques, il s'était également fait une grande réputation comme organisateur des caisses d'assurances pour les veuves et les orphelins, pour les employés des services publics, etc. Il fonda des caisses de ce genre à l'Université de Berne, dans le corps enseignant primaire et secondaire bernois, il collabora à la création de telles fondations pour la ville de Berne et pour les C. F. F.

La mort vint le frapper en pleine activité, le 17 juin 1918, au milieu de la sympathie de tous ceux qui avaient travaillé avec lui.

Graf laisse une œuvre scientifique et économique considérable. La liste de ses diverses publications comporte 122 numéros[1], dont un très grand nombre traite de questions d'assurances. Plusieurs de ses travaux sont aussi consacrés à l'histoire de la cartographie suisse et d'autres à l'alpinisme dont il fut toujours un adepte fervent. La partie la plus importante de son œuvre, en dehors de l'étude des fonctions spéciales dont nous avons déjà parlé, se rapporte à l'histoire des mathématiques en pays bernois. Il rend là un éclatant hommage aux König, Crouzat, du Crest, Tralles, Huber, Wolf, Schläfli, Steiner, etc., qui ont illustré la science et le nom bernois dans notre pays ou à l'étranger.

Nous avons également retrouvé les titres de 36 dissertations de doctorat[1] faites sous sa direction depuis 1893 à 1918. Le plus grand nombre des sujets sont tirés également des fonctions spéciales sus-indiquées.

En s'attachant à cette partie de la théorie des fonctions, Graf ne faisait pas autre chose que de continuer l'œuvre dans laquelle son ancien maître Schläfli s'était illustré.

L'Université de Berne en particulier et la science suisse en général perdent avec le professeur Graf un homme qui les a hautement honorés et dont l'activité féconde et bienfaisante a rendu de grands services à la science mathématique.

L. Crelier (Berne).

---

[1] Voir les *Comptes rendus de la Société helvétique des sciences nat.*, 1918.

Nécrologie.

M. Maxime Bôcher, Professeur de mathématiques à l'Université Harvard (Etats-Unis), est décédé le 12 septembre 1918, à l'âge de 51 ans. Les mathématiciens américains perdent en lui l'un de leurs meilleurs représentants. On lui doit une intéressante étude[1] réunissant, à l'usage des physiciens, les propriétés des développements en séries employés dans la théorie du potentiel. Depuis une vingtaine d'années il s'était attaché à l'étude des équations différentielles linéaires. Rappelons ici la belle conférence[2] qu'il fit à l'une des séances générales du Congrès international des mathématiciens, tenu à Cambridge en 1912, et dans laquelle il exposa les progrès réalisés dans les problèmes des limites qui interviennent dans la résolution des équations différentielles linéaires assujetties à des conditions linéaires. Pendant l'hiver 1913-14 M. Bôcher fit un cours à la Faculté des Sciences de Paris sur *les méthodes de Sturm dans la théorie des équations différentielles linéaires et leurs développements modernes*[3]. Ces leçons, recueillies et rédigées par M. Gaston Julia, ont été publiées dans la collection des Monographies de M. Emile Borel.

M. François Daniëls, de Nymwegen (Hollande), Professeur de mathématiques à l'Université de Fribourg (Suisse), est décédé le 16 novembre 1918, à l'âge de 58 ans. Ses nombreux travaux sur la géométrie vectorielle et sur la géométrie sphérique, sont bien connus des lecteurs de *L'Enseignement mathématique*.

M. Marcel Deprez, professeur d'Electricité industrielle au Conservatoire National des Arts et Métiers de Paris, est décédé le 16 octobre 1918, après une longue maladie, à l'âge de 75 ans. Le savant physicien faisait partie de la Section de mécanique de l'Académie des Sciences depuis 1886.

Gaston Milhaud. — Nous apprenons avec regret la mort du mathématicien et philosophe français, M. Gaston Milhaud, décédé le 1er octobre 1918, à l'âge de 60 ans. Ancien élève de l'Ecole normale supérieure, agrégé de mathématiques (en 1881), Gaston Milhaud a enseigné d'abord les mathématiques dans plusieurs lycées tout en consacrant ses moments de loisir plus particulièrement à l'histoire et à la philosophie des sciences. On connaît ses belles études sur l'*origine de la science grecque*, sur l'*histoire de la pensée scientifique* et sur *Descartes savant*. Chargé d'une suppléance dans la chaire de philosophie de l'Université de Mont-

---

[1] *Ueber die Reihenentwicklungen der Potentialtheorie*, 258 p., B. G. Teubner, Leipzig, 1894.

[2] *Boundary Problems in one Dimension*, Proceedings, vol. I, p. 163-195

[3] 1 vol. in-8°, 118 p., Gauthier-Villars, Paris, 1917. (Analysé par A. Buhl dans *l'Enseignement mathématique*, Tome XIX, N° 3, p. 203-204, 1917.)

pellier, il y était devenu titulaire en 1900. En 1909 il fut appelé à la Sorbonne où la Faculté des Lettres venait de créer pour lui une chaire d'« histoire de la philosophie dans ses rapports avec les sciences ».

L. Sylow. — Nous avons le regret d'apprendre la mort de M. Ludwig Sylow, Professeur à l'Université de Christiania, décédé dans cette ville, le 7 septembre 1918, à l'âge de 85 ans. Ses belles recherches sur la théorie des groupes sont devenues classiques.

On lui doit la publication de la 2e édition des Œuvres complètes de N.-H. Abel, éditée en 1891, à Christiania, avec la collaboration de S. Lie. Rappelons aussi sa belle Notice sur *Les études d'Abel et ses découvertes*, publiée en 1902 dans le *Mémorial* consacré au Centenaire d'Abel.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

FRANCE

Collège de France *(Paris)*. — Année scolaire 1918-19, à partir du 2 décembre. — *Mathématiques*. M. Humbert : Théorie des nombres quadratiques (2 h.). — *Mécanique analytique*. M. Hadamard : Influence de la forme du domaine dans les problèmes de physique mathématique (2 h.). — *Physique générale et mathématique*. M. Brillouin : Les théories des géodésiens anglais et américains sur la stabilité gravitationnelle du globe terrestre et les faits (2 h.). — *Physique générale et expérimentale*. M. Langevin : Le principe de relativité et les théories de la gravitation (2 h.). — *Philosophie moderne*. M. Le Roy, suppléant M. Bergson : L'état présent de la philosophie mathématique et ses rapports avec la philosophie de l'intuition (2 h.).

BIBLIOGRAPHIE

L. Bieberbach. — **Differential- und Integralrechnung**, I u. II (*Teubners technische Leitfäden*), — 2 vol. in-16; 130 et 144 p. 2 M. 80 et 3 M. 40; B. G. Teubner, Leipzig.

Ce petit traité de calcul différentiel et intégral fait partie de la collection des manuels Teubner, destinés aux étudiants de l'enseignement supérieur technique et universitaire. Il fournit, sous une forme à la fois claire et précise, les notions essentielles indispensables dans une première étude.

La première partie, consacrée au *Calcul différentiel*, comprend les chapitres suivants : 1° La notion de fonction. — 2° La notion de nombre ; nombres irrationnels. — 3° Les séries. — 4° Fonctions continues. — 5° Calcul différentiel. — 6° Applications géométriques simples. — 7° La formule de Taylor. — 8° Formes indéterminées. — 9° Exemple d'une fonction continue ne possédant pas de dérivées.

La seconde partie, intitulée *Calcul intégral*, traite des objets suivants : 1° Les problèmes du calcul intégral. — 2° Théorie de l'intégrale indéfinie. — 3° Intégrales définies. — 4° Sur le calcul numérique d'intégrales définies. — 5° Longueur d'arcs et courbure. — 6° Représentation de fonctions par des séries et des intégrales définies. — 7° Intégrales doubles. — 8° Usage des nombres complexes ; fonctions analytiques.

L'auteur attache avec raison une grande importance à ce que les notions et les propriétés fondamentales soient formulées et démontrées d'une manière exacte. Il cherche à réagir contre la façon vague et souvent très incohérente avec laquelle on présente parfois les premiers éléments du Calcul infinitésimal. H. F.

A. R. Forsyth. — **Solutions of the Examples in a Treatise on Differential Equations.** — 1 vol. in-8°, 249 p., relié, 10 sh. ; Macmillan & Cie, Londres, 1918.

Comme l'indique son titre, ce recueil contient les solutions des exercices, au nombre de cent, proposés par M. Forsyth à la fin des différents chapitres de son traité sur les équations différentielles. Entièrement développés, ces exercices ont été préparés avec beaucoup de soin par l'auteur dont les ouvrages sont tous caractérisés par une grande simplicité et par une remarquable clarté. Ils se rapportent à la quatrième édition du Traité 1914. Ce Traité, qu'il ne faut pas confondre avec l'ouvrage plus complet publié par le même auteur sous le titre *Theory on Differential Equations*, s'adresse aux étudiants des universités et des écoles polytechniques. Il se borne aux méthodes classiques que l'on présente généralement dans une première

étude. Pour les posséder en vue des applications ultérieures il est indispensable que l'étudiant s'astreigne à faire de nombreux exercices d'intégration. Ce recueil de solutions est donc appelé à lui rendre de grands services.

Fr. Gerbaldi e Gino Loria. — **Scritti Matematici offerti ad Enrico D'Ovidio** in occasione del suo LXXV genetliaco, 11 agosto 1918. — 1 vol. gr. in-8°, xv-386 p., 30 lires; Fratelli Bocca, Turin.

Le Professeur Enrico D'Ovidio compte, comme on sait, au nombre des premiers mathématiciens italiens de l'époque actuelle. Par ses remarquables travaux dans les domaines de l'Algèbre et de la Géométrie, ainsi que par son bel enseignement à l'Université de Turin (depuis 1872), il a pris une part active au développement des sciences mathématiques en Italie. Ses disciples et ses amis n'ont pas voulu laisser passer le 75e anniversaire de leur vénéré maître, sans lui offrir un témoignage durable de leur reconnaissance, de leur admiration et de leur sympathie. Ils le présentent sous la forme d'un bel ouvrage où se trouvent réunis un grand nombre de mémoires appartenant aux domaines les plus divers des sciences mathématiques. La liste ci-après des Mémoires donne une idée de l'intérêt scientifique du volume publié par les soins de MM. F. Gerbaldi et Gino Loria.

Corrado Segre. — Su alcune classi particolari di sistemi continui di quadriche, e sui rispettivi inviluppi.

Francesco Gerbaldi. — Le frazioni continue di Halphen.

Gino Loria. — Le cubiche gobbe aventi ciascuna all'infinito tre punti réali e distinti.

Eugenio G. Togliatti. — Intorno ad un tipo notevole di sistemi lineari di reciprocità degeneri tra spazî ad n dimensioni.

Alessandro Terracini. — Sulle congruenze W di cui una falda focale è una quadrica.

Guido Fubini. — Alcune osservazioni relative ai problemi secondarii della balistica esterna.

Guido Castelnuovo. — Sulle curve che posseggono una infinità continua di corrispondenze algebriche.

Luigi Lombardi. — Le oscillazioni armoniche nelle antenne radiotelegraphiche direttamente eccitate.

Francesco Severi. — Sugli integrali semplici di prima specie appartenenti ad una superficie algebrica.

Emilio Almansi. — Sopra alcune applicazioni della teoria dell'urto.

Angelo Pensa. — Generalizzazione di una trasformazione di d'Ocagne.

Gustavo Sannia. — Estensione e studio di un metodo di sommazione generico di Borel.

Ernesto Laura. — Sopra la propagazione di onde in un mezzo indefinito.

Matteo Bottasso. — Problemi sulla determinazione delle linee sghembe.

Beppo Levi. — Riflessioni sopra alcuni principii della teoria degli aggregati e delle funzioni.

Giuseppe Bernardi — Nuovo metodo per la risoluzione diretta dell' equazione $ax + by = c$ in numeri interi e positivi, quando i tre numeri noti a, b, c, sono interi e positivi.

Nicodemo Jadanza. — Un interessante problema di Geodesia pratica.

Giuseppe Peano. — Resto nelle formule di interpolazione.

Filiberto Castellano. — Questioni elementari di massimo e minimo.

Gino Fano. — Sulle varietà algebriche a tre dimensioni a superficie-sezioni razionali.

Giovanni Giambelli. — Introduzione alla teoria delle forme in più serie di variabili.

On trouve, en tête du volume, un excellent portrait du Professeur D'Ovidio, ainsi que la liste des publications du savant géomètre. H. F.

L. Kiepert. — **Grundriss der Differential-u. Integral-Rechnung.** Zweiter Teil : *Integral-Rechnung*, Elfte vermehrte Auflage des gleichnamigen Leitfadens von M. Stegemann. Mit 186 Figuren. — 1 vol. gr. in-8°, xxiv-1020 p., Helwingsche Verlagsbuchhandlung, Hanovre, 1918.

Nous avons déjà signalé, à plusieurs reprises, les éditions de ce traité de Calcul différentiel et intégral qui est très répandu dans les Ecoles techniques supérieures de langue allemande. Il nous suffira donc de mentionner cette onzième édition, revue et complétée une fois de plus par M. Kiepert. Les additions portent principalement sur la théorie des équations différentielles. Rappelons que le volume contient, en Appendice, une table de près de 80 pages comprenant les principales formules du Calcul intégral.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Acta Mathematica : Journal rédigé par G. Mittag-Leffler, T. 41, fasc. 3 et 4. — S. Wigert : Sur la série de Lambert et son application à la théorie des nombres. — R. Jentzsch : Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen. — R. Jentzsch : Fortgesetzte Untersuchungen über die Abschnitte von Potenzreihen. — A. Ostrowski : Ueber einige Lösungen der Funktionalgleichung $\varphi(x) \cdot \varphi(y) = \varphi(xy)$. — P. Appell : Essai sur les fonctions θ du quatrième degré, II. — P. Koebe : Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung, IV ; Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche. — R. J. Backlund : Ueber die Nullstellen der Riemannschen Zetafunktion. — T. Carleman : Ueber die Fourierkoeffizienten einer stetigen Funktion.

Annals of Mathematics published under the auspices of the Princeton University N. J. — 2me série. Vol. 19, N° 1. — J. K. Whitemore : Minimal Surfaces Applicable to Surfaces of Revolution. — W. D. MacMillan : A Reduction of Certains Differential Equations of the First Order. — Id. : The Function $W = L(r)$ Defined as the Inverse of the Function $r = W - \log W$. — H. T. Burgess : Solution of the Matrix Equation $X^{-1} AX = N$. — C. A. Fischer : Linear Functionals of N-Spreads. — G. A. Miller : Substition Groups and Possible Arrangements of the Players at Card Tournaments. —

I. A. Barnett : Problems of the Calculus of Variations Invariant under a Continuous Group. — H. R. Brahana : A Proof of Petersen's Theorem. — H. R. Taylor : Complete Existential Theory of Bernstein's Set of Four Postulates for Boolean Algebras. — H. B. Fine : Ratio, Proportion and Measurement in the Elements of Euclid.

N° 2. — W. Osgood : Factorization of Analytic Functions of Several Variables. — D. Barrow : An Application of Fourier's Series to Probability. — J. M. Stetson : Conjugate Systems of Curves on a Surface Both of Whose Laplace Transforms are Lines of Curvature. — A. J. Kempner : A Theorem on Lattice-Points. — H. L. Smith : On Continuous Representations of a Square Upon Itself. — D. Jackson : Roots and Singular Points of Semi-Analytic Functions. — F. Irwin and H. N. Wright : Some Properties of Polynomial Curves.

N° 3. — R. D. Carmichael : Comparison Theorems for Homogeneous Linear Differential Equations of General Order. — H. B. Fine : Note on a substitute for Duhamel's Theorem. — J. H. Weaver : Some Properties of a Straight Line and Circle and Their Associated Parabolas. — C. L. E. Moore : Motions in Hyperspace. — J. R. Kline : A Definition af Sense on Closed Curves in Non-Metrical Plane Analysis Situs. — O. E. Glenn : Covariant Expansion of a Modular Form. — G. M. Green : The Intersections of a Straight Line and Hyperquadric. — E. T. Bell : Numerical Functions. — L. P. Eisenhart : Surfaces which can be Generated in more than one way by the Motion of an Invariable Curve.

N° 4. — Tomlinson Fort : A Class of Developments in Orthogonal Functions. — Webster G. Simon : A Formula of Polynomial Interpolation. — Gabriel M. Green : Plane Nets with Equal Invariants. — D. R. Curtiss : Recent Extensions of Descartes'Rule of Signs. — P. J. Daniell : A General Form of Integral. — T. H. Gronwall : Elastic Stresses in an Infinite Solid with a Spherical Cavity.

Bollettino di Bibliografia e Storia delle Scienze matematiche, pubblicato per cura di Gino Loria. — Anno XX, Serie II, Vol. I. — Libreria scientifica O. Capozzi. — Avec l'année 1918, le bulletin dirigé par M. G. Loria, professeur à l'Université de Gênes, commence une nouvelle série et sera édité par la librairie scientifique Capozzi, à Palerme.

Le premier fascicule de cette nouvelle série contient, dans la première partie, une notice historique sur la Faculté des Sciences mathématiques de l'Université de Modena, rédigée par le professeur E. Bortolotti. La seconde partie renferme, comme à l'ordinaire, une série d'analyses bibliographiques.

Bulletin de la Société mathématique de France ; publié par les secrétaires. Tome XLV. — Fascicule IV. — E. Cartan : La déformation des hypersurfaces dans l'espace à 5 dimensions (suite et fin). — E. Cotton : Sur l'abscisse de convergence des séries de Dirichlet. — W. Sierpinski : Démonstration élémentaire d'un théorème de M. Borel sur les nombres absolument normaux et détermination effective d'un tel nombre. — H. Lebesgue : Sur certaines démonstrations d'existence. — T. Lalesco : Les classes de noyaux symétrisables — P. Appell : Sur les polynômes se rattachant à l'équation différentielle $y'' = 6y^2 + x$. — G. Valiron : Sur les chemins de détermination des fonctions entières.

Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris. — *1er semestre 1918.* — *7 janvier.* — G. Giraud : Sur les fonctions hyperabeliennes. — S. Lattès : Sur l'itération des substitutions rationnelles et les fonctions de Poincaré. — J. Chokbate : Sur quelques propriétés des polynômes de Tchebitcheff. — A. Denjoy : Sur une propriété générale des fonctions analytiques. — P. Appell : Mouvements aériens gauches et sphères pesantes légères. — *14 janvier.* — G. Julia : Sur l'itération des fractions rationnelles. — M. d'Ocagne : Sur les surfaces gauches circonscrites à une surface donnée le long d'une courbe donnée. — R. Soreau : Sur l'origine et le sens du mot « abaque ». — *21 janvier.* — R. Garnier : Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires. — L. Bloch : Sur les théories de la gravitation. — *28 janvier.* — A. Buhl : Sur certaines sommes abéliennes d'intégrales doubles. — S. Lattès : Sur l'itération des substitutions rationnelles à deux variables. — G. Julia : Sur des problèmes concernant l'itération des fractions rationnelles. — F. Iversen : Sur les valeurs asymptotiques des fonctions méromorphes et les singularités transcendantes de leurs inverses. — *4 février.* — P. Barbarin : Sur le dilemme de J. Bolyai. — P. Fatou : Sur les équations fonctionnelles et les propriétés de certaines frontières. — O. Pompeiu : Sur une définition des fonctions holomorphes. — A. Denjoy : Sur les courbes de M. Jordan. — R. de Montessus de Ballore : Sur les quartiques gauches de première espèce. — *11 février.* — T. Lalesco : Les classes de noyaux symétrisables. — *18 février.* — P. E. Gau : Sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre. — Mladen T. Beritch : Extension du théorème de Rolle au cas de plusieurs variables. — *25 février.* — B. Jekhowsky : Généralisation du théorème de Cauchy, relatif aux développements en séries. — R. de Montessus de Ballore : Sur les quartiques gauches de première espèce. — E. Vessiot : Sur la propagation par ondes et sur la théorie de la relativité générale. — *4 mars.* — J. F. Ritt : Sur l'itération des fonctions rationnelles. — Valiron : Démonstration de l'existence, pour les fonctions entières, de chemins de détermination infinie. — C. Guichard : Sur une classe particulière de courbes plusieurs fois isotropes. — *11 mars.* — Tr. Lalesco : Sur un point de la théorie des noyaux symétrisables. — *18 mars.* — Mladen T. Beritch : Sur la convergence et la divergence des séries à termes réels et positifs. — A. Buhl : Sur l'intervention de la géométrie des masses dans certains théorèmes concernant les surfaces algébriques. — L. Schlussel : Sur la mesure des actions dynamiques rapides et irrégulièrement variables. — B. de Fontviolant : Théorie nouvelle relative aux effets du vent sur les ponts en poutres droites. — *25 mars.* — S. Lattès : Sur l'itération des fractions irrationnelles. — de Puccigny : Sur quelques valeurs de la quadrature approchée du cercle. *15 avril.* — G. Julia : Sur les substitutions rationnelles. — R. Garnier : Sur les singularités irrégulières des équations linéaires. — Valiron : Sur le maximum du module des fonctions entières. — de Pullig : Quelques remarques sur la quadrature approchée du cercle. — G. Humbert : Sur les représentations d'un entier par certaines formes quadratiques indéfinies. — *22 avril.* — L. Lecornu : Sur le signe des rotations. — A. Véronnet : Contraction et évolution du soleil. — *29 avril.* — L. Roy : Sur le problème de la réflexion et de la réfraction par ondes planes périodiques. — J. Haag : Sur une application de la loi de Gauss à la syphilis. — *6 mai.* — J. Pérès : Sur certains développements en séries. — T. Lalesco : Sur l'application des équations intégrales à la théorie des équations différentielles linéaires. —

M. T. Beritch : Un procédé intuitif pour la recherche des maxima et minima ordinaires. — J. Andrade : Sur quelques transformations ponctuelles, et sur le cercle de similitude de deux cycles. — R. Bricard : Sur le mouvement à deux paramètres autour d'un point fixe. — *13 mai.* — G. Julia : Valeurs limites de l'intégrale de Poisson relative à la sphère en un point de discontinuité des données. — G. Humbert : Sur les formes quadratiques indéfinies d'Hermite. — E. Belot : Le rôle des forces dominant l'attraction dans l'architecture de la Terre et des Mondes : modèle mécanique de la formation du système solaire. — *21 mai.* — J. Pérès : Quelques remarques sur certains développements en série. — A. Buhl : Sur les séries de polynômes tayloriens franchissant les domaines W. — C. de la Vallée Poussin : Sur la meilleure approximation des fonctions d'une variable réelle, par des expressions d'ordre donné. — *27 mai.* — C. de la Vallée Poussin : Sur le maximum du module de la dérivée d'une expression trigonométrique d'ordre et de module borné. — *3 juin.* — G. Giraud : Sur une équation aux dérivées partielles, non linéaire, du second ordre, se rattachant à la théorie des fonctions hyperfuchsiennes. — A. Buhl : Sur les volumes engendrés par la rotation d'un contour sphérique. — G. Humbert : Sur le nombre des classes de formes à indéterminées conjuguées, indéfinies, de déterminant donné. — *10 juin.* — J Pérès : Sur certaines transformations fonctionnelles. — de Pulligny : Sur la quadrature approchée du cercle. — G. Humbert : Sur les représentations d'un entier par les formes quadratiques ternaires, indéfinies. — M. Brillouin : Milieux biaxes. Recherches des sources. Les amplitudes. — *17 juin.* — H. Villat : Sur certaines équations de Fredholm singulières de première espèce. — Philippe E. B. Jourdain : Démonstration du théorème d'après lequel tout ensemble peut être bien ordonné. — E. Cahen : Sur les séries de Dirichlet.

Journal für die reine und angewandte Mathematik — Band 148. — E. Fischer : Ueber die Differentiationsprozesse der Algebra. — H. Laudien : Entwicklung willkürlicher Funktionen bei einem thermoelastischen Problem. — C. Kostka : Schlussformel zur Hauptaufgabe der symmetrischen Funktionen. — Stäckel : Arithmetische Eigenschaften ganzer Funktionen. — J. Kurschak : Ueber spezielle Funktionenreihen. — M. Pasch : Ueber quaternäre Linienkoordinate. — J. Schur : Ueber Potenzreihen, die im Innern des Einheitskreises beschränkt sind (Fortsetzung). — R. König : Riemannsche Funktionen- und Differential-Systeme in der Ebene. Arithmetischer Teil. — O. Szasz : Ueber die Approximation stetiger Funktionen durch Bernoullische Polynome.

Proceedings of the London Mathematical Society. — Series 2, Vol. 16. Larmor : Address by the Retiring President. — The Fourier Harmonic Analysis : Its Fratical Scope, with Optical Illustration. — J. W. Campbell : Periodic Solutions of the Problem of Three Bodies in Three Dimensions. — H. S. Carslaw : The Green's Function for the Equation $\nabla^2 u + k^2 u = 0$ (II). — F. J. W. Whipple : Diffraction by a Wedge and Kindred Problems. — G. H. Hardy and S. Ramanujan : Asymptotic Formulae for the Distribution of Integers of Various Types. — G. B. Jeffery : The Relations between Spherical, Cylindrical, and Spheroidal Harmonics. — J. G. Leathem : Theorems on Conformal Representation. — C. N. Watson : Bessel Functions and Kapteyn Series. — W. H. Young : On Non-absoluty Convergent, not

necessarily Continuous, Integrals. — M. J. M. Hill : On the Classification of the Integrals of Linear Partial Differential Equations of the First Order. W. H. Young : On Multiple Integration by Parts and the Second Theorem of the Mean. — H. T. J. Norton : A Problem in Diophantine Approximation.— F. J. W. Whipple : A Symmetrical Relation between Legendre's Functions with Parameters, cosh a and coth a. — L. J. Rogers : On two Theorems of Combinatory Analysis and some Allied Identities. — W. H. Young and G. C. Young : On the Internal Structure of a Set of Points in Space of any Number of Dimensions. — P. A. Macmahon : Small Contribution to Combinatory Analysis.

Archiv der Mathematik und Physik, 27. Band. B. G. Teubner, Leipzig. — R. Sturm : Das System der kubischen Raumkurven mit drei gegebenen Tangenten und seine Ausartungen. — E. Egervary : Ueber die charakteristischen geometrischen Eigenschaften der Legendreschen und Tschebyscheffschen Polynome. — A. Kienast : Elementare Ableitung des Zusammenhanges zwischen den durch konvergierende und durch asymptotische Reihen dargestellten Fundamentalsystemen der Besselschen Differentialgleichung. — L. Lichtenstein : Ueber die Greensche Integralformel der Potentialtheorie. — G. Hamel : Ueber einen limitärperiodischen Kettenbruch. — H. Monrmann : Modifikation Cayleyscher Formeln für gewundene Kurven auf einem Kegel 2. Ordnung. — A. Willers : Graphische Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung, deren Strahlkurven Kegelschnitte sind. — A. Korn : Ueber die Anwendung der Methode der sukzessiven Näherungen zur Lösung von linearen Integralgleichungen mit unsymmetrischen Kernen. — O. Szasz : Determinantendarstellung einiger Zahlentheoretischer Funktionen. — I. Schur : Ueber die Koëffizientensummen einer Potenzreihe mit positivem reellem Teil. — G. Polya : Zahlentheoretisches und Wahrscheinlichkeitstheoretisches über die Sichtweite im Walde. — H. Prüfer : Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen. — E. Landau : Ueber die Wigertsche asymtotische Funktionalgleichung für die Lambertsche Reihe.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. Vol, XXVII, 1er semestre 1918. — G. Armellini : Sopra l'integrazione approssimata della equazioni differenziali. — R. Giordano : Enti geometrici coordinati a certi covarianti simultanei estensivi. — G. Loria : Fasci di quadriche rotonde e curve cartesiane. — U. Cisotti : Una formola per le determinazione di dislivelli dei corsi d'acqua mediante misure di velocità. — L. Bianchi : Sulla integrazione dell'equazione $rt - s^2 + c\,(p^2 + q^2)^2 = 0$. — *Id.* : Sopra certe forme particolari dell' elemento lineare sferico. — E. Bompiani : Nuovi criteri per l'isometria di due superficie o varietà. — *Id.* : Le transformazioni puntuali di una varietà che conservano le superficie a curvatura nulla. — C. Burali-Forti : Differenziali esatti. — *Id.* : Alcune linee e superficie collegate con una linea gobba. — *Id.* : Sulla superficie rigate. — U. Cisotti : Derivazione intrinseca nel calcolo differenziale assoluto. — G. Darbi : Proprietà caratteristiche delle equazioni di grado primo p risolubili per radicali. — E. de Cristofaro : Problemi dinamici a due variabili che ammettono un integrale razionale lineare e fratto rispetto alle componenti della velocità. — A. del Re : Hamiltoniani e gradienti di hamiltoniani e di gradienti laplasiani parametri differenziali. — T. Lalesco : Les équations différentielles linéaires d'ordre infini et l'équation de Fredholm. — E. Laura : Sopra una classe di nuclei semi-definiti positivi. —

G. Marletta : Di una classa di forma dell'S_4, ognuna rappresentabile nelle coppie di un'involuzione dell'S_3. — D. Montesano : Sulla teoria generale delle corrispondenze birazionali dello spazio. — A. Pensa : Una espressione differenziale vettoriale alternata. — J. Pérès : Quelques propriétés des fonctions de Bessel. — G. Ricci : Sulle varietà a tre dimensioni dotate di terne principali di congruenze geodetiche. — G. Scorza : Sulle curve ellittiche singolari. — G. Sannia : Sulle serie di potenze di una variabile sommate col metodo di Borel generalizzato. — V. Vesin : Proprietà del prodotto graduale. — A. Antoniazzi : Sopra il movimento di rotazio ne diurna della Terra. — U. Cisotti : Forma intrinseca della equazioni gravitazionali nella relatività generale. — T. Levi-civita : ds^3 einsteiniani in campi newtoniani, II. Condizioni di integrabilità e comportamento geometrico spaziale. — R. Serini : Euclideità dello spazio completamente vuoto nella relatività generale di Einstein. — G. Armellini : Ricerche sopra la previsione dell'urto nel problema dei tre corpi. — O. Tedone : Sulle ovali di Cartesio come curve aplanetiche di rifrazione. — *Id.* : Sulla maniera di stabilire le formole fondamentali dell'ordinaria teoria della diffrazione.

Bulletin of the Americain Mathematical Society, Volume XXIV. — G. A. Bliss : Integrals of Lebesgue. — F. N. Cole : The Twenty-Fourth Summer Meeting of the American Mathematical Society. — F. H. Safford : Irrational Transformations of the General Elliptic Element. — Dunham Jackson : Note on the Parametric Representation of an Arbitrary Continuous Curve. — D. E. Smith : John Wallis as a Cryptographer. — T. H. Hildebrand : On Integrals Related to and Extensions of the Lebesgue Integrals. — C. N. Moore : A Continuous Function Whose Development in Bessel's Functions is Non-Summable of Certain Orders. — G. M. Green : Note on Conjugate Nets with Equal Point Invariants. — J. F. Ritt : On the Differentiability of Asymptotic Series. — R. D. Carmichael : Elementary Inequalites for the Roots of an Algebraic Equation — H. Bateman : The Solution of the Wave Equation by Means of Definite Integrals. — C. J. Keyser : The Role of the Concept of Infinity in the Work of Lucretius. — A. Emch : On the Invariant Net of Cubics in the Steinerian Transformation. — T. Fort : Some Theorems of Comparison and Oscillation. — L. Hart : Note on Infinite Systems of Linear Equations. — L. D. Cummings : An Undervalued Kirkman Paper. — F. Cajori : Pierre Laurent Wantzel. — E. T. Bell : Some Remarkable Determinants of Integers. — H. Blumberg : A Theorem of Semi-Continuous Functions. — F. H. Safford : Surface of Revolution in the Theory of Lamé's Products. — C. J. Keyser : Note Concerning the Number of Possible Interpretations of any System of Postulates. — P. R. Rider : A Theorem of the Variation of a Function. — C. H. Forsyth : Tangential Interpolation of Ordinates among Areas. — W. C. Graustein : Note on Isogenous Complex, Fonctions of Curves. — A. A. Bennet : An Elementary Derivation of the Probability Function. — G. H. Light : The Intrinsic Equation for Euler's Resistance Integral. — J. Pierpont : Hermite's Works. — H. Hancock : Remarks on Elliptic Integrals.

Revue générale des Sciences pures et appliquées. — 28e année. N° 23, décembre 1917. M. L. Bloch : Relativité et Gravitation. — 29e année. N° 3, février 1918. P. Otlet : L'avenir du catalogue international de la Littérature scientifique. — N° 4 et 5. M. H. Varcollier : Les Déplacements dans les

champs de vecteurs et la Théorie de la relativité. — M. H. Pariselle : Jumelles et Télémètres stéréoscopiques. — *Id.* : Le langage scientifique moderne et la rédaction des mémoires scientifiques français.

2. Livres nouveaux :

W. Ahrens — **Mathematische Unterhaltungen und Spiele.** Band II, 2. Auflage. — 1 vol. in-8°, 455 p., 15 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

L. Bieberbach. — **Differential- und Integralrechnung. II Integralrechnung.** (*Teubners technische Leitfäden*). — 1 vol. in-16, 144 p., 3. 40 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

W. Bloch. — **Einführung in die Relativitätstheorie** (Sammlung aus Natur u. Geisteswelt, No. 618). — 1 vol. in-16, 100 p., relié, 1 M. 50 ; B. G. Teubner, Leipzig.

E. Borel. — **Die Elemente der Mathematik** vom Verfasser genehmigte deutsche Ausgabe besorgt von Paul Stäckel. Erster Band : *Arithmetik und Algebra*, nebst den Elementen der Differential-Rechnung, 2te Auflage mit 56 Textfiguren u. 3 Tafeln. — 1 vol. in-8°, xvi-404 p., 12 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

A. Brill. — **Das Relativitätsprinzip.** Eine Einführung in die Theorie. Dritte Auflage. — 1 vol. in-8°, 48 p., 2 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

P. Crantz. — **Arithmetik und Algebra zum Selbstunterricht.** I et II. 5. u. 4. Auflage : (Sammlung *Aus Natur und Geisteswelt*, Nos 120 et 205). — 2 vol in-16, 114 et 110 p., relié 1. 50 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

W. Dieck. — **Nichteuklidische Geometrie in der Kugelebene.** — (Sammlung *Mathematisch-physikalische Bibliothek*, No 31). — 1 vol. in-16. 51 p., broché 1 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

W. Dieck. — **Stoffwahl und Lehrkunst im mathematischen Unterrichte** der Unter- und Mittelstufe höherer Lehranstalten. — 1 vol. in-8°, 261 p., 5 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

A.-R. Forsyth. — **Solutions of the Examples in a Treatise on Differential Equations.** — 1 vol. in-8°, 249 p., 10 sh ; Macmilian and Co..Ltd. Londres.

R. Fricke. — **Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen**, I et II. — 2 vol. in-8°, 399 et 413 p., relié, 15 M. le volume ; B. G. Teubner, Leipzig.

F. Gerbaldi et Gino Loria. — **Scritti Matematici offertí ad Enrico D'Ovidio.** — 1 vol. in-8°, 386 p., avec un portrait de D'Ovidio ; 30 l. ; Fratelli Bocca. Turin.

Ph. Lœtzbeyer. — **Vierstellige Tafeln zum Logarithmischen und Zahlenrechnen für Schule und Leben.** — 1 vol. in-8°, 28 p., 1 M. 40 ; B. G. Teubner, Leipzig.

A. Lœvy. — **Lehrbuch der Algebra.** Erster Teil : *Grundlagen der Arithmetik.* — 1 vol. in-8°, 398 p. ; 12 M. ; Veit & Cie, Leipzig.

H. E. Timerding. — **Der goldene Schnitt** (Mathematisch-physikalische Bibliothek, Band 32). — 1 vol. in-16, 57 p., 1 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

International Catalogue of Scientific Literature ; fourteenth annual issue. **A. Mathematics** — 1 vol. in-8°, 163 p., 15 sh. ; Gauthier-Villars, Paris, 1917.

LES NOMS ET LES CHOSES

Remarques sur la nomenclature mathématique

PAR

Gino Loria (Gênes).

Malum est quocumque defectu.
(Axiome logique).

Les progrès continuels d'une science, créant sans cesse de nouvelles conceptions et de nouvelles méthodes, ont comme conséquence inévitable le besoin d'étendre et quelquefois de changer la nomenclature en usage, en introduisant des mots nouveaux ou en étendant la signification des anciens. Si ce besoin fut ressenti même par la plus jeune des sciences naturelles — la chimie — qui, sacrifiant la brièveté à la clarté, a fini par adopter un système désormais classique, à plus forte raison fut-il ressenti par la mathémathique qui, tant au point de vue de l'antiquité que par sa tendance constante à s'accroître sans cesse, peut bien être appelée la première de nos sciences. Il est, nous semble-t-il, intéressant et instructif d'examiner de quelle manière elle à jusqu'ici pourvu à cette nécessité, et de nous rendre compte si les procédés employés jusqu'à présent doivent être estimés satisfaisants, ou si, au contraire, ils ont besoin de changements plus ou moins profonds.

Si on fait une revue d'ensemble de la nomenclature en usage, on reconnaîtra sans peine que ceux qui cultivent les sciences exactes ont en général montré une remarquable répugnance à introduire des termes nouveaux et une tendance très prononcée à utiliser les anciens dans des accep-

tions nouvelles. C'est un système sans doute commode, mais qui présente une menace continuelle pour la clarté et la précision du style, et qui est en pleine opposition avec cette condition d'« univocité » de la correspondance entre les noms et les choses à laquelle ne peut se soustraire un langage qui veut être scientifique.

Les coryphées des mathématiques anglaises pendant la première moitié du XIXe siècle — Cayley, Sylvester, Salmon — résistèrent pourtant à cette tendance générale, car ils furent des créateurs heureux et féconds de termes nouveaux. Cette précieuse qualité s'est montrée dans tout son jour dans la théorie des déterminants et dans celle des formes algébriques, où les appellations proposées par ces savants furent en général adoptées sans délai et définitivement.

Parmi les termes techniques dont on fait depuis longtemps un véritable abus, ceux qui méritent la première place sont les suivants: « ordre », « classe », « genre », « espèce ». On parle indifféremment d'« ordre » d'une courbe ou d'une surface algébrique, d'« ordre » d'une équation différentielle et d'« ordre » d'un groupe, évidemment en des significations tout à fait différentes. Une courbe ou une surface algébrique ont chacune une « classe » de même qu'une transformation plane univoque, ou une forme quadratique. Une courbe algébrique a un « genre » déterminé, aussi bien qu'une forme quadratique et, dans certains cas bien connus, une fonction transcendante entière ; or ces trois significations du mot « genre », ont entre elles des analogies très douteuses. Enfin on parle, en géométrie, de quartiques gauches de « 1re ou 2me espèce », de droites imaginaires de 1re ou 2me espèce », de formes géométriques de « 1re, 2me ou 3me espèce », en employant évidemment le mot dans des acceptions bien différentes. Et je ne prétends pas être complet.

Or, s'il paraît naturel que ces vocables empruntés à la logique aient été choisis chaque fois qu'il s'agissait de dénombrer les éléments d'une même catégorie, il faut reconnaître que les mathématiciens les employèrent parfois, faute

de mieux, dans des cas où cette considération n'a aucune valeur. Ainsi, les deux courbes gauches du quatrième ordre, s'appellent d'ordinaire, l'une de 1re, l'autre de 2me espèce, uniquement parce que la première a été découverte avant l'autre. Or, les considérations historiques n'ont pas le droit d'exercer une influence stable sur la nomenclature, car elles n'ont aucune signification pour les élèves, qui ne connaissent pas les détails des découvertes. C'est sans doute pour ces raisons que Cayley, toujours bien inspiré, proposa de donner à ces courbes des noms qui rappelassent leur génération et de baptiser « Quadriquadric » celle qui appartient à une infinité de courbes du second ordre, et « Excuboquartic » celle qui se trouve sur une seule. Je pourrais allonger la liste de ces emplois abusifs ; je m'en tiens à cet exemple.

Un autre mot dont les mathématiciens ont usé et abusé, c'est celui de « module » ; on le rencontre dans la théorie des logarithmes, à propos du changement de base; ensuite dans la théorie des nombres complexes; plus tard, dans la théorie des fonctions elliptiques. Cela ne suffisait pas : on l'emploie aujourd'hui dans la théorie des formes algébriques, dans une signification aussi éloignée des précédentes que celles-ci le sont entre elles.

En continuant notre rapide revue de la littérature mathématique, nous rencontrons dans la géométrie analytique les coordonnées « polaires », dans l'étude des courbes et des surfaces du second degré des droites et des plans « polaires », et dans la théorie des fonctions analytiques des discontinuités « polaires » : trois cas où l'adjectif « polaire » est pris dans des sens bien différents.

Si je voulais faire ici une exposition complète de ces mots à sens multiples, je citerais le terme d'« involution » que les Anglais emploient dans le sens d'élévation à une puissance, tandis que dans le reste de l'Europe son emploi est restreint au sens géométrique que lui a donné Desargues ; le mot « axe », auquel on a déjà donné une demi-douzaine de significations ; le mot « forme » qui, désignant d'abord une des conceptions fondamentales de la géométrie, a passé dans la

théorie des nombres, puis dans l'algèbre supérieure. On ne s'en est pas tenu là ; tout récemment on l'a mis à contribution dans certains chapitres de la géométrie supérieure.

Sans avoir la prétention d'épuiser mon sujet, je crois bon de faire encore mention de trois autres termes techniques, auxquels on a voulu faire rendre plus qu'ils ne peuvent.

D'abord le terme de « foyer ». Il avait une signification bien claire dans la théorie des sections coniques, lorsque, il y a un siècle, on eut la malheureuse idée de lui faire désigner le point qui correspond à un plan donné par rapport à un complexe linéaire. Plus tard on l'a affecté à un élément important dans la théorie des systèmes de rayons. Comme ces nouvelles significations se trouvent chez des auteurs considérés avec raison comme classiques, il est naturellement impossible d'en demander désormais le bannissement.

Le second mot auquel je fais allusion, c'est « réciprocité ». Dans la théorie des nombres (formes quadratiques et cubiques) il a depuis longtemps un sens bien déterminé; mais les géomètres voulurent s'en emparer, en le transformant en un synonyme du terme « corrélation ». Ce double emploi eut la conséquence fâcheuse que, dans une liste de publications relatives à une théorie fondamentale de la géométrie moderne, se faufilèrent des travaux relatifs à la loi de réciprocité des restes quadratiques.

Enfin le terme « congruence » a un sens bien connu dans la théorie des nombres. En Géométrie, il en a deux autres tout différents ; d'une part il désigne la relation d'égalité par la forme et par la grandeur de deux figures ; d'autre part on s'en est servi, à partir de l'année 1868, pour désigner la totalité des droites communes à deux complexes.

Ces exemples, que chacun pourra aisément multiplier en puisant dans ses souvenirs, prouvent avec évidence que le système consistant à accumuler des idées différentes sur un même mot, a été déjà la cause de déplorables désordres dans le pacifique royaume des mathématiques, mais que, s'il reste en honneur, il aura comme conséquence l'impossibilité de se comprendre entre mathématiciens appartenant à des

églises différentes ; danger extrêmement grave qu'il faut avoir continuellement sous les yeux.

C'est peut-être cette perspective chaque jour plus menaçante qui poussa les mathématiciens à imaginer et employer un autre procédé chaque fois qu'ils se trouvaient dans la nécessité de doter d'un état-civil un nouveau personnage ; je parle de l'habitude d'unir à des conceptions nouvelles les noms de leurs créateurs. C'est un système inspiré par un sentiment de reconnaissance et de respect, dont il est impossible de nier les qualités, au moins à certains points de vue ; toutefois, dans son application, il n'échappe pas à certains inconvénients sur lesquels on me permettra de m'arrêter un instant.

Le premier et le plus grave provient des difficultés, quelquefois insurmontables qu'on éprouve à « unicuique suum tribuere ». Si, par exemple, on doit estimer tout à fait justifiées les dénominations « théorème de Pythagore », « surface de Kummer », « problème de Plateau », « équation de Riccati », « transformations de Cremona », peut-on approuver le nom de « théorème de d'Alembert », donné trop souvent au théorème fondamental de la théorie des équations algébriques ? En effet, qu'on se rappelle que la propriété de toute équation algébrique d'avoir une racine réelle ou complexe est un fait auquel on parvint par des expériences répétées, à l'aide d'une généralisation hâtive, et sur la vérité duquel personne, pendant longtemps, n'éleva aucun doute. En conséquence, c'est un mérite incontestable de d'Alembert d'avoir reconnu qu'il s'agissait, non d'un axiome, mais d'un véritable théorème qui exige une démonstration « in formis », et d'avoir même essayé d'en forger une ; malheureusement le raisonnement qu'il a proposé n'est pas conclusif ; et on doit dire la même chose de ceux qu'ont imaginés plusieurs mathématiciens postérieurs jusqu'à Gauss. Or, si on admet qu'une proposition mérite le nom de théorème *seulement* le jour où on en a une démonstration à couvert de toute objection, il est évident que le nom du célèbre encyclopédiste français ne saurait être attaché à cette proposition.

Encore plus étrange et moins acceptable est la dénomina-

tion de « théorème de Thalès » qu'on applique en Italie à ce théorème qui affirme la similitude des deux séries de points déterminés sur deux droites qui se coupent par un faisceau de droites parallèles. Thalès, le premier des sages de la Grèce, le fondateur de l'Ecole des physiciens ioniens, n'a pas laissé une seule ligne qui nous soit parvenue. Les renseignements sur ses connaissances scientifiques doivent donc se puiser dans des sources indirectes. Or, toutes les autorités les plus dignes de foi font apparaître Thalès, au point de vue mathématique, comme un élève des prêtres égyptiens et comme un vulgarisateur des propositions les plus élémentaires de la géométrie. Pour ce qui a trait à la similitude, tous les historiens s'accordent aujourd'hui à dire qu'il n'en connaissait absolument rien, de manière que l'on considère comme une simple légende la tradition suivant laquelle il aurait mesuré la hauteur d'une pyramide par l'ombre portée, en se servant d'un couple de triangles semblables. Partant de ces considérations, j'ai été amené, depuis une trentaine d'années, à rechercher longuement les motifs de la dénomination « théorème de Thalès » et je n'en ai pas découvert de satisfaisant.

Autre exemple : Ceux qui ont lu la *Géométrie* de Descartes ne sauraient trouver justifiée la dénomination de « coordonnées cartésiennes », car ce précieux instrument n'a pas été employé par l'auteur du *Discours sur la Méthode* [1].

J'ai également fait depuis longtemps des recherches diligentes et opiniâtres pour découvrir pourquoi Elgé (c'est-à-dire feu G. de Longchamps) donna le nom de « courbe de Rolle » à une certaine courbe du troisième degré; malgré l'aide que m'a donné un savant tel que M. F. Cajori [2], elles n'aboutirent à aucun résultat.

Ce qui est absolument injuste, et même immoral, c'est d'appeler « formule de Cardan » la formule de résolution des équations cubiques, que le fameux médecin milanais a volée à Tartaglia. On peut dire la même chose du prétendu « théo-

[1] Voir ma communication *Pour une histoire de la géométrie analytique* (Verhandl. des III. Mathematiker Kongresses, Leipzig, 1905, p. 562-574).

[2] Voir la Note « What is the Origin of the Name Rolle's Curve? », *The American Monthly*, September 1918.

rème de Guldin », qui se trouve dans la *Collection mathématique* de Pappus, circonstance qui n'était pas ignorée par Guldin lui-même. Enfin, les derniers résultats de la recherche historique donnent tort à la coutume régnante d'appeler « formule de Tartaglia » l'expression de la surface d'un triangle plan en fonction des côtés, car on la trouve dans les œuvres de Héron d'Alexandrie, établie par un admirable raisonnement qui serait digne d'Euclide [1].

Ajoutons que l'habitude de donner une certaine paternité à un résultat sans des motifs suffisamment sérieux, a eu pour conséquence de fâcheux désaccords et de déplorables malentendus. Ainsi, dans la géométrie infinitésimale des courbes gauches, on trouve un groupe de formules, d'un emploi continuel, qui ont été découvertes presque en même temps par J. A. Serret et par Frenet. En conséquence quelques auteurs les appellent « formules de Serret », tandis que d'autres préfèrent les nommer « formules de Frenet » ; enfin, dans ces derniers temps on a introduit le nom de « formules de Serret-Frenet ». Des raisons tout à fait analogues ont fait donner le nom de « théorème de Descartes-Euler » à celui qui forme la base de la théorie des polyèdres. Mais des compromis de ce genre ne furent pas toujours possibles, d'où des confusions très regrettables. Par exemple, plusieurs figures qu'on rencontre dans la géométrie du triangle portent souvent le nom de géomètres français qui les découvrirent ; la recherche historique ayant par la suite mis à jour de nouvelles sources, quelques savants remarquèrent ces mêmes éléments dans de vieilles revues anglaises ou dans des publications allemandes qui avaient sombré dans l'oubli ; par suite ils adoptèrent une nouvelle nomenclature, qui toutefois ne réussit pas à détrôner l'ancienne. Une seule figure géométrique se trouve ainsi porter deux ou même trois noms différents !

Une autre imperfection bien grave du système que nous examinons, provient du fait que le nom de certains grands

[1] D'après un auteur arabe, cette formule aurait été découverte par Archimède. (Voir Suter, *Bibliotheca mathem.*, IIIe série, T. XI, 1910-11, p. 17.)

mathématiciens est uni à une multitude de théorèmes, de formules, de figures. Pour se faire une idée de la confusion qui en résulte, il suffit de se rappeler à combien de propositions, d'équations, de lignes est rattaché le nom d'Euler! Remarquons d'ailleurs que, tandis que certains grands géomètres, par un caprice du sort, n'ont laissé dans la terminologie mathématique aucune trace de leur passage, des investigateurs médiocres se virent décerner cet honneur : en conséquence leur nom, au lieu de subir le naufrage redouté (et peut-être mérité) dans l'océan de l'oubli, restera dans la mémoire des générations futures « per omnia sæcula sæculorum ».

Ces remarques — qui, je l'espère, ne seront pas considérées comme l'expression d'une tendance maladive à « chercher la petite bête », — pourraient être multipliées. [1] Mais je m'arrête, en me rappelant le mot de Voltaire : « Le secret d'ennuyer est celui de tout dire ». Qu'il me suffise de déclarer, en finissant cet article, que ce n'est pas l'espérance de devenir un nouveau Luther en prêchant la réforme, qui m'a poussé à l'écrire. Pour jouer un tel rôle il me faudrait une foi qui me manque tout à fait, car je sais bien qu'il est plus facile de faire accepter une théorie scientifique complètement nouvelle, que de déraciner la nomenclature généralement admise. Le seul but que je me suis proposé, c'est de montrer que les critères employés par les mathématiciens dans leur choix de noms nouveaux sont en général défectueux, comme le prouvent plusieurs des applications qu'on en a faites, et qu'en continuant sur cette voie, nous marchons vers la Tour de Babel. Notre science se flatte avec raison, au point de vue des méthodes et des résultats acquis, de ne le céder en rien, et peut-être d'en remontrer à toutes les autres. N'est-il pas légitime qu'elle cherche à soutenir avec honneur toutes sortes de comparaisons, même se rapportant à l'apparence extérieure?

Gênes, décembre 1918.

---

[1] Par exemple je n'ai pas parlé des fautes qu'on a commises en dérivant de nouveaux noms du grec; voir N. J. Hatzidakis, *Sur quelques points de terminologie mathématique* (Bibliotheca mathem, IIIe Série, Tome 2, 1901. p. 1139-40).

LES ORIGINES D'UN PROBLÈME INÉDIT DE E. TORRICELLI

PAR

Émile TURRIÈRE (Montpellier).

---

1. — M. Gino LORIA vient tout récemment d'appeler l'attention des lecteurs de l'*Intermédiaire des Mathématiciens*[1] sur un problème d'analyse diophantine, dont l'énoncé, dû à Evangelista TORRICELLI, est resté inédit. La question soulevée par l'éminent professeur de la R. Université de Gênes est du plus grand intérêt, surtout sous le point de vue de l'histoire de la théorie des nombres au XVIIe siècle : elle est intimement liée, en effet, à un difficile problème de FERMAT, auquel sont en outre attachés les noms de BILLY, de LEIBNIZ (?), de LAGRANGE et d'EULER.

Le problème d'Evangelista Torricelli et le problème de Fermat.

2. — C'est dans les termes qui suivent que M. Gino LORIA a posé la question et fait connaître l'énoncé du problème inédit de E. TORRICELLI :

« Dans un groupe de problèmes énoncés par E. TORRICELLI « et qui verront le jour dans l'édition actuellement sous « presse des *Œuvres complètes* de ce savant, je trouve le « suivant :

Trouver un triangle rectangle en nombres entiers satisfai-

---

[1] *L'Intermédiaire des Mathématiciens*, t. XXIV, 1917, pp. 97-98 (Question n° 4755).

sant aux trois conditions suivantes que : 1° son hypoténuse soit un nombre carré; 2° la somme des deux autres côtés soit carrée; 3° la somme du plus grand côté et du côté moyen soit aussi un carré.

« Je désire savoir si cette question a été posée par quelque « autre savant et si elle a été résolue. »

3. — En ce qui concerne tout d'abord le côté historique de la question posée par M. Gino Loria, il y a notamment beaucoup à dire au sujet de ce problème de Torricelli.

Dans les deux premières, en effet, des trois conditions simultanées qui constituent ce problème, on reconnaît de suite un célèbre problème de Fermat, qui offre cette particularité que sa solution la *plus simple* est formée par les côtés d'un triangle rectangle dont les mesures sont des nombres entiers de treize chiffres chacun! L'énoncé se trouve dans une des Observations sur Diophante :

« *Invenire triangulum rectangulum numero, cujus hypote-* « *nusa sit quadratus et pariter summa laterum circa rectum.*

« Triangulum quæsitum representant tres numeri se- « quentes :

4 687 298 610 289 ,

4 565 486 027 761 ,

1 061 652 293 520 .

« Formatur autem a duobus numeris sequentibus[1] :

2 150 905 , 246 792 . »

La lettre de Mersenne à Torricelli.

4. — Nous tenons de Fermat lui-même que l'énoncé de son problème fut communiqué par lui aux plus grands géomètres de l'époque. C'est ce qui résulte nettement de la lettre à Mersenne d'août 1643, dont j'extrais le passage suivant[2] :

---

[1] *Œuvres de Fermat*, t. I, 1891, p. 336 [observations sur Diophante, observation XLIV], t. III, 1896, p. 270.

[2] Lettre de Fermat à Mersenne, ? août 1643, *Œuvres de Fermat*, t. II, 1894, p. 261.

« Et, afin que je ne vous tienne pas plus longuement en « suspens, j'ai résolu toutes les questions que j'ai proposées « à ces messieurs, dont je ne vous citerai maintenant qu'un « exemple, pour leur ôter seulement la mauvaise impression « qu'ils avaient conçue contre moi comme leur ayant proposé « un amusement et un travail inutile. Je choisirai pour mon « exemple une des plus belles propositions que je leur ai « faites : *Trouver un triangle duquel le plus grand côté soit « quarré, et la somme des deux autres soit aussi quarrée.* « Voici le triangle :

4 687 298 610 289

4 565 486 027 761

1 061 652 293 520 . »

Nous avons aussi à ce sujet le témoignage de Billy ; l'auteur de l'*Inventum novum*, qui s'est personnellement occupé d'ailleurs de la question[1], affirme que Fermat proposa son problème aux plus doctes d'entre les mathématiciens[2] :

« *Invenire duos numeros quorum summa faciat quadra- « tum et quorum quadrata simuljuncta faciant quadrato- « quadratum.* Istud problema idem plane est superiori quo « quœrebatur triangulum rectangulum cujus hypotenusa et « summa laterum sit quadratus, aliasque fuit propositum « plerisque doctissimis mathematicis a Fermatio nostro sine « solutione... »

5. — Ma première pensée, dès la lecture de la question soulevée par M. Gino Loria, fut que Torricelli devait avoir eu connaissance directement ou indirectement du problème de Fermat. Ce problème n'est pas, en effet, par sa solution ni même par son énoncé d'une simplicité telle qu'il ait pu se présenter séparément à deux géomètres contemporains. J'ai trouvé ultérieurement l'explication désirée dans un passage d'une lettre de Mersenne à Torricelli en date du 25 décembre 1643, d'où il résulte que Fermat fit proposer son problème à Torricelli par l'intermédiaire de Mersenne.

---

[1] *Doctrinæ analyticæ inventum novum*, I, 22, 25, 45 et III, 32.
[2] *Doctrinæ analyticæ inventum novum*, I, 45.

Voici ce passage de la lettre de MERSENNE à TORRICELLI[1] :

« Clarissimus geometra, Senator Tholosanus Fermatius, « tibi (per me), sequens problema solvendum proponit, quod « tuo de conoideo acuto infinito æquivaleat. Invenire trian- « gulum rectangulum in numeris, cujus latus majus sit qua- « dratum, summaque duorum aliorum laterum etiam sit « quadratum, denique summa majoris et medii lateris sit « etiam quadratum.

« Exempli gratia : in triangulo 5, 4, 3 opportet 5 esse « numerum quadratum ; deinde summa 4 et 3, hoc est 7, « foret quadratus numerus, denique summa 5 et 4, hoc est 9, « esset quadrata. »

Il est ainsi parfaitement établi que, dès le début de l'année 1644, l'attention de TORRICELLI avait été, au moins par l'intermédiaire de MERSENNE, appelée sur le problème de FERMAT.

Leibniz s'est-il occupé du problème de Fermat?

6. — Avant de pousser plus loin l'examen de cette question tout spécialement intéressante, je désire ouvrir une parenthèse sur un autre point de l'histoire de ce même problème et précisément encore sur la transmission de son énoncé aux contemporains de FERMAT.

L. EULER, à qui l'on doit plusieurs mémoires sur la question et qui a le second (après BILLY) publié une démonstration précise du résultat simplement énoncé par FERMAT, attribue ce problème à LEIBNIZ, dans une première pièce datée du 15 novembre 1775[2] : « Hoc problema, a LEIBNIZIO « olim propositum, eo magis est notatu dignum, quod mi- « nimi numeri sint vehementer grandi, siquidem positivi « desiderentur... »

Puis, dans une seconde pièce du 18 mai 1780[3], il l'attribue

---

[1] *Discepoli di Galileo*, t. XLI, f° 9, recto.
Œuvres de Fermat, t. IV, Paris, 1912, p. 82-83.
Voir aussi la lettre de TORRICELLI à CARCAVI du 8 juillet 1646 (*Œuvres de Fermat*, t. IV, p. 88).

[2] *Miscellanea analytica* [*Commentationes arithmeticæ*, t. II éd. 1849, pp. 44-52], et *Opuscula analytica*, Petropoli, t. I. 1783, p. 335.

[3] De tribus pluribusve numeris inveniendis, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum (18 mai 1780). *Commentationes arithmeticæ*, édition de 1849, t. 2, p. 397-402.

à FERMAT : « Celebre est et nuper ab illustri LAGRANGE sin-
« gulari studio pertractum problema a FERMATIO olim pro-
« positum... » Une autre pièce de la même époque [1] attribue encore et très nettement ce problème à FERMAT.

7. — En raison de l'intérêt tout spécial qui s'attache à tout ce qui se rapporte à d'aussi grands noms, j'ai recherché des traces d'une pareille étude dans l'œuvre immense de LEIBNIZ.

La question de priorité entre LEIBNIZ et le géomètre de Toulouse ne se pose nullement, puisque l'énoncé du problème fut rendu public dès 1643, c'est-à-dire trois ans avant la naissance de LEIBNIZ. Il est même douteux que LEIBNIZ, qui n'avait pas atteint sa vingtième année à la mort de FERMAT — (naissance de LEIBNIZ : 1646 ; mort de FERMAT : 1665) — ait pu s'occuper de la question du vivant de celui-ci.

8. — Il s'agit seulement de savoir si LEIBNIZ, à une date quelconque de son existence, a pu apporter une contribution plus ou moins importante à la résolution de ce problème.

Reprenons la solution du problème de FERMAT. A un facteur carré près, l'arithmotriangle pythagorique peut être représenté par les équations

$$a = 1 , \qquad b = \frac{1 - t^2}{1 + t^2} , \qquad c = \frac{2t}{1 + t^2} ,$$

dans laquelle t désigne un nombre rationnel ; ce nombre est assujetti à vérifier tout d'abord la double inégalité,

$$0 < t < 1 ,$$

---

[1] Solutio problematis Fermatiani de duobus numeris, quorum summa sit quadratum, quadratorum vero summa biquadratum, ad mentem III. Lagrange adornata (5 juin 1780). *Commentationes arithmeticæ*, édition de 1849, pp. 403-405.

A ces références d'EULER, il convient d'ajouter une courte note des *Opera postuma* (Petropoli, t. I, 1862, p. 221) dans laquelle EULER établit l'équivalence des équations :

$$2x^4 - y^4 = \square , \qquad 8p^4 + q^4 = \square .$$

Ces équations ne sont autres que celles que forme LAGRANGE dans son étude du problème de Fermat. (Sur quelques problèmes de l'Analyse de Diophante citée plus loin.) Voir aussi au sujet de ces équations :

M. LEBESGUE. Résolution des équations biquadratiques

$$z^2 = x^4 \pm 2^m y^4 , \qquad z^2 = 2^m x^4 - y^4 , \qquad 2z^2 = x^4 \pm y^4 ;$$

Journal de Mathématiques pures et appliquées (de Liouville), [1], t. XVIII, 1853, p. 73-86.

Edouard LUCAS a étudié les équations de cette forme dans ses *Recherches sur l'analyse indeterminée et l'arithmétique de Diophante*.

Le problème de Fermat est résolu dans cet ouvrage de Ed. LUCAS.

assurant les signes positifs des mesures des cathètes et à satisfaire d'autre part à l'équation qui traduit la condition imposée $b + c = \square$. Cette équation est une équation de Brahmagupta-Fermat du quatrième ordre :

$$(1 + t^2)(1 + 2t - t^2) = \square \ .$$

Si le second membre est pris égal au carré de l'expression

$$1 + t - \frac{\lambda}{2} t^2 \ ,$$

dans laquelle λ est une indéterminée rationnelle, cette équation devient

$$(\lambda^2 + 4) t^2 - 4(\lambda + 2) t - 4(\lambda - 1) = 0 \ ,$$

et la condition de rationalité de t est alors :

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square \ .$$

Telle est la forme canonique à laquelle peut être réduite l'équation indéterminée dont dépend le problème de Fermat.

Le problème de Fermat *est donc réductible à l'étude arithmogéométrique d'une cubique harmonique dont les invariants sont :*

$$g_2 = -\frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad g_3 = 0 \ .$$

Les conditions d'inégalité imposées à t entraînent la condition suivante pour λ : ce nombre rationnel doit être ou bien compris dans l'intervalle $0 < \lambda < 1$ ou bien supérieur à 8. Sinon, c'est-à-dire si λ est compris entre l'unité et huit, car il ne saurait être négatif en vertu même de l'équation

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square \ ,$$

la solution de celle-ci correspond non plus au problème de Fermat, mais au problème pour lequel la différence et non la somme des cathètes est un nombre carré. C'est ce qui se produit pour $\lambda = 1$ ou encore pour $\lambda = \frac{49}{36}$, cas auxquels correspond un véritable triangle $t = \frac{12}{5}$ de côtés 169, 120 et 119.

9. — Ainsi donc, le problème de Fermat dépend analytiquement d'une équation indéterminée qui peut aussi être mise sous la forme :

$$\lambda + \frac{8}{\lambda} = \square \, .$$

Or il se trouve que Leibniz a rencontré ce genre d'équations,

$$x + \frac{a}{x} = \square \, ,$$

où figure un nombre rationnel a (sans rapport avec l'hypoténuse de l'arithmotriangle pythagorique considéré plus haut); il reste trace de ces recherches de Leibniz dans les deux pièces suivantes :

a) *Invenire triangulum rectangulum in numeris cujus area sit quadratus* (29 décembre 1678), *Leibnizens mathematische Schriften,* Gerhardt, [2], III, 1863, p. 120-125.

b) *Exercitium ad promovendam scientiam numerorum,* ibid., [2], III, 1863, p. 114-119.

Dans la première de ces pièces, il est question de l'équation particulière :

$$x - \frac{1}{x} = \square \, ;$$

tandis que dans la seconde il s'agit de l'équation générale :

$$x + \frac{a}{x} = \square \, .$$

C'est la seule trace d'un travail de Leibniz sur ce sujet que j'aie pu jusqu'ici retrouver. La question reste donc posée.

L'origine probable du problème de Torricelli.

10. — Revenons à Torricelli et à son problème retrouvé par M. Gino Loria.

La solution donnée par Fermat lui-même, retrouvée par Billy et par Euler

$$a = 4\ 687\ 298\ 610\ 289 \, ,$$

$$b = 4\ 565\ 486\ 027\ 761 \, ,$$

$$c = 1\ 061\ 652\ 293\ 520 \, ,$$

est la plus simple de toutes les solutions en nombre illimité de ce problème, qui peut être rattaché à l'étude arithmogéométrique d'une cubique plane ou d'une biquadratique gauche[1]. Cette propriété est formellement énoncée dans le passage ci-dessus rapporté de la pièce, en date du 15 novembre 1775, des *Miscellanea Analytica* d'Euler. Ce point fut d'ailleurs à nouveau établi par l'analyse remarquable de Lagrange[2], en 1777.

La somme $a + b$ des valeurs précédentes de l'hypoténuse a et de la cathète moyenne b est un nombre (terminé par 50) qui ne saurait être carré parfait. Cette solution la plus simple ne satisfait donc pas à la troisième condition de Torricelli; d'où il résulte que le problème de Torricelli, s'il est possible *en nombres entiers positifs,* n'admet pas de solutions de moins de treize chiffres. La condition supplémentaire imposée par le disciple de Galilée ne fait donc que compliquer un problème déjà dénué de solution simple.

11. — Il se peut pourtant que Torricelli ait voulu poser un problème qui n'est guère différent de celui de Fermat, qui lui est intimement lié et qui admet une solution simple.

L'étude du problème de Fermat, lorsqu'il est soumis à certaines méthodes de résolution, le rend, en effet, absolument inséparable du problème pour lequel la somme des cathètes est remplacée par leur différence. C'est ce qui se produit notamment dans l'analyse géométrique, au moyen d'une cubique plane ou d'une biquadratique gauche; la somme des cathètes n'est pas alors nécessairement la somme de leurs valeurs arithmétiques.

Billy a parfaitement rendu compte, dans son analyse, de cette circonstance; il a le premier signalé l'existence d'un arithmotriangle pythagorique remarquable dont les côtés sont des nombres bien simples :

$$a = 169 \ , \qquad b = 120 \ . \qquad c = 119 \ ;$$

---

[1] Voir à ce sujet mes « Notions d'arithmogéométrie » dans *L'Enseignement mathématique,* XIXe année, mai 1917, p. 167-168.

[2] Sur quelques problèmes de l'analyse de Diophante, Nouveau Mémoire de l'Académie royale des Sciences et Belles-Lettres de Berlin, 1777; *Œuvres de Lagrange,* t. IV. Paris, 1869, pp. 377-398.

ces nombres satisfont aux conditions simultanées :

$$a = \square\ , \qquad b - c = \square\ .$$

Pour cet arithmotriangle pythagorique la troisième condition de Torricelli *est satisfaite, que l'on considère la somme ou la différence de l'hypoténuse et de la cathète moyenne,* puisque les nombres précédents vérifient les deux conditions

$$a + b = 289 = \square\ ,$$
$$a - b = 49 = \square\ ;$$

il convient de remarquer que ces deux conditions simultanées se réduisent à une seule, puisque le produit $(a + b)(a - b)$ est égal au carré de la cathète c.

La véritable signification et l'origine du problème de Torricelli se rattachent elles aux remarques qui viennent d'être faites ? C'est possible, mais peu vraisemblable.

12. — L'origine plus probable du problème de Torricelli me semble résider dans la remarque que, si la somme des côtés $a + b$ n'est pas un carré, dans l'exemple donné par Fermat, par contre la *somme de l'hypoténuse et du plus petit côté est un carré :*

$$a + c = 5 \cdot 748 \cdot 950 \cdot 903 \cdot 809 = (2 \cdot 397\ 697)^2\ .$$

Indépendamment de ce fait particulier et d'une manière plus générale, un *triangle en nombres* (selon l'expression des géomètres du XVIIe siècle) étant représenté par les nombres entiers p et q, les côtés sont exprimables par les formules

$$a = (p^2 + q^2).\lambda\ , \qquad b = (p^2 - q^2).\lambda\ , \qquad c = 2pq.\lambda\ ,$$

dans lesquelles λ est un paramètre entier de similitude : ce sont les formules de Brahmagupta. Les trois conditions

$$a = \square\ , \qquad a + c = \square\ , \qquad b + c = \square\ ,$$

deviennent dans ce mode de représentation :

$$(p^2 + q^2)\lambda = \square\ , \qquad (p + q)^2\lambda = \square\ , \qquad (p^2 + 2pq - q^2)\lambda = \square\ :$$

la seconde n'est autre que $\lambda = \square$; *le triangle à côtés premiers entre eux semblable à un triangle de cette espèce*, triangle qui s'obtient en prenant $\lambda = 1$ et p et q premiers entre eux, remplit *ipso facto* cette condition. Abstraction faite d'une similitude assez banale, il y a donc lieu de se borner à ce cas des triangles à côtés premiers entre eux, triangles que Frénicle a nommés *triangles primitifs*.

De ce qui précède, il résulte donc que *dans tout triangle primitif la somme de l'hypoténuse et d'une des deux cathètes est toujours un nombre carré.* Cette propriété bien simple ne pouvait pas être inconnue de Torricelli.

Tout s'explique donc. Dans l'exemple de Fermat, le triangle primitif dont les *nombres* sont

$$p = 2\ 150\ 905\ ,$$

$$q = \quad 246\ 792\ ,$$

c'est la somme de l'hypoténuse et de la plus petite cathète qui se trouve être un carré parfait. Cette circonstance se produit toutes les fois que l'inégalité

$$p^2 - q^2 > 2pq\ ,$$

est vérifiée, c'est-à-dire lorsque le rapport $\frac{p}{q}$ des nombres du triangle (p étant le plus grand des deux nombres) est supérieur à $\sqrt{2} + 1$. Dans le cas actuel, cette condition est manifestement remplie, $\frac{p}{q}$ étant de l'ordre de 8.

Le problème de Torricelli consiste précisément à rechercher un triangle primitif, appartenant à cette famille des solutions du problème de Fermat, mais pour lequel le rapport $\frac{p}{q}$ des deux nombres du triangle soit inférieur à la limite précédente $\sqrt{2} + 1$. Et nous devons conclure que *la condition supplémentaire de* Torricelli *est une simple condition d'inégalité, le problème de* Torricelli *étant analytiquement identique à celui de* Fermat.

Remarque sur les deux dernières conditions du théorème de Torricelli.

13. — Laissant de côté la condition que l'hypoténuse soit mesurée par un carré, prenons l'ensemble des deux conditions :

$$b + c = \square , \qquad a + c = \square .$$

Il n'est pas possible d'ailleurs de leur adjoindre la condition analogue :

$$a + b = \square ;$$

si dans un arithmotriangle pythagorique les trois sommes de côtés pris deux à deux étaient, en effet, trois nombres carrés parfaits, les nombres de ce triangle satisferaient aux trois équations :

$$(p + q)^2\lambda = \square , \qquad 2p^2\lambda = \square , \qquad (p^2 + 2pq - q^2)\lambda = \square ;$$

et λ serait simultanément un carré et le double d'un carré.

Reste donc à étudier le système des deux conditions :

$$b + c = \square , \qquad a + c = \square ;$$

la seconde permet de limiter le problème aux triangles primitifs ($\lambda = 1$) pour lesquels elle est d'ailleurs *ipso facto* remplie. Le problème est ainsi réductible à une seule équation de Brahmagupta-Fermat du second ordre

$$p^2 + 2pq - q^2 = \square ,$$

dont la solution générale est

$$\frac{q}{p} = 2\frac{1 - x}{1 + x^2} ,$$

en fonction d'un paramètre rationnel quelconque x.

On peut encore prendre pour un de ces arithmotriangles

pythagoriques, qui ne sont définis qu'à un facteur carré près, celui dont les côtés sont :

$$a = \frac{c^2}{4} + 1 , \qquad b = \frac{c^2}{4} - 1 , \qquad \text{avec} \qquad c = \frac{\lambda^2 + (\lambda - 1)^2}{\lambda} ,$$

λ restant un paramètre arbitraire.

Ce problème est donc de ceux qui se résolvent complètement et dont la solution générale peut être formulée en fonction de deux paramètres.

14. — De la solution générale qui précède de cette question bien simple, résulte immédiatement l'équation dont dépend le problème de Torricelli. Il suffit de poser, à un facteur près sans importance,

$$p = 1 + x^2 , \qquad q = 2(1 - x) ;$$

et de résoudre le problème des arithmodistances pour l'arithmoparabole que représentent, dans le système de coordonnées rectangulaires p et q, ces deux équations paramétriques ; l'équation obtenue,

$$(x^2 + 1)^2 + 4(x - 1)^2 = \square ,$$

est une équation de Brahmagupta-Fermat du quatrième ordre :

$$x^4 + 6x^2 - 8x + 5 = \square .$$

Les solutions acceptables doivent satisfaire en outre à des inégalités qui assurent les signes positifs des cathètes des arithmotriangles pythagoriques correspondants, ainsi que l'ordre de grandeur $c > b$; il faut donc que q soit positif et que le rapport $\frac{p}{q}$ soit compris entre l'unité et $\sqrt{2} + 1$. Des trois inégalités

$$x < 1 < \frac{1 + x^2}{2(1 - x)} < \sqrt{2} + 1 ,$$

il résulte que le nombre rationnel x doit être compris soit dans l'intervalle

$$-(\sqrt{2} + 1) - 2\sqrt{\sqrt{2} + 1} < x < -(\sqrt{2} + 1) ,$$

soit dans l'intervalle :

$$\sqrt{2} - 1 < x < -(\sqrt{2} + 1) + 2\sqrt{\sqrt{2} + 1} .$$

En posant

$$x^4 + 6x^2 - 8x + 5 = (x^2 + 1 - 2\mu)^2 ,$$

cette équation indéterminée devient

$$(\mu + 1)x^2 - 2x + 1 + \mu - \mu^2 = 0 ,$$

et la condition de rationalité de x fournit la forme canonique suivante de l'équation du problème :

$$\mu^3 - 2\mu = \square .$$

Le problème de Torricelli *est ainsi rattaché à l'étude d'une cubique harmonique d'invariants* $g_2 = 8$, $g_3 = 0$.

Cette équation $\mu^3 - 2\mu = \square$ dérive de l'équation déjà formée $\lambda^3 + 8\lambda = \square$ par la substitution :

$$\lambda = \mu - \frac{2}{\mu} .$$

De la décomposition de certaines équations de Brahmagupta-Fermat.

15. — Soit tout d'abord une équation cubique de Brahmagupta-Fermat, telle que le polynôme entier cubique de son premier membre soit doué au moins d'un zéro rationnel ; si x_0 est le zéro rationnel du polynôme cubique $f(x)$, par une transformation $x = x_0 + ky$, celui-ci se change en un polynôme $y \cdot g(y)$, produit par la nouvelle indéterminée y d'un trinôme $g(y)$ du second degré.

L'équation de Fermat $f(x) = \square$ devient ainsi $y \cdot g(y) = \square$, ou en explicitant les coefficients :

$$y(Ay^2 + By + C) = \square ;$$

A, B, C pouvant toujours être considérés comme étant des entiers qui ne sont pas nécessairement premiers entre eux,

mais dont le plus grand diviseur commun n'a que des facteurs premiers à la première puissance.

L'indéterminée y est un nombre rationnel ; soit $\frac{P}{Q}$ la fraction irréductible qui lui est égale. L'équation précédente peut alors être écrite :

$$PQ(AP^2 + BPQ + CQ^2) = \square .$$

Sous cette forme, on voit que tout facteur premier de P, qui n'entre pas sous une puissance paire, dans la composition factorielle de ce nombre P doit être un facteur premier, sous une puissance impaire, du coefficient C. De même, tout facteur premier de Q, qui ne figure pas sous une puissance paire dans la décomposition de Q, doit aussi être un facteur premier, sous une puissance impaire, du coefficient A.

Soit donc α un diviseur quelconque, à facteurs premiers simples, du coefficient A et γ un diviseur quelconque, de même nature, du coefficient C ; soient A′ et C′ les quotients de A par α et de C par γ :

$$A = \alpha A' , \qquad C = \gamma C' ;$$

en se bornant aux couples α et γ de diviseurs qui sont premiers entre eux, il y aura lieu de faire les essais de nombres P et Q des formes suivantes :

$$P = \gamma p^2 , \qquad Q = \pm \alpha q^2 ;$$

dans ces formules, p et q sont deux entiers qui doivent satisfaire à une nouvelle équation de Brahmagupta-Fermat :

$$\pm (A'\gamma p^4 + Bp^2q^2 + C'\alpha q^4) = \square ;$$

cette équation est bicarrée. Par suite :

La connaissance d'un zéro rationnel du polynôme f(x) *du premier membre d'une équation cubique de* Brahmagupta-Fermat *permet de* DÉCOMPOSER L'ÉTUDE DE CELLE-CI EN CELLES D'UN NOMBRE LIMITÉ D'ÉQUATIONS BICARRÉES DE Brahmagupta-Fermat.

L'intérêt de cette proposition réside dans l'importance considérable des équations bicarrées de Brahmagupta-Fermat,

qui ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux généraux ou spéciaux.

16. — Un cas particulier très important est celui pour lequel les coefficients A, C du trinôme du second degré se réduisent tous deux aux nombres $+1$ ou -1. Les quatre cas correspondants se réduisent effectivement à deux par un simple changement de signe de l'indéterminée y. Ce sont les deux cas :

$$y(y^2 + By \pm 1) = \square .$$

L'équation correspondante

$$PQ(P^2 + BPQ + \varepsilon Q^2) = \square \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

ne peut être vérifiée qu'en prenant pour P et Q des nombres rationnels dont les valeurs absolues sont des carrés parfaits ; il y aura lieu de poser

$$P = p^2 , \qquad Q = \varepsilon' q^2 \qquad (\varepsilon' = \pm 1)$$

et par suite de rechercher les solutions de l'équation bicarrée

$$\varepsilon'(p^4 + \varepsilon' Bp^2q^2 + \varepsilon q^4) = \square .$$

Comme le signe de ε est déterminé par l'énoncé même de la question, il suffira de considérer successivement les deux équations

$$p^4 + Bp^2q^2 + \varepsilon q^4 = \square ,$$
$$-p^4 + Bp^2q^2 - \varepsilon q^4 = \square .$$

Soit, pour fixer les idées [1], l'équation arithmotrigonométrique $\sin u + \sin v = 1$; elle peut être mise sous la forme équivalente

$$\sin X - \cos Y = 1 ;$$

par définition même des équations arithmotrigonométriques, il s'agit de rechercher les solutions rationnelles $x = \operatorname{tang}\frac{X}{2}$ et $y = \operatorname{tang}\frac{Y}{2}$ de l'équation

$$\frac{2x}{1 + x^2} = \frac{2}{1 + y^2} ,$$

[1] Voir les *Notions d'arithmogéométrie*, paragraphe 74 : *L'Enseignement mathématique*, 1917, p. 240.

ou encore les arithmopoints de la cubique d'équation :

$$y^2 = x + \frac{1}{x} - 1 \ ;$$

cette équation

$$x(x^2 - x + 1) = \square$$

rentre dans la catégorie précédente. Elle ne peut être satisfaite que si x est au signe près un carré parfait. Mais comme le trinôme $x^2 - x + 1$ est dénué de zéros réels et garde toujours le signe positif, pour toutes les variations de x, il suffit de borner les essais au seul cas $x = z^2$; l'équation bicarrée obtenue ainsi,

$$z^4 - z^2 + 1 = \square \ ,$$

a été rencontrée par L. Euler[1] qui en a établi l'impossibilité, sauf pour les valeurs $z = 0, \pm 1, \pm \infty$. Par suite :

L'équation arithmotrigonométrique

$$\sin u + \sin v = 1$$

est impossible et n'admet que des solutions banales.

17. — Considérons maintenant et d'une manière analogue, une équation de Brahmagupta-Fermat du quatrième ordre $f(x) = \square$, dans laquelle le polynôme $f(x)$ du quatrième degré est ou peut être décomposé en un produit de deux polynômes quadratiques à coefficients rationnels. Prenons :

$$f(x) \equiv (Ax^2 + Bx + C)(A'x^2 + B'x + C') \ ;$$

les coefficients A, B, C, A′, B′, C′ peuvent toujours être supposés entiers; le plus grand commun diviseur de (A, B, C) et celui de (A′, B′, C′) peuvent tous deux être supposés dépourvus de facteurs affectés d'un exposant autre que l'unité. Ces deux plus grands communs diviseurs peuvent en outre être supposés premiers entre eux.

En explicitant la valeur $\frac{P}{Q}$, supposée fraction irréductible, du nombre rationnel x, l'équation devient

$$(AP^2 + BPQ + CQ^2)(A'P^2 + B'PQ + C'Q^2) = \square \ .$$

[1] Id., paragraphe 88, p. 259.

Tout facteur premier de la valeur numérique de l'un des trinômes, $AP^2 + BPQ + CQ^2$ par exemple, qui se trouve engagé sous une puissance impaire dans la composition factorielle de ce nombre, doit se retrouver, et sous une puissance impaire, dans la composition factorielle de la valeur numérique de $A'P^2 + B'PQ + C'Q^2$.

Cette remarque peut surtout être utilisée avec profit. Supposons, par exemple, que l'équation à étudier soit

$$(x^2 + 1)(3 - x^2) = \square ,$$

ou encore

$$(P^2 + Q^2)(3P^2 - Q^2) = \square .$$

Un diviseur premier commun à $P^2 + Q^2$ et $3P^2 - Q^2$ devrait diviser $4P^2$, c'est-à-dire $2P$; ce facteur ne peut être un facteur de P, car il devrait diviser Q qui est premier avec P; ce facteur ne peut donc être que le nombre deux ou l'unité au signe près. Mais, le premier facteur $P^2 + Q^2$ étant essentiellement positif, la question de signe disparaît; il ne reste que deux alternatives; ou bien

$$P^2 + Q^2 = \square \qquad \text{avec} \qquad 3P^2 - Q^2 = \square ,$$

ou bien

$$P^2 + Q^2 = 2\square \qquad \text{avec} \qquad 3P^2 - Q^2 = 2\square .$$

Le premier système contient une équation impossible, $3P^2 - Q^2 = \square$, puisque le nombre trois ne saurait être somme de deux carrés (théorème de Fermat); il reste donc le seul cas du système :

$$P^2 + Q^2 = 2\square , \qquad 3P^2 - Q^2 = 2\square .$$

En posant alors

$$P = \alpha + \beta , \qquad Q = \alpha - \beta ,$$

ce système devient le suivant, beaucoup plus symétrique :

$$\alpha^2 + \beta^2 = \square , \qquad \alpha^2 + 4\alpha\beta + \beta^2 = \square .$$

Ce dernier système se transforme par la substitution définie par la relation

$$\frac{\alpha}{2t} = \frac{\beta}{1 - t^2}$$

en une nouvelle équation unique de Brahmagupta-Fermat :

$$(t^2 + 1)^2 + 8t(1 - t^2) = \square \ .$$

Ainsi donc l'équation primitivement considérée a été transformée en une équation du même degré ; en réalité, la question a fait un grand pas vers sa solution, car alors que l'équation donnée, c'est-à-dire l'équation

$$3 + 2x^2 - x^4 = \square \ ,$$

n'appartient pas à l'un des types connus de résolubilité, à la nouvelle équation

$$t^4 - 8t^3 + 2t^2 + 8t + 1 = \square \ ,$$

au contraire, il est possible d'appliquer les méthodes de Fermat et cette application des méthodes générales peut être effectuée pour l'une ou l'autre des deux termes extrêmes de l'équation.

Le mieux est d'égaler le polynôme du premier membre au carré du trinôme $t^2 + 4zt + 1$; l'équation restante, du second degré en t,

$$(z + 1)t^2 + 2z^2t + z - 1 = 0 \ ,$$

ne saurait avoir de racine rationnelle puisque l'équation

$$z^4 - z^2 + 1 = \square$$

est impossible.

Ce dernier résultat tient au fait que l'équation

$$(x^2 + 1)(3 - x^2) = \square$$

est transformée en l'équation

$$X^4 - (2X + 2)^2 = \square$$

par la substitution homographique

$$x = 1 + \frac{2}{X} \ ;$$

l'équation transformée peut être traitée par la méthode de Fermat, en posant :

$$X^4 - 4(X + 1)^2 = (X^2 - 2\lambda)^2 \ ;$$

λ doit satisfaire à l'équation du paragraphe précédent :

$$\lambda^3 - \lambda^2 + \lambda = \square .$$

L'impossibilité de l'équation considérée, ou encore celle du système des équations simultanées :

$$X^2 + 2X + 2 = \square , \qquad X^2 - 2X - 2 = \square ,$$

est équivalente à celle de l'équation $\sin u + \sin v = 1$.

Application des considérations précédentes au problème de Torricelli.

18. — Au paragraphe 8, la solution du problème de Fermat a été rattachée par une voie toute naturelle à l'étude des solutions rationnelles de l'équation de Brahmagupta-Fermat :

$$(1 + t^2)(1 + 2t - t^2) = \square .$$

Cette équation est du type qui vient d'être considéré à l'instant : le polynôme du quatrième degré du premier membre est décomposé en un produit de facteurs quadratiques à coefficients rationnels.

La traduction analytique de l'énoncé du problème de Fermat pouvait fort bien se présenter à Torricelli sous une forme équivalente, à la seule condition d'utiliser les formules de Diophante et non les formules de Brahmagupta, dans la représentation de l'arithmotriangle pythagorique.

Ces formules de Diophante,

$$b = \frac{P^2 - Q^2}{P^2 + Q^2} a , \qquad c = \frac{2PQ}{P^2 + Q^2} a ,$$

ramènent la recherche des arithmotriangles pythagoriques, jouissant des deux propriétés énoncées $a = \square$ et $b + c = \square$, à l'étude des solutions entières de l'équation indéterminée :

$$(P^2 + Q^2)(P^2 + 2PQ - Q^2) = \square .$$

Tout facteur premier de l'un des deux polynômes quadratiques doit être un facteur premier de l'autre, et dans les

deux cas sous des puissances impaires; or tout diviseur commun des deux polynômes quadratiques appartient aussi à leur somme et à leur différence :

$$2P(P+Q)\ , \qquad 2Q(P-Q)\ ;$$

P et Q étant premiers entre eux, par définition, ce facteur commun ne peut être que le nombre deux.

Comme d'autre part, en raison de la présence de P^2+Q^2, aucun doute n'est possible sur les signes, l'équation se décompose soit en le système :

$$P^2+Q^2=\square\ , \qquad P^2+2PQ-Q^2=\square\ ,$$

soit en le système :

$$P^2+Q^2=2\square\ , \qquad P^2+2PQ-Q^2=2\square\ ;$$

le second système se ramène d'ailleurs au premier par la substitution $P+Q=2P_1$, $P-Q=2Q_1$; en d'autres termes, à toute solution t_1 correspond une nouvelle solution $t=\frac{1-t_1}{1+t_1}$, ce qui résulte de la symétrie qui existe dans les rôles des deux cathètes.

L'équation

$$(P^2+Q^2)(P^2+2PQ-Q^2)=\square\ ,$$

du problème de Fermat *se décompose ainsi en deux équations simultanées*

$$P^2+Q^2=\square\ , \qquad P^2+2PQ-Q^2=\square\ ,$$

dont le système lui est équivalent.

Nous avons alors :

$$a+c=\frac{(P+Q)^2}{P^2+Q^2}a=\square\ ,$$

nous retrouvons ainsi que la somme de l'hypoténuse et de *l'une* des deux cathètes est un nombre carré parfait.

La solution générale de l'équation $P^2+2PQ-Q^2=\square$ étant donnée par la formule

$$\frac{Q}{P}=2.\frac{1-x}{1+x^2}\ ,$$

nous sommes, par cette méthode et en utilisant l'équation $P^2 + Q^2 = \square$, ramenés à l'équation,

$$(x^2 + 1)^2 + 4(x - 1)^2 = \square \ ;$$

du paragraphe 14.

19. — Pour terminer, il convient de remarquer que les considérations générales du paragraphe 15 s'appliquent précisément aux équations

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square \qquad \text{et} \qquad \mu^3 - 2\mu = \square$$

des paragraphes 8 et 14. J'ai déjà signalé que la seconde n'est qu'une conséquence de la première par la transformation

$$\lambda = \mu - \frac{2}{\mu} \ ,$$

qui implique d'ailleurs que λ soit un carré parfait.

L'équation

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square \qquad \text{ou} \qquad \lambda(\lambda^2 + 8) = \square$$

est bien de l'espèce considérée au paragraphe 15. En posant $\lambda = \frac{P}{Q}$, elle devient

$$PQ(P^2 + 8Q^2) = \square \ ;$$

Q ne peut avoir de facteur premier à une puissance impaire : c'est nécessairement au signe près un carré parfait. Quant à P, il est de même de l'une des formes $\pm p^2$ ou $\pm 2p^2$. Le produit PQ devant être positif, la question de signe ne se pose pas et il suffit de prendre :

$$P = 2p^2 \quad \text{ou} \quad p^2 \qquad \text{et} \qquad Q = q^2 \ .$$

La première hypothèse, $P = 2p^2$, $Q = q^2$ donne :

$$2(p^4 + 2q^4) = \square \ ;$$

le nombre entier p doit donc être pair ; soit $p = 2p'$; l'équation devient

$$8p'^4 + q^4 = \square \ ;$$

et la solution correspondante est $\lambda' = 8\frac{p'^2}{q^2}$. Quant à la se-

conde hypothèse, elle donne la même équation :

$$p^4 + 8q^4 = \square ,$$

mais avec $\lambda = \frac{p^2}{q^2}$. Entre les deux solutions λ et λ', qui correspondent ainsi à une même solution de l'équation

$$\omega^4 + 8 = \square ,$$

existe la relation $\lambda\lambda' = 8$, laissant invariante l'équation

$$\lambda^3 + 8\lambda = \square .$$

En résumé : les solutions de cette dernière équation sont des nombres rationnels carrés ou doubles de carrés, et elles se transforment en l'équation :

$$\omega^4 + 8 = \square .$$

Nous retombons ainsi sur l'analyse de Lagrange (pages 386 et 387 du mémoire cité); les plus simples solutions sont (d'après Lagrange) :

$$\omega = 1 , \quad \frac{7}{6} , \quad \frac{239}{13} , \ldots$$

20. — L'équation

$$\mu^3 - 2\mu = \square$$

se laisse traiter d'une manière analogue ; μ est au signe près un carré ou le double d'un carré et, suivant les cas, cette équation se transforme en l'une ou l'autre des équations :

$$2x^4 - y^4 = \square , \quad x^4 - 2y^4 = \square .$$

Lagrange (pages 378-379 de son remarquable Mémoire) a bien remarqué qu'alors que les équations $x^4 + y^4 = \square$, $x^4 \pm 4y^4 = \square$, $2(x^4 \pm y^4) = \square$, $x^4 + 2y^4 = \square$ sont impossibles, d'après Diophante, Fermat ou Euler, il n'en est pas de même de l'une et de l'autre des deux équations

$$2x^4 - y^4 = \square , \quad x^4 - 2y^4 = \square ;$$

la première admet les solutions :

$$x = 1 \qquad y = 1$$
$$x = 13 \qquad y = 1$$
$$x = 1525 \qquad y = 1343$$
$$x = 2\cdot165\cdot017 \qquad y = 2\cdot372\cdot159 \ldots ;$$

la seconde admet les solutions[1] :

$$x = 3 \qquad y = 2$$
$$x = 113 \qquad y = 84$$
$$x = 57\cdot123 \qquad y = 6\ 214 \ldots$$

Plus loin (p. 386 et 387), LAGRANGE a mis en évidence l'équivalence de chacune de ces deux équations avec l'équation $s^4 + 8t^4 = \square$ du paragraphe précédent. J'ai noté au paragraphe 6 qu'une pièce des *Opera postuma* de L. EULER concernait également l'équivalence des équatione $s^4 + 8t^4 = \square$ et $2x^4 - y^4 = \square$.

Si d'ailleurs on applique à la cubique d'équation

$$x^3 - 2x = y^2$$

la méthode de dérivation des arithmopoints au moyen de la tangente, on trouve que les coordonnées (x_2, y_2) du nouveau point d'intersection de la cubique avec la tangente au point (x_1, y_1) sont fournies par les formules :

$$x_2 = x_1 + 2y.\rho\ , \qquad y_2 = y_1 + (3x^2 - 2)\rho\ ,$$

avec

$$\rho = \frac{16x^2 - 3y^4}{8x^2y^3} = \frac{4 + 12x^2 - 3x^4}{8y^3}\ ;$$

la loi de succession des abscisses est notamment la suivante :

$$x_2 = \left(\frac{x_1^2 + 2}{2y}\right)^2\ ;$$

[1] Une erreur s'est glissée dans l'édition des *Œuvres* de LAGRANGE (p. 378), où le nombre y de la troisième solution particulière de l'équation $x^4 - 2y^4 = \square$ est égal à 2·614 ; alors que la véritable valeur de ce nombre est celle ci-dessus indiquée (6·214).

la cubique admet une série d'arithmopoints d'abscisses

$$x_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^2, \qquad x_2 = \left(\frac{113}{84}\right)^2, \ldots$$

qui sont toutes des nombres rationnels carrés parfaits.

L'application au problème de Fermat des principes généraux relatifs aux équations de Brahmagupta-Fermat, soit cubiques à zéro rationnel, soit du quatrième degré à premier membre décomposable en un produit de facteurs rationnels du second degré, permet, en résumé, d'expliquer l'origine du problème de Torricelli; elle ramène méthodiquement, en outre, la discussion de l'équation de ce problème de Fermat et d'Ev. Torricelli à l'analyse de Lagrange et d'Euler.

Paris, le 5 février 1918.

REMARQUE SUR L'INTÉGRALE $\int uv\,dx$

PAR

M. Michel Petrovitch (Belgrade).

Il est manifeste qu'il n'existe aucune fonction u de la variable x telle que l'intégrale définie

$$\mathrm{I} = \int_0^\infty uv\,dx \tag{1}$$

ait une valeur finie, déterminée et différente de zéro *quel que soit le polynôme* v *en* x.

Un fait curieux est, cependant, à signaler: *il existe des fonctions* u *de* x *pour lesquelles l'intégrale* (1) *a une valeur finie, déterminée et différente de zéro quel que soit le polynôme* v *en* x *à coefficients nombres algébriques* (entiers, com-

mensurables ou irrationnels algébriques, réels ou imaginaires, positifs ou négatifs).

Tel est, par exemple, le cas de la fonction

$$u = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} \tag{2}$$

la racine carrée $\sqrt{x}$ ayant sa détermination positive.

En effet, la formule connue

$$B_{2n} = \frac{4n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^\infty \frac{z^{2n-1}}{e^z - 1} dz \qquad (z = 1, 2, 3, \ldots) \tag{3}$$

où B_2, B_4, B_6, ... désignent les nombres de Bernoulli, par le changement $z^2 = x$ se transforme en

$$B_{2n} = \frac{2n}{(2\pi)^{2n}} \int_0^\infty \frac{x^{n-1}}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{4}$$

d'où l'on tire

$$\int_0^\infty \frac{x^n dx}{e^{\sqrt{x}} - 1} = \lambda_n \pi^{2(n+1)}, \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{5}$$

où

$$\lambda_n = 2^{2n+1} \frac{B_{2(n+1)}}{n+1}. \qquad \lambda_0 = 2B_2 = \frac{1}{3} \tag{6}$$

Si donc

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p$$

est un polynôme en x arbitraire, on aura

$$\int_0^\infty \frac{P(x)}{e^{\sqrt{x}} - 1} dx = \pi Q(\pi^2), \tag{7}$$

où $Q(x)$ désigne le polynôme

$$Q(x) = a_0\lambda_0 + a_1\lambda_1 x + a_2\lambda_2 x^2 + \ldots + a_p\lambda_p x^p.$$

Lorsque les a_k sont des nombres *algébriques*, les $a_k\lambda_k$ le sont également. L'équation algébrique $Q(x) = 0$ ne pouvant

avoir comme racine le nombre π^2, *l'intégrale* (7) *est finie, déterminée et essentiellement différente de zéro.*

On peut, à l'aide de la fonction (2), former une multitude de fonctions u pour lesquelles l'intégrale (1) jouira de la propriété précédente. Il suffit, par exemple, de se rappeler l'existence de fonctions u de x telles que l'intégrale (1) est *identiquement nulle quel que soit le polynôme* v *en* x. Telles seraient les fonctions signalées par Stieltjes

$$u = e^{-\sqrt[4]{x}} \sin \sqrt[4]{x} , \qquad u = \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt[4]{x}} \cos \sqrt[4]{x} ,$$

ainsi qu'une foule d'autres, pour lesquelles on a

$$\int_0^\infty u x^n \, dx = 0 \qquad \text{pour} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

En désignant une pareille fonction (ou une combinaison linéaire homogène de ces fonctions) par U et en prenant

$$u = \frac{1}{e^{\sqrt{x}} - 1} + \mathrm{U} ,$$

l'intégrale (1) sera finie, déterminée et *différente de zéro* quel que soit le polynôme v à coefficients nombres *algébriques*.

COMBINAISONS DÉTERMINANTES

PAR

Jean HELMIS (Athènes).

Considérons un tableau de $\mu . \nu$ objets, ordonnés en ν lignes et en μ colonnes :

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \cdots & \alpha_{\nu\mu} \end{matrix}$$

J'appelle *combinaisons déterminantes* de ces $\mu . \nu$ objets ν à ν les différents groupes que l'on peut former avec ces $\mu . \nu$ objets en prenant un objet de la première ligne, un autre de la deuxième et ainsi de suite, et enfin un autre encore de la $\nu^{\text{ième}}$, c'est-à-dire les différents groupes de la forme

$$\alpha_{\varkappa_1 \lambda_1} \; \alpha_{\varkappa_2 \lambda_2} \; \cdots \; \alpha_{\varkappa_\nu \lambda_\nu} \tag{1}$$

où $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_\nu$ représentent une permutation des indices des lignes $1, 2, 3 \ldots \nu$ et $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\nu$, ν quelconques des indices des colonnes $1, 2, 3 \ldots \mu$. Dans ces groupes on n'a pas égard à la disposition des objets, par exemple les groupes :

$$\alpha_{11} \quad \alpha_{21} \quad \alpha_{31} \cdots \alpha_{\nu 1} \qquad \text{et} \qquad \alpha_{21} \quad \alpha_{11} \quad \alpha_{31} \cdots \alpha_{\nu 1}$$

seront les mêmes, ou bien on ne considère pas les groupes de la seconde forme.

Pour plus grande clarté je donne aux indices $\varkappa_1 \varkappa_2 \ldots \varkappa_\nu$ de la forme générale (1), la série canonique $1.2.3 \ldots \nu$ lorsque la forme générale des termes devient

$$\alpha_{1\lambda_1} \; \alpha_{2\lambda_2} \; \cdots \; \alpha_{\nu\lambda_\nu} \tag{2}$$

où $\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_\nu$ représentent ν quelconques des nombres $1.2.3 \ldots \mu$.

Je désignerai en général par[1] $O\Sigma_{\nu}^{\mu.\nu}$ le nombre des combinaisons déterminantes de $\mu.\nu$ objets ν à ν, et je chercherai à les trouver.

Soit, au commencement, $\mu = 3$ et $\nu = 2$, savoir soit

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \end{matrix}$$

le tableau des objets donnés ; il est évident que, pour trouver les combinaisons déterminantes de ces objets 2 à 2, il suffit de combiner chaque objet de la première ligne à chacun de la seconde. Je trouve ainsi les groupes :

$$\begin{matrix} \alpha_{11}\alpha_{21} & \alpha_{11}\alpha_{22} & \alpha_{11}\alpha_{23} \\ \alpha_{12}\alpha_{21} & \alpha_{12}\alpha_{22} & \alpha_{12}\alpha_{23} \\ \alpha_{13}\alpha_{21} & \alpha_{13}\alpha_{22} & \alpha_{13}\alpha_{23} \end{matrix}$$

qui sont au nombre de 9, savoir 3^2, et par conséquent

$$O\Sigma_{2}^{3.2} = 3^2 .$$

De même façon je traite le cas où j'aurai $\mu = 3$ et $\nu = 3$, c'est-à-dire lorsque le tableau des objets donnés est le suivant :

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{matrix}$$

savoir, je compose au commencement les combinaisons déterminantes de deux premières lignes 2 à 2 et ensuite j'ajoute à la fin de chacune d'elles l'objet α_{31}, ensuite l'objet α_{32} et enfin l'objet α_{33} ; ainsi j'aurai $9 + 9 + 9$ groupes, c'est-à-dire 3^3.

Je dis que ces groupes sont différents, ceux qui résultent de même combinaison déterminante, différant par le dernier objet, et ceux qui résultent de différentes combinaisons déterminantes, différant par eux-mêmes. Ces groupes sont toutes les combinaisons déterminantes de 3.3 objets 3 à 3, car si l'on imagine une manquante et si l'on retranche d'elle le dernier objet, on aura une combinaison déterminante de 3.2 objets 2 à 2. Mais elles sont toutes examinées, celle aussi qui peut-être manquait. Par suite on a

$$O\Sigma_{3}^{3.3} = 3^3 .$$

---

[1] OΣ, c'est-à-dire Ὁρίζοντες Συνδιασμοί.

Considérons maintenant le cas où $\mu = 4$ et $\nu = 2$, c'est-à-dire soit :

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{matrix}$$

le tableau donné.

On voit comment nous pouvons trouver les combinaisons déterminantes de ces objets 2 à 2 ; il suffit de combiner chaque objet de la première ligne à chacun de la seconde ; nous trouverons alors les groupes suivants :

$$\begin{matrix} \alpha_{11}\,\alpha_{21} & \alpha_{11}\,\alpha_{22} & \alpha_{11}\,\alpha_{23} & \alpha_{11}\,\alpha_{24} \\ \alpha_{12}\,\alpha_{21} & \alpha_{12}\,\alpha_{22} & \alpha_{12}\,\alpha_{23} & \alpha_{12}\,\alpha_{24} \\ \alpha_{13}\,\alpha_{21} & \alpha_{13}\,\alpha_{22} & \alpha_{13}\,\alpha_{23} & \alpha_{13}\,\alpha_{24} \\ \alpha_{14}\,\alpha_{21} & \alpha_{14}\,\alpha_{22} & \alpha_{14}\,\alpha_{23} & \alpha_{14}\,\alpha_{24} \end{matrix}$$

qui sont $4 + 4 + 4 + 4$, c'est-à-dire 4^2, d'où $O\Sigma_2^{4.2} = 4^2$. De là je conclus la formule générale

$$O\Sigma_\nu^{\mu.\nu} = \mu^\nu .$$

Pour démontrer cette formule générale, je démontrerai que si elle est vraie pour une valeur quelconque de ν, elle sera aussi vraie pour cette valeur augmentée de l'unité. Et pour μ aussi.

Soit donc la formule ayant lieu pour la valeur $\nu - 1$, c'est-à-dire soit que

$$O\Sigma_{\nu-1}^{\mu(\nu-1)} = \mu^{\nu-1} .$$

Si j'ajoute au tableau des objets donnés

$$\begin{matrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \cdots & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \cdots & \alpha_{2\mu} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_{\nu-1,1} & \alpha_{\nu-1,2} & \cdots & \alpha_{\nu-1,\mu} \end{matrix}$$

une ligne encore, pour trouver les combinaisons déterminantes ν à ν du nouveau tableau, il suffit à la fin de chacun des $O\Sigma_\nu^{\mu(\nu-1)}$ d'ajouter le premier objet de la nouvelle ligne, après le second et ainsi de suite jusqu'au $\mu^{\text{ième}}$; ainsi j'aurai $\mu . \mu^{\nu-1}$, savoir μ groupes.

Ces groupes sont l'ensemble des combinaisons déterminantes des objets du nouveau tableau ν à ν, car chacun d'eux renferme ν des objets du tableau, un de chaque ligne ; ils diffèrent les uns des

autres, car ceux qui résultent du même $O\Sigma_{\nu-1}^{\mu(\nu-1)}$ diffèrent par le dernier objet, et ceux qui résultent de différents, diffèrent par eux-mêmes; enfin ces groupes sont tous les $O\Sigma_{\nu}^{\mu.\nu}$, car si l'on s'imagine une manquante, et si l'on retranche d'elle le dernier objet, on aura une de $O\Sigma_{\nu-1}^{\mu(\nu-1)}$, mais toutes sont examinées et à la fin de chacune sont portés successivement tous les objets de la nouvelle ligne. Ainsi celle qui, peut-être, manquait est considérée. Par suite

$$O\Sigma_{\nu}^{\mu.\nu} = \mu^{\nu} .$$

J'établirai maintenant que, si la formule considérée est vraie pour une valeur quelconque de μ, elle sera aussi vraie pour cette valeur augmentée de l'unité.

Soit donc la formule ayant lieu pour la valeur $\mu - 1$, c'est-à-dire soit

$$O\Sigma_{\nu}^{(\mu-1).\nu} = (\mu - 1)^{\nu} .$$

Si j'ajoute au tableau des objets donnés une colonne encore, j'aurai :

$$\left| \begin{array}{ccccc} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \cdots & \alpha_{1,\mu-1} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \cdots & \alpha_{2,\mu-1} \\ . & . & . & . & . \\ \alpha_{\nu 1} & \alpha_{\nu 2} & \alpha_{\nu 3} & \cdots & \alpha_{\nu,\mu-1} \end{array} \right| \begin{array}{c} \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{2\mu} \\ . \\ \alpha_{\nu\mu} \end{array} \qquad (\mu\nu)$$

Je cherche à trouver l'ensemble de combinaisons déterminantes de ce nouveau tableau ν à ν; pour cela j'opère comme il suit : Je retranche la $\nu^{\text{ième}}$ ligne du tableau donné et je considère dans le tableau mineur l'ensemble de combinaisons déterminantes $\nu - 1$ à $\nu - 1$

$$O\Sigma_{\nu-1}^{(\mu-1)(\nu-1)} = (\mu - 1)^{\nu-1} ;$$

à la fin de chacun de ces groupes j'ajoute l'objet $\alpha_{\nu\mu}$, j'aurai ainsi $(\mu - 1)^{\nu-1}$ résultats. De la même manière j'opère pour les autres éléments de la nouvelle colonne; c'est-à-dire je retranche la $(\nu - 1)^{\text{ième}}$ ligne du tableau donné et je considère du nouveau tableau mineur l'ensemble de combinaisons déterminantes $\nu - 1$ à $\nu - 1$ et à la fin de chacun de ces groupes j'ajoute l'objet $\alpha_{\nu-1,\mu}$. J'aurai ainsi $(\mu - 1)^{\nu-1}$ nouveaux résultats, et ainsi de suite de tous les éléments de la nouvelle colonne; comme ils sont ν, j'aurai $\nu(\mu - 1)^{\nu-1}$ résultats.

Je considère maintenant les diverses combinaisons de la nouvelle colonne, qui sont $\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}$, et je retranche deux lignes du tableau donné, et je trouve l'ensemble des combinaisons déterminantes $\nu-2$ à $\nu-2$ du nouveau tableau mineur de la seconde classe, qui sont $(\mu-1)^{\nu-2}$; à chacun de ces groupes (aux places convenables) j'ajoute les deux éléments correspondants de la nouvelle colonne. Ainsi je trouverai $\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}(\mu-1)^{\nu-2}$ résultats, et ainsi de suite. Enfin, si je considère les éléments de la nouvelle colonne seulement, j'aurai encore une combinaison déterminante :

$$\alpha_{1\mu}\ \alpha_{2\mu}\ \alpha_{3\mu} \cdots \alpha_{\nu\mu}\ .$$

Donc l'ensemble des combinaisons déterminantes du nouveau tableau $(\mu\nu)$ consistera en l'ensemble des combinaisons déterminantes du tableau donné $(\mu-1)^{\nu-1}$ et en les quantités

$$\nu(\mu-1)^{\nu-1}\ ,\ \frac{\nu(\nu-1)}{1.2}(\mu-1)^{\nu-2}\ ,\ \frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}(\mu-1)^{\nu-3}\ ,\ \ldots,\ 1\ .$$

Donc l'ensemble des combinaisons déterminantes du nouveau tableau sera :

$$(\mu-1)^{\nu}+\nu(\mu-1)^{\nu-1}+\frac{\nu(\nu-1)}{1.2}(\mu-1)^{\nu-2}$$
$$+\frac{\nu(\nu-1)(\nu-2)}{1.2.3}(\mu-1)^{\nu-3}+\ldots+1$$

ou

$$[(\mu-1)+1]^{\nu}\ , \qquad \text{savoir} \qquad O\Sigma_{\nu}^{\mu\nu}=\mu^{\nu}\ .$$

Je dis que ces groupes sont l'ensemble des combinaisons déterminantes ν à ν du nouveau tableau, car chacun d'eux contient ν des objets du tableau et un de chaque ligne ; ils diffèrent aussi les uns des autres, car ceux qui résultent de la même expression

$$O\Sigma_{\nu-k}^{(\mu-1)(\nu-k)} \qquad (k=1,\ 2,\ 3\ \ldots\ \nu-1)$$

diffèrent par les autres k objets, et ceux qui résultent de différentes $O\Sigma_{\nu-k}^{(\mu-1)(\nu-k)}$ diffèrent par eux-mêmes. Enfin ces groupes sont toutes les combinaisons déterminantes de $\mu.\nu$ objets ν à ν, car si l'on imagine une manquante et si l'on retranche d'elle les objets de la nouvelle colonne (de la $\mu^{\text{ième}}$), qu'elle contient, on aura un groupe de

$$O\Sigma_{\nu-k}^{(\mu-1)(\nu-k)} \qquad (k=1,\ 2,\ 3\ \ldots\ \nu-1)$$

mais toutes sont examinées et complétées convenablement par les objets de la nouvelle colonne, ainsi que celle qui peut-être manquait (celle qui peut-être manquait ne peut être la $\alpha_{1\mu}\alpha_{2\mu}\ldots\alpha_{\nu\mu}$, car celle-ci est en évidence). Nous aurons donc, en général

$$O\Sigma_{\nu}^{\mu,\nu} = \mu^{\nu}.$$

Et puisque cette formule est vraie pour les valeurs $\mu = 3$, $\nu = 2$ et que si elle est vraie pour une valeur de μ et ν, elle sera aussi vraie pour cette valeur augmentée de l'unité, il suit qu'elle est générale.

Athènes, 1915.

SUR LA DÉTERMINATION ET QUELQUES PROPRIÉTÉS DES LIGNES ÉLASTIQUES

PAR

M. Zack (Zurich).

L'emploi des coordonnées que M. Cesàro a introduites en Géométrie, dans l'étude des questions se rapportant à la résistance des matériaux présenterait, à mon avis, un grand avantage. Cependant, cette tentative, à ce que je sache, n'a jamais été faite jusqu'ici. Je me propose donc dans les lignes qui suivent de montrer sur un exemple particulier, celui des lames élastiques, comment l'emploi de ces coordonnées simplifie l'étude de ce cas et permet d'obtenir des solutions aussi élégantes qu'utiles dans la pratique.

Pour déterminer un point P d'une courbe C′ correspondant d'après une relation quelconque à un point A d'une courbe C, M. Cesàro se sert d'un *système* rectangulaire *mobile*, l'axe des x étant la tangente et l'axe des y étant la *normale* de C en A. Soient x et y, coordonnées de P, des fonctions de l'arc s de C, A′ le point de C infiniment voisin de A, P′ le point de C′ correspondant à A′, $x + \delta x$ et $y + \delta y$

les coordonnées de P′ dans le système de A, $x + dx$ et $y + dy$ les coordonnées de P′ dans le système de A′, et, enfin, Δx et Δy les coordonnées de A′ dans le système A.

On aura (fig. 1)

$$x + \delta x = \Delta x + (x + dx) \cos \Delta\varphi - (y + dy) \sin \Delta\varphi \ ,$$
$$y + \delta y = \Delta y + (x + dx) \sin \Delta\varphi + (y + dy) \cos \Delta\varphi \ ,$$

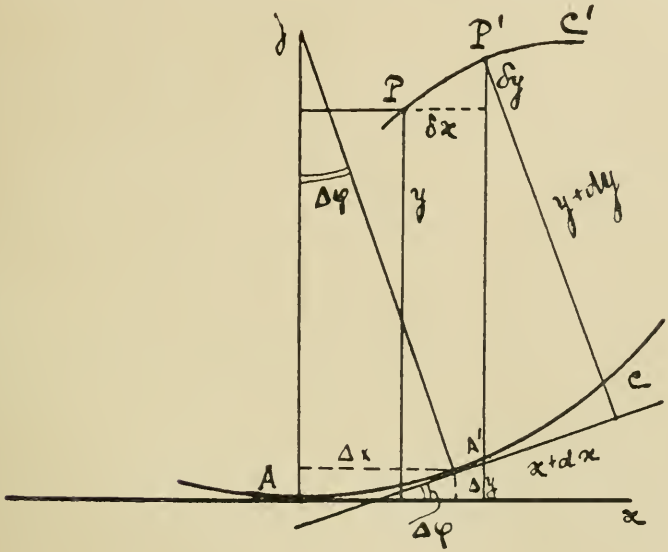


Fig. 1.

d'où, en divisant ces expressions par $ds (= \Delta s)$, en remarquant que $\lim \frac{\Delta x}{\Delta s} = 1$ et $\lim \frac{\Delta y}{\Delta s} = 0$ et en négligeant les infiniment petits d'ordre supérieur on obtient les formules fondamentales de M. Cesàro,

$$\frac{\delta x}{ds} = \frac{dx}{ds} - \frac{y}{\rho} + 1 \ , \qquad \frac{\delta y}{ds} = \frac{dy}{ds} + \frac{x}{\rho} \tag{1}$$

où ρ est le rayon de courbure de C en A.

Rappelons encore brièvement quelques propriétés des vecteurs parallèles. Considérons un système de vecteurs parallèles, positifs ou négatifs, mais généralement non nuls, distribués le long d'une courbe plane OA suivant une cer-

taine loi et dirigés normalement à ce plan. Soit d'autre part μ_k un coefficient attaché au vecteur relatif au point k et déterminant sa grandeur et son sens. *Pour toute portion de la courbe* OA *telle que* OM *l'ensemble des vecteurs peut être remplacé par un vecteur unique appliqué au centre de gravité de l'ensemble des masses* μ_k *correspondant à la portion considérée.*

On sait que la variation de l'angle de courbure en k de la fibre neutre est donnée par l'expression $\Delta d\omega = \frac{M_k}{EI_k} ds$, où M_k est le moment de flexion et I_k le moment d'inertie de la section k. Or, $\Delta d\omega$ est en même temps la rotation de l'élément considéré par rapport à l'élément qui le précède, et peut être représenté par un vecteur normal au plan de OA et de grandeur $\frac{M_k}{EI_k} ds = \mu_k ds$. Pour avoir le siège de la rotation relative de M par rapport à O, il suffira de composer tous les vecteurs μds correspondant à l'arc OM, c'est-à-dire trouver le centre de gravité de l'arc OM de densité μ et y appliquer le vecteur résultant de grandeur $\sigma = \Sigma \mu_k ds$ ou à la limite $\sigma = \int_0^s \mu ds$. On obtient ainsi pour chaque point M un vecteur résultant de grandeur σ appliqué au centre de gravité de l'arc OM de densité μ ou de masse σ. Ainsi, à la courbe OA correspond point par point une courbe (G), lieu des centres de gravité des arcs OM de masse σ. *La connaissance de cette courbe* (G) *permet en même temps d'obtenir la ligne élastique de la lame* OA, *le déplacement d'un point* M *par rapport à* O *étant une rotation* σ *autour de* G. *Le point* M *décrit donc un arc de cercle de centre* G *et de longueur* $\sigma.\overline{GM}$.

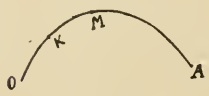


Fig. 2.

Or, si on prend pour axes de coordonnées le axes de M. Cesàro, c'est-à-dire la tangente et la normale de OA en M, les équations qui déterminent la courbe (G) s'écriront

$$\frac{d\sigma x}{ds} = \frac{\sigma y}{\rho} - \sigma, \qquad \frac{d\sigma y}{ds} = -\frac{\sigma x}{\rho}, \tag{2}$$

où x et y sont les coordonnées de (G) par rapport aux axes choisis et ρ — le rayon de courbure de OA en M [1].

Supposons que la rotation est très petite (ce qui arrive généralement), de sorte que son carré est négligeable devant σ. On peut alors confondre l'arc $\sigma.\overline{GM}$ avec sa tangente et les équations de la ligne élastique s'obtiendront en posant dans (2) $\sigma y = \xi$ et $\sigma.x = -\eta$, ξ et η étant les coordonnées du point de la ligne élastique correspondant à M, dans le système d'axes choisi. On aura

$$\frac{d\eta}{ds} = \sigma - \frac{\xi}{\rho}, \qquad \frac{d\xi}{ds} = \frac{\eta}{\rho}. \tag{3}$$

Si σ et s sont données en fonction de φ, les équations (3) s'écriront

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \sigma\frac{ds}{d\varphi} - \xi, \qquad \frac{d\xi}{d\varphi} = \eta. \tag{3'}$$

Dans le cas particulier où OA est un arc de cercle, $s = a\varphi$, les équations (3′) deviennent

$$\frac{d\eta}{d\varphi} = \sigma a - \xi, \qquad \frac{d\xi}{d\varphi} = \eta. \tag{3''}$$

Remarquons qu'il suffit de connaître *une* courbe (E) *quelconque* satisfaisant aux équations (3) et un seul point de la ligne élastique correspondant à un point déterminé de la

---

[1] Les équations (2) s'obtiennent de la façon suivante : Les formules (1) deviennent dans le cas de la figure 3 :

$$\frac{\delta u}{ds_1} = \frac{\partial u}{\partial s_1} - \frac{v}{\rho} + 1, \qquad \frac{\delta v}{ds_1} = \frac{\partial v}{\partial s_1} + \frac{u}{\rho}. \tag{a}$$

Pour que u et v définissent un point et un seul quel que soit s_1, il faut que δu et δv soient nuls, c'est-à-dire

$$\frac{\partial u}{\partial s_1} = \frac{v}{\rho} - 1, \qquad \frac{\partial v}{\partial s_1} = -\frac{u}{\rho}. \tag{b}$$

Posons

$$\sigma x = \int_0^{s_2} \mu u ds_2 \qquad \text{et} \qquad \sigma y = \int_0^{s_2} \mu v ds_2. \tag{c}$$

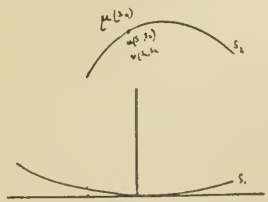


Fig. 3.

En multipliant (b) par μds_2, en intégrant et en tenant compte de (c), on obtient les équations (2). Le raisonnement subsiste si s_1 se confond avec s_2.

courbe (E) pour pouvoir construire immédiatement la ligne élastique, car *le segment de droite reliant deux points correspondants de deux courbes* (E) *est constant en grandeur et fixe en direction.* On le vérifie facilement en posant $\xi_1 = \xi_2 + R\cos\theta$ et $\eta_1 = \eta_2 + R\sin\theta$; des équations (3) il vient $R = \text{const.}$ et $\frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho}$, ce qui démontre la proposition.

Les équations (3) *permettent de résoudre différents problèmes relatifs à la ligne élastique. On peut, par exemple, s'imposer certaines conditions pour le déplacement* (ξ, η) *du point* M *et déterminer* I *en fonction de* s *ou de* φ, *pour une forme donnée de la fibre neutre* $s = f(\rho)$ *ou* $s = f(\varphi)$ *et un moment de flexion* $M = \psi(s)$ *ou* $M = \psi(\varphi)$ *donné, de façon que ces conditions soient satisfaites.* Inversement, *on peut déterminer la forme de la fibre neutre pour un* I *et un* M *donnés de façon que le déplacement d'un point* M *satisfasse à une certaine condition. On peut, enfin, pour une forme donnée de la fibre neutre et un* I *et un* M *donnés, trouver le déplacement d'un point* M.

Considérons, par exemple, le cas d'une lame droite. Les équations (3) deviennent dans ce cas :

$$\frac{d\eta}{ds} = \sigma\,, \qquad \frac{d\xi}{ds} = 0$$

et la première de ces équations n'est autre que l'équation bien connue $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI}$. Si le point O de la lame est fixe, $\xi = 0$ et le déplacement est normal à la fibre neutre.

Appliquons à ξ et η les formules (1). On obtient en tenant compte de (3)

$$\frac{\partial\xi}{ds} = 1\,, \qquad \frac{\partial\eta}{ds} = \sigma \quad \text{d'où} \quad \frac{\partial\eta}{\partial\xi} = \sigma\,. \tag{4}$$

Les tangentes à la fibre neutre et à la ligne élastique se coupent sous un angle α *tel que* $\operatorname{tg}\alpha = \sigma$ *ou, puisque* σ *est supposé très petit,* $\alpha = \sigma$. On pourra donc, une fois la ligne élastique construite, trouver sur elle le point qui correspond à un point M de la fibre neutre par le procédé suivant. On mène une tangente en M à le fibre neutre et on la coupe par

une droite arbitraire sous un angle σ ; la tangente à la ligne élastique parallèle à cette droite la touchera au point cherché.

De (4) on tire encore en posant $ds' = \sqrt{\delta\xi^2 + \delta\eta^2}$

$$ds' = \mathrm{K}ds \qquad \text{où} \qquad \mathrm{K} = \sqrt{1 + \sigma^2}$$

ou

$$s' = \int \mathrm{K}ds \ . \tag{5}$$

En négligeant σ^2 devant 1 on obtient

$$s' = s \ . \tag{5'}$$

Pour avoir le rayon de courbure ρ' de la ligne élastique on remarquera que

$$\alpha + \delta\alpha = \alpha + d\alpha + d\varphi \qquad \text{d'où} \qquad \frac{\delta\alpha}{ds} = \frac{d\varphi}{ds} + \frac{d\alpha}{ds}$$

ou enfin

$$\frac{\mathrm{K}}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + \frac{d\alpha}{ds} \ . \tag{6}$$

En négligeant σ^2 devant 1 on obtient

$$\frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + \frac{d\sigma}{ds} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\rho'} = \frac{1}{\rho} + \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{EI}} \ , \tag{6'}$$

relation bien connue.

En éliminant s entre (5) et (6) ou entre (5') et (6'), on obtient l'équation intrinsèque de la ligne élastique.

Les équations (3) permettent encore de résoudre le problème, très important, suivant :

Supposons qu'on ait construit la ligne élastique pour une forme donnée de la fibre neutre $s_1 = f_1(\rho_1)$ ou $s_1 = f_1(\varphi_1)$ et un moment de flexion M et un moment d'inertie I donnés, c'est-à-dire un σ_1 donné, $\sigma_1 = \psi_1(s_1)$ ou $(\sigma_1 = \psi_1(\varphi_1)$. Trouver pour une forme de la fibre neutre $s_2 = f_2(\rho_2)$ ou $s_2 = f_2(\varphi_2)$, le moment d'inertie I, c'est-à-dire un $\sigma_2 = \psi_2(s_2)$ ou $\sigma_2 = \psi_2(\varphi_2)$, telle que la nouvelle ligne élastique se confonde avec la première.

Les équations (3) s'écriront pour les deux cas :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d\eta}{ds_1} &= \sigma_1 - \frac{\xi}{\rho_1}, \\ \frac{d\xi}{ds_1} &= \frac{\eta}{\rho_1}, \end{aligned}\right\} \quad (7) \qquad \text{et} \qquad \left.\begin{aligned} \frac{d\eta}{ds_2} &= \sigma_2 - \frac{\xi}{\rho_2}, \\ \frac{d\xi}{ds_2} &= \frac{\eta}{\rho_2}. \end{aligned}\right\} \quad (8)$$

Les équations (8) peuvent encore s'écrire :

$$\frac{d\eta}{ds_1} = \sigma_2 \frac{ds_2}{ds_1} - \frac{\xi}{\rho_2}\frac{ds_2}{ds_1}, \qquad \frac{d\xi}{ds_1} = \frac{\eta}{\rho_2}\frac{ds_2}{ds_1}, \tag{8'}$$

d'où en comparant (7) et (8') on obtient

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{1}{\rho_2}\frac{ds_2}{ds_1}, \qquad \sigma_1 = \sigma_2 \frac{ds_2}{ds_1}$$

ou encore

$$d\varphi_2 = d\varphi_1 \qquad \sigma_2 = \sigma_1 \frac{ds_1}{ds_2} \tag{9'}$$

ou, finalement,

$$\varphi_2 = \varphi_1 - \varphi_0, \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_1 \rho_1}{\rho_2} \tag{9''}$$

où φ_0 est l'angle que forment entre elles les normales aux deux fibres neutres à l'origine. On voit que les points correspondants sont situés sur des normales qui forment un angle φ_0 entre elles. La seconde des relations (9'') permet, par un choix approprié de σ_2 qui dépend de M_2 et de I_2, de trouver les conditions pour qu'une forme donnée s_2 soit *tautoélastique* à une autre forme s_1. La forme qu'on prendra de préférence comme forme fondamentale sera un arc de cercle $s_1 = a_1\varphi_1$ ou $\rho_1 = a_1$ avec un I_1 constant. On aura alors pour les différentes formes choisies, comme conditions de *tautoélasticité* les relations suivantes :

Pour la développante de cercle

$$\rho_2^2 = 2a_2 s_2 \qquad \text{ou} \qquad \rho_2 = a_2\varphi_2, \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_1 a_1}{a_2(\varphi_1 - \varphi_0)},$$

pour la tractrice

$$\rho_2 = a_2\sqrt{e^{\frac{2s_2}{a_2}} - 1} \qquad \text{ou} \qquad \rho_2 = a_2 \operatorname{tg}\varphi_2, \qquad \sigma_2 = \frac{\sigma_1 a_1}{a_2(\varphi_1 - \varphi_0)}$$

pour la chaînette

$$\rho_2 = a_2 + \frac{s_2^2}{a_2} \quad \text{ou} \quad \rho_2 = \frac{a_2}{\cos_2 \varphi_2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1 a_1 \cos_2(\varphi_1 - \varphi_0)}{a_2}$$

pour la chaînette d'égale résistance

$$\rho_2 = \frac{a_2}{2}\left(e^{\frac{s_2}{a_2}} + e^{\frac{-s_2}{a_2}}\right) \quad \text{ou} \quad \rho_2 = \frac{a_2}{\cos \varphi_2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1 a_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_0)}{a_2}$$

pour la parabole

$$s = \frac{1}{3}\int \frac{d\rho}{\sqrt{\left(\frac{\rho}{p}\right)^{\frac{2}{3}} - 1}} \quad \text{ou} \quad \rho_2 = \frac{p}{\cos^3 \varphi_2}, \quad \sigma_2 = \frac{\sigma_1 a_1 \cos^3(\varphi_1 - \varphi_0)}{p}.$$

Par un choix approprié de φ_0 et de a_2 on pourra toujours faire passer l'arc de la courbe en question par les deux points O et A.

Dans tout ce qui précède nous avons supposé qu'on connaissait μ pour chaque point de la lame OA. Généralement, il n'en est pas ainsi; cependant la méthode est toujours applicable. Considérons, par exemple, le cas de la figure 4. Supposons d'abord que le bout A de la lame puisse se déplacer le long de la droite OA et que la lame soit articulée en O. Si P est la résultante des forces verticales appliquées, on pourra déterminer V_1 et V_2 et par conséquent μ et σ. On pourra donc construire la courbe élastique correspondante. Supposons maintenant que la lame est également articulée en A; deux forces égales et opposées H s'introduiront alors. Il est évident que ces forces H doivent être telles que le déplacement du point A

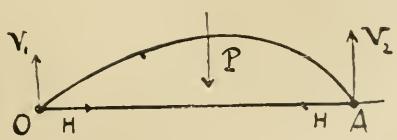


Fig. 4.

correspondant soit égal et opposé au déplacement correspondant aux forces V_1, V_2 et P. On aura donc

$$\sqrt{\xi_H^2 + \eta_H^2} = \sqrt{\xi_A^2 + \eta_A^2}$$

où (ξ_A, η_A) est le déplacement de A dû aux forces V_1, V_2 et P et (ξ_H, η_H) le déplacement de A dû aux forces H. On aura alors, en remarquant que

$$\sqrt{\xi_H^2 + \eta_H^2} = H\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2},$$

où (ξ_1, η_1) est le déplacement dû aux forces 1 parallèles et de même sens que H,

$$H = \frac{\sqrt{\xi_A^2 + \eta_A^2}}{\sqrt{\xi_1^2 + \eta_1^2}}.$$

De même, si la lame est en outre encastrée en A, il s'introduira un moment d'encastrement M_A et il faudra que $\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)_A$ provenant de V_1, V_2, P et H soit égal et opposé au $\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)_A^{M_A}$ provenant de M_A. On obtient donc pour M_A, en remarquant que $\left(\frac{\partial\eta}{\partial\xi}\right)_A = \sigma_A$

$$M_A \int_0^{s=OA} \frac{ds}{EI} = \sigma_A \qquad \text{d'où} \qquad M_A = \frac{\sigma_A}{\int_0^{s=OA} \frac{ds}{EI}}$$

où σ_A est dû aux forces V_1, V_2, P et H.

Dans le cas où σ^2 n'est pas négligeable devant σ, les équations (3) ne représentent plus la ligne élastique et il faut revenir aux équations (2) et à la courbe (G). Remarquons encore qu'il suffit de connaître une courbe quelconque (Γ) satisfaisant aux équations (2) et un point G de la courbe (G) correspondant à un point Γ de la courbe (Γ) pour pouvoir

construire la courbe (G) elle-même, car, comme il est facile de le vérifier, on a :

$$\sigma R = \text{const.} \qquad \text{et} \qquad \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{\rho}$$

c'est-à-dire *le segment de droite qui relie deux points correspondants de* (G) *et de* (Γ) *est inversement proportionnel à la rotation* σ *et fixe en direction.* D'autre part, *la droite* GM qui relie un point de la courbe (G) au point correspondant de la fibre neutre, *est tangente à la courbe* (G), car $\frac{\delta y}{\delta x} = \frac{y}{x}$, comme il est facile de s'en convaincre en remplaçant dans (1) $\frac{dx}{ds}$ et $\frac{dy}{ds}$ par leurs valeurs tirées de (2). Ceci permet, une fois la courbe construite, de trouver immédiatement le point G qui correspond à un point M donné de la fibre neutre.

Le cas où σ a une valeur telle qu'on ne puisse plus négliger σ^2 devant σ ne se présentant généralement pas en pratique, nous ne nous arrêterons pas à son étude. En résumé, je crois avoir montré par l'exposé qui précède que l'emploi des coordonnées de M. Cesàro permet de résoudre facilement diverses questions se rapportant à la ligne élastique des lames de diverses formes, questions qui seraient plus difficilement abordables par une autre méthode.

SUR LES ÉQUATIONS TRANSCENDANTES QUI SE PRÉSENTENT DANS LA THÉORIE DES TIGES ÉLASTIQUES

PAR

M. Paschoud (Lausanne).

---

1. — Dans leurs *Funktionentafeln mit Formeln und Kurven* (Teubner, 1909), MM. Jahnke et Emde donnent (p. 2 et 3) les racines de diverses équations transcendantes, parmi lesquelles se trouvent les suivantes :

$$\cos x \operatorname{ch} x = \pm 1 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} x \coth x = -1 \ ,$$

où

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \ , \qquad \text{et} \qquad \coth x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \ .$$

Il semble intéressant de remarquer que les racines de l'équation $\operatorname{tg} x \coth x = -1$ se déduisent immédiatement de celles de l'équation $\cos x \operatorname{ch} x = 1$, fait qui paraît avoir échappé à MM. Jahnke et Emde.

Plus généralement, il est facile de montrer que des racines des équations $\cos x \operatorname{ch} x = \pm 1$, on déduit celles des équations

$$\operatorname{tg} x \coth x = \pm 1 \ , \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} x \operatorname{th} x = \pm 1 \ .$$

2. — Les équations transcendantes indiquées ci-dessus se présentent dans la théorie du mouvement vibratoire des tiges élastiques.

On sait que l'équation du mouvement vibratoire d'une telle tige est

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + k^2 b^2 \frac{d^4 y}{dx^4} = 0 \ , \tag{1}$$

y est l'ordonnée d'un point d'abscisse x, t est le temps, k^2 le moment d'inertie de la section de la barre, $b^2 = E/\mu$, où E est le module d'élasticité et μ la masse de la tige par unité de longueur.

Pour intégrer (1), on pose

$$y = u \cos\left(\frac{kb}{l^2} m^2 t\right)$$

u étant fonction d'x seul ; l est la longueur de la tige, m un nombre à déterminer. En portant cette expression de y dans (1), il vient pour u l'équation

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{m^4}{l^4} u \ . \qquad (2)$$

Si T est la période de vibration, on a

$$T = \frac{2\pi l^2}{kbm^2} \ .$$

Pour déterminer complètement u, il faut encore indiquer les conditions aux extrémités de la tige, qui sont :
pour un *bout libre :*

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \ , \qquad \frac{d^3 u}{dx^3} = 0 \ ;$$

pour un *bout appuyé :*

$$u = 0 \ , \qquad \frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \ ;$$

pour un *bout encastré :*

$$u = 0 \ , \qquad \frac{du}{dx} = 0 \ .$$

L'intégrale de (2) s'écrit, sous forme symétrique,

$$u = A\left(\cos\frac{mx}{l} + \operatorname{ch}\frac{mx}{l}\right) + B\left(\cos\frac{mx}{l} - \operatorname{ch}\frac{mx}{l}\right) + C\left(\sin\frac{mx}{l} + \operatorname{sh}\frac{mx}{l}\right)$$
$$+ D\left(\sin\frac{mx}{l} - \operatorname{sh}\frac{mx}{l}\right) \ .$$

A, B, C, D sont les constantes d'intégration qui se déterminent par les conditions aux extrémités de la tige.

Ces conditions aux extrémités donnent :
pour une *tige libre à ses deux bouts :*

$$\cos m \operatorname{ch} m = 1 \ ,$$

pour une *tige encastrée à ses deux bouts :*

$$\cos m \operatorname{ch} m = 1 \ ,$$

pour une *tige appuyée à ses deux bouts :*

$$\sin m = 0 \ ,$$

pour une *tige libre à un bout, encastrée à l'autre :*

$$\cos m \operatorname{ch} m = -1 \ ,$$

pour une *tige libre à un bout, appuyée à l'autre :*

$$\operatorname{tg} m \operatorname{coth} m = 1 \ ,$$

pour une *tige encastrée à un bout, appuyée à l'autre :*

$$\cos m \operatorname{ch} m = 1 \ .$$

On reconnaît parmi ces équations transcendantes celles dont nous avons parlé.

3. — Les deux plus importantes de ces équations, $\cos m \operatorname{ch} m = \pm 1$ ont été étudiées par Poisson (*Mécanique*, 2e éd., t. II, p. 389 et suivantes).

Pour

$$\cos m \operatorname{ch} m = 1 \ , \tag{3}$$

Poisson remarque que lorsque m est grand, $\operatorname{ch} m$ est très grand et positif. Donc pour que (3) soit satisfaite, il faut que $\cos m$ soit très petit et positif, c'est-à-dire que m soit à peu près de la forme $(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

Pour m pair, la racine m_n correspondante est

$$m_n < (2n+1)\frac{\pi}{2}$$

et pour n impair,

$$m_n > (2n+1)\frac{\pi}{2} \ .$$

Poisson pose alors

$$m_n = (2n+1)\frac{\pi}{2} - (-1)^n \beta_n ,$$

où β_n est petit et positif et il calcule β_n par approximations successives. Mais les valeurs qu'il donne pour les plus petites racines de $\cos m \operatorname{ch} m = 1$ et de $\cos m \operatorname{ch} m = -1$ ne sont pas exactes.

Lord Rayleigh (*The Theory of Sound*, 2e édit., t. I, p. 277 et suivantes) a repris le calcul des racines des deux équations $\cos m \operatorname{ch} m = \pm 1$ et, par approximations successives, il calcule les valeurs exactes de ces racines. Ce sont, pour $\cos m \operatorname{ch} m = 1$:

$$m_1 = 0 \qquad m_2 = 4{,}7300408$$
$$m_3 = 7{,}8532046 \qquad m_4 = 10{,}9956078$$
$$m_5 = 14{,}1371655 \qquad m_6 = 17{,}2787596 .$$

Au-delà, avec sept décimales exactes,

$$m_n = \frac{1}{2}(2n+1)\pi .$$

Pour l'équation

$$\cos m \operatorname{ch} m = -1 , \tag{4}$$

Lord Rayleigh trouve

$$m_1 = 1{,}875104 \qquad m_2 = 4{,}694098$$
$$m_3 = 7{,}854757 \qquad m_4 = 10{,}995541$$
$$m_5 = 14{,}137168 \qquad m_6 = 17{,}278759 .$$

Au-delà, $m_n = \frac{1}{2}(2n-1)\pi$, avec six décimales exactes.

4. — Des calculs analogues à ceux de Lord Rayleigh permettraient de trouver les racines des équations

$$\operatorname{tg} m \coth m = \pm 1 \qquad \text{et} \qquad \operatorname{tg} m \operatorname{th} m = \pm 1 .$$

Nous allons les déduire de celles de (3) et de (4).

5. — Partons de

$$\cos 2m \operatorname{ch} 2m = 1 ; \tag{5}$$

cette équation s'écrit

$$(2\cos^2 m - 1)(2\,\mathrm{ch}^2 m - 1) = 1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\cos^2 m} + \frac{1}{\mathrm{ch}^2 m} = 2$$

ou enfin

$$1 + \mathrm{tg}^2 m = 1 + \mathrm{th}^2 m \ ,$$

c'est-à-dire $\mathrm{tg}\, m \coth m = \pm 1$.

Les racines de (δ) se décomposent donc en deux groupes qui sont formés respectivement par les doubles des racines de $\mathrm{tg}\, m \coth m = 1$ et de $\mathrm{tg}\, m \coth m = -1$.

On a ainsi, pour les racines de $\mathrm{tg}\, m \coth m = 1$

$$m_1 = 0 \ , \qquad m_3 = \frac{7{,}8532046}{2} = 3{,}9266023$$

$$m_5 = \frac{14{,}1371655}{2} = 7{,}0685825 \ .$$

et, au-delà,

$$m_{2n+1} = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \ .$$

Les racines de $\mathrm{tg}\, m \coth m = -1$ sont

$$m_2 = \frac{4{,}7300408}{2} = 2{,}3650204 \ , \qquad m_4 = \frac{10{,}9956078}{2} = 5{,}4878039$$

$$m_6 = \frac{17{,}2787596}{2} = 8{,}6393798$$

et, au-delà,

$$m_{2n} = \left(2n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \ .$$

Cette dernière équation $\mathrm{tg}\, m \coth m = -1$ a été rencontrée par M. Föppl dans un problème concernant les vibrations propres d'un navire (*Technische Mechanik,* 4e édit., t. IV, p. 268). M. Föppl trouve ses racines, par tâtonnements, en se servant de tables de fonctions hyperboliques et de fonctions circulaires.

6. — La décomposition des racines de $\cos 2m\, \mathrm{ch}\, m = 1$ en deux groupes pouvait être prévue. On sait en effet qu'une tige élastique, de longueur l, libre à ses deux bouts et qui

vibre de façon à avoir un nœud en son milieu, se partage en deux tiges, de longueur $\frac{l}{2}$, dont chacune vibre comme si elle avait une extrémité libre et l'autre *appuyée*.

Pour la barre entière, vibrant de la façon indiquée, il faut donner à m les valeurs des racines m_1, m_3, m_5 ... de l'équation $\cos m \operatorname{ch} m = 1$.

La période T correspondant à ce mode de vibration est

$$T = \frac{2\pi l^2}{kbm^2}.$$

Pour chacune des deux demi-barres, libres à un bout et appuyées à l'autre, en lesquelles la barre totale se divise, la période de la vibration est la même. Puisque la longueur de ces barres est $\frac{l}{2}$, pour que T ne change pas, il faut que m prenne les valeurs $\frac{m_1}{2}$, $\frac{m_3}{2}$, $\frac{m_5}{2}$, ... et ces valeurs seront des racines de l'équation $\operatorname{tg} m \coth m = 1$, qui doit être vérifiée dans le cas d'une barre libre à un bout et appuyée à l'autre (n° 2).

7. — Comme au n° 5, on voit que l'équation

$$\cos 2m \operatorname{ch} 2m = -1 \tag{6}$$

peut s'écrire

$$\operatorname{tg} m \operatorname{th} m = \pm 1.$$

Les racines de (6) se décomposent donc aussi en deux groupes qui sont formés respectivement par les doubles des racines de $\operatorname{tg} m \operatorname{th} m = 1$ et $\operatorname{tg} m \operatorname{th} m = -1$.

On a donc, pour les racines de $\operatorname{tg} m \operatorname{th} m = 1$

$$m_1 = \frac{1,875104}{2} = 0,937552, \qquad m_3 = \frac{7,854757}{2} = 3,927378$$

$$m_5 = \frac{14,137168}{2} = 7,068584$$

et, au-delà,

$$m_{2n+1} = \left(2n + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}.$$

Les racines de $\operatorname{tg} m \operatorname{th} m = -1$ sont

$$m_2 = \frac{4,694098}{2} = 2,347049 \ , \qquad m_4 = \frac{10,995541}{2} = 5,497770$$

$$m_6 = \frac{17,278759}{2} = 8,639379$$

et, au-delà,

$$m_{2n} = \left(2n - \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} \ .$$

8. — Si, pour plus de symétrie, on prend pour origine des coordonnées le milieu de la barre, on voit que pour une barre libre à ses deux extrémités, m doit satisfaire soit à l'équation $\operatorname{tg} m \coth m = 1$, soit à $\operatorname{tg} m \coth m = -1$.

Pour une barre libre à un bout et encastrée à l'autre, on trouve de même que m doit être solution soit de

$$\operatorname{tg} m \operatorname{th} m = 1 \ , \qquad \text{soit de} \qquad \operatorname{tg} m \operatorname{th} m = -1 \ .$$

Ceci montre bien encore les relations qu'il y a entre les racines des six équations transcendantes considérées.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'un article sur la rectification approchée des arcs de cercle.

Après avoir indiqué, dans son étude sur la rectification approchée des arcs de cercle (*E. M.*, tome XX, p. 215), une dernière variante de la construction à laquelle il a été conduit, M. E. Pleskot ajoute (p. 218) : « La valeur approchée est identique à celle qu'on obtient par la construction donnée par M. d'Ocagne. » C'est qu'en effet les deux constructions sont elles-mêmes identiques. Il suffit, pour s'en convaincre, de compléter la fig. 4 de la page 217 en appelant P le point de rencontre de la droite AC et du cercle K,

M celui des droites AB et OP. Les triangles OAP et RAC étant isocèles, les droites OP et RC sont parallèles et l'on a

$$\frac{AM}{AB} = \frac{AO}{AR} = \frac{2}{3},$$

ce qui est bien conforme à la construction que j'ai donnée naguère (*Nouvelles Annales de Mathém.*, 1907, p. 1).

Paris, 21 janvier 1919. M. d'Ocagne.

A propos d'un article de M. C. de La Vallée Poussin sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle.

(*E. M.*, tome XX, p. 5-29, 1918.)

J'estime qu'il serait de grande utilité de rappeler un exposé du même sujet par M. S. Bernstein dans le volume I, 1913 du Congrès de Cambridge de 1912 (p. 246-266) : *Sur les recherches récentes relatives à la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes;* avec références bibliographiques dont plusieurs ne se trouvent pas au catalogue récemment donné ici (tome XX, p. 28-29).

Bar-le-Duc, 26 février 1919. H. Brocard.

A propos d'une Note sur les permutations.

Dans sa Note sur les permutations (*E. M.*, tome XIX, 1917), M. A. Aubry rapporte, au N° 3, p. 282, une question N° 344 proposée par M. Brun dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (tome IV) et dans l'*Algèbre* de Laisant (p. 18). Demeurée longtemps sans réponse, elle en a obtenu une dans *Mathesis* (1911, p. 187-188) par M. Léon Aubry, avec une remarque de M. Paul Mansion. La question 344 avait été proposée par M. Brun, alors capitaine d'artillerie, devenu Ministre de la guerre, décédé le 23 février 1911.

Bar-le-Duc, 14 mars 1919. H. Brocard.

CHRONIQUE

La collaboration scientifique internationale.

Déclaration et Résolutions votées par la Conférence interalliée des Académies scientifiques.

Plusieurs Académies et Sociétés savantes se sont préoccupées des conditions auxquelles il y aura lieu de soumettre la collaboration scientifique internationale d'après-guerre. Les conditions relatives aux Institutions internationales d'un caractère officiel ont été examinées par la *Conférence interalliée des Académies scientifiques* dans ses séances de Londres[1] (9-11 octobre 1918) et de Paris (26-29 novembre 1918). Les résolutions adoptées par la Conférence de Londres ont été présentées à l'Académie des Sciences de Paris[2], dans sa séance du 21 octobre, accompagnées de la Note suivante de MM. Emile Picard et Alfred Lacroix.

La Conférence interalliée des Académies scientifiques à Londres.

Note de MM. Emile Picard et Alfred Lacroix.

La question des relations scientifiques internationales d'après-guerre appelle depuis longtemps l'attention des savants. La Commission géodésique française, la délégation française près l'ancienne Association géodésique internationale, le Bureau des Longitudes s'en sont occupés. A deux reprises, l'Académie des Sciences a émis des vœux à ce sujet, d'abord au mois de novembre dernier, et tout récemment dans la séance du 30 septembre. Elle a été unanime à déclarer que les relations personnelles sont pour longtemps impossibles entre les savants des pays alliés et ceux

[1] Royal Society, mai et octobre 1918.
[2] Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, t. 167, N° 17.

des empires centraux, et elle a pris diverses résolutions relatives à la reconstitution des Associations scientifiques internationales.

La même question fut étudiée dans d'autres pays, et la Société Royale de Londres proposa, il y a quelques mois, une réunion interalliée des Académies scientifiques. Cette Conférence s'est tenue à Londres les 9, 10 et 11 octobre dernier. Des représentants de l'Angleterre, des Etats-Unis, de l'Italie, de la France, de la Belgique, de la Serbie, du Brésil y assistaient; les délégués de l'Académie étaient MM. Emile Picard, A. Lacroix, Haller, Bigourdan, Baillaud, Lallemand, Moureu. Des décisions importantes ont été prises, et libellées sous forme de vœux à envoyer aux gouvernements et aux sociétés savantes des pays alliés.

Quelques considérations générales servent d'introduction aux résolutions finales adoptées à l'unanimité. Elles insistent fortement sur ce point que les guerres antérieures n'avaient pas détruit la mutuelle estime des savants des pays belligérants les uns pour les autres; la paix avait pu effacer, après peu d'années, la trace des luttes passées. Aujourd'hui les conditions sont tout autres. Des crimes sans nom vont laisser dans l'histoire des nations coupables une tache que des signatures au bas d'un traité de paix ne sauraient laver. Aussi devrons-nous abandonner les anciennes Associations internationales et en créer de nouvelles entre alliés avec le concours éventuel des neutres.

D'autres mesures, tendant à resserrer les liens entre les pays alliés, ont été discutées; elles ont pour but d'établir entre eux une collaboration intime dans la recherche scientifique.

Une Commission nommée par la Conférence se réunira prochainement à Paris pour faire une étude plus approfondie des futures organisations internationales. Elle aura aussi à examiner des propositions faites par deux délégués. Ce sont des vœux formulés par M. Massart, de l'Académie Royale de Belgique, sur les échanges internationaux et la création de recueils bibliographiques, puis un vœu de notre confrère M. Bigourdan sur l'unification des notations bibliographiques relatives à tout l'ensemble de nos connaissances.

Nous donnons ici les textes de la déclaration et des résolutions prises par la Conférence de Londres :

Déclaration votée à l'unanimité par la Conférence pour servir de préface à ses résolutions.

Lorsque, il y a quatre ans, la guerre éclata, divisant l'Europe en camps ennemis, les hommes de science pouvaient encore espérer que la conclusion de la paix renouerait les liens rompus, et que les ennemis de la veille pourraient de nouveau se rencon-

trer dans des conférences amicales et unir leurs efforts pour le progrès de la science. De tous temps, depuis la renaissance des études scientifiques au moyen âge, la recherche du vrai a formé une chaîne assez solide pour résister à l'effort des antagonismes nationaux. Et ce lien s'est encore fortifié vers la fin du dernier siècle, lorsque le développement de certaines branches de la science a requis, pour leur étude, la collaboration de toutes les nations civilisées. Associations et Conférences se sont rapidement multipliées et des relations amicales de plus en plus intimes se sont établies entre les savants des différents pays, en dépit des divergences politiques, volontairement laissées dans l'ombre.

La guerre, jadis, a fréquemment arrêté la coopération des individus, sans détruire leur mutuelle estime, basée sur le sentiment de la valeur de la science ; la paix venait bientôt effacer les traces des luttes passées.

Si, aujourd'hui, les délégués des Associations scientifiques des nations alliées et des Etats-Unis d'Amérique se voient dans l'impossibilité de reprendre des relations personnelles, même en matière de science, avec les savants des empires centraux, tant que ceux-ci n'auront pas été admis de nouveau dans le concert des nations civilisées, ils le font en pleine conscience de leur responsabilité, et ils ont pour devoir de rappeler les motifs qui les ont amenés à cette décision.

La civilisation a imposé des règles de conduite aux nations qui entendent servir les intérêts de l'humanité, et qui ont, à un haut degré, le souci de leur honneur. Telles sont la reconnaissance du caractère sacré des traités (spécialement de ceux concernant l'état de guerre) et la suppression d'inutiles cruautés envers les populations civiles... A ces deux points de vue, les puissances centrales ont enfreint les lois de la civilisation, dédaignant toutes les conventions et déchaînant dans l'âme humaine les pires passions engendrées par la férocité de la lutte. La guerre est fatalement pleine de cruautés, et des actes individuels de barbarie ne sauraient être évités ; il faut en prendre son parti. Ce ne sont pas ces actes que nous visons, ce sont les horreurs organisées, encouragées et imaginées, dès l'origine, dans le seul but de terroriser les populations inoffensives. La destruction d'innombrables propriétés privées, les violences et les massacres sur terre et sur mer, le torpillage des navires-hôpitaux, les insultes et les tortures infligées aux prisonniers de guerre, laisseront, dans l'histoire des nations coupables, une tache que ne saurait laver la simple réparation des dommages matériels. Pour restaurer la confiance, sans laquelle toute collaboration fructueuse serait impossible, les empires centraux devront désavouer les méthodes politiques dont l'application a engendré les atrocités qui ont indigné le monde civilisé.

Résolutions relatives aux organisations scientifiques internationales votées à l'unanimité par la Conférence.

1. — Aussitôt que les circonstances le permettront, les conventions relatives aux associations scientifiques internationales seront, conformément aux statuts ou règlements propres à chacune d'elles, dénoncées par les groupements compétents des nations en guerre avec les empires centraux.

Les nouvelles associations reconnues utiles au progrès des sciences et de leurs applications seront établies, dès maintenant, par les nations en guerre avec les empires centraux, avec le concours éventuel des neutres.

2. — Certaines associations résultant de conventions diplomatiques, telle la Convention du mètre, devront faire l'objet d'un examen spécial lors des négociations de paix.

3. — Les mesures visées ci-dessus laissent de côté les accords concernant exclusivement les relations administratives indispensables entre des services publics, comme celles réglementant la navigation, les dépêches météorologiques, les chemins de fer, les postes et télégraphes, etc.

4. — Il est constitué, dans le sein de la Conférence, une Commission d'études, à laquelle pourront s'adjoindre des délégués désignés par les Académies des pays en guerre avec les puissances centrales. Cette Commission dressera un plan général d'organisations internationales, pour satisfaire aux besoins des diverses branches des recherches scientifiques et industrielles, y compris celles relatives à la Défense nationale. Sa Commission se réunira à Paris, cette année même, dans la deuxième quinzaine de novembre.

5. — Chacune des Académies représentées à la Conférence sera invitée à provoquer la création d'un Conseil national, ayant pour objet l'avancement des recherches mentionnées au paragraphe précédent.

6. — Un Conseil international sera constitué par la fédération des Conseils nationaux.

7. — La Conférence, estimant que tous les progrès industriels, agricoles, médicaux, reposent sur les découvertes de la Science pure, appelle l'attention des Gouvernements sur l'importance des recherches théoriques et désintéressées, dont les budgets, après la guerre, devront être dotés le plus largement possible.

Elle insiste également sur la création de grands laboratoires, privés et nationaux, de sciences expérimentales.

La deuxième session de la Conférence interalliée des Académies scientifiques.

Paris, novembre 1918.

La Conférence interalliée des Académies scientifiques a tenu sa seconde session à Paris, du 26 au 29 novembre. Elle a réuni des délégués de Belgique (3), du Brésil (1), des Etats-Unis (6), de France (13), du Royaume-Uni (9), d'Italie (5), du Japon (2), de Pologne (1), du Portugal (1), de Roumanie (4) et de Serbie (2). Elle a d'abord décidé de remplir provisoirement le rôle du Conseil international de recherches, dont la création a été votée à la réunion de Londres. Puis, elle a institué un *Comité exécutif* de cinq membres, MM. Hale, Lecointe, E. Picard, Schuster et Volterra, chargé d'étudier dans leurs détails les questions soulevées à la Conférence avec le concours des organismes ou personnes les mieux qualifiés. Le Comité exécutif a choisi M. Emile Picard comme président, M. Schuster comme secrétaire, et décidé que le siège du Bureau administratif sera, jusqu'à nouvel avis, à *Londres*.

Les associations internationales, rattachées au Conseil international de recherches, sont fondées avec les pays en guerre avec l'Allemagne, et l'on a fixé les conditions sous lesquelles les neutres pourront être admis dans ces associations une fois constituées. La Conférence s'est ensuite occupée particulièrement des associations fermées, ayant pour objet la réalisation d'œuvres nécessitant une coopération. Telles sont, par exemple, l'Union astronomique, s'occupant de toutes les questions relatives à l'astronomie, et l'Association géophysique, qui embrassera la géodésie, la sismologie et la météorologie avec le magnétisme terrestre et la vulcanologie.

De nombreuses propositions ont été prises en considération, et renvoyées, pour une étude plus approfondie, au Comité exécutif. Elles concernent la création de diverses associations internationales, la bibliographie, la nomination d'attachés techniques, les laboratoires internationaux, les questions de brevets, les échanges internationaux.

On trouvera dans les Comptes rendus de l'Académie des Sciences (séance du 9 décembre 1918), la liste des délégués et le texte des résolutions votées par la Conférence de Paris.

Société suisse des professeurs de mathématiques.

Réunion de Bâle, le 5 octobre 1918.

1. — Ce fut la XXIe assemblée de cette société. Sur la proposition du président, M. K. Matter, professeur à Aarau, l'assemblée

nomma membre honoraire M. C. Brandenberger, professeur à l'Ecole industrielle de Zurich et à l'Ecole polytechnique fédérale. Cette marque de reconnaissance et d'affection fut télégraphiée à l'élu, avec un message de sympathie et des vœux ardents pour le rétablissement de sa santé. Aucune distinction ne fut mieux méritée, et le décès récent de M. Brandenberger laisse dans la Société un vide immense. Promoteur et fondateur de la Société suisse des professeurs de mathématiques, il en fut l'âme dès sa fondation. Les lecteurs de cette revue connaissent son très remarquable rapport sur l'enseignement des mathématiques dans les écoles moyennes de la Suisse[1]. La préparation de ce mémoire conduisit l'auteur à établir, pour la Société, un plan de travail, dont le but est l'élaboration d'un programme normal de l'enseignement des mathématiques dans les écoles moyennes suisses. Il travailla lui-même avec ardeur à la réalisation de ce plan et suggéra plusieurs travaux destinés à avancer la solution de cette question difficile. Par son activité au sein de notre Société, par son enseignement pédagogique à l'Ecole polytechnique, comme aussi par l'exemple qu'il nous laisse d'un maître consciencieux, distingué et doué d'un sens pédagogique exceptionnel, C. Brandenberger a exercé et exerce encore sur l'enseignement des mathématiques dans notre pays une action heureuse et profonde.

2. — Après l'approbation des comptes, l'assemblée procède à l'élection du nouveau comité : MM. C. Jaccottet (Lausanne), président ; P. Mercier (Genève), secrétaire ; H. Stohler (Bâle), caissier. Elle discuta ensuite une proposition tendant à astreindre tous les membres de la Société à faire partie de la Société suisse des professeurs de l'enseignement secondaire (Gymnasiallehrerverein), société à laquelle la Société suisse des professeurs de mathématiques est affiliée. Elle prit connaissance d'une proposition de la Société suisse des professeurs de sciences naturelles nous demandant de faire paraître, avec elle, un journal bi-mensuel destiné à nous communiquer nos expériences d'enseignement. La réalisation de ces projets, intéressants et d'une utilité incontestable, aurait malheureusement pour effet d'augmenter, dans une forte proportion, les charges financières des membres, par suite, d'en diminuer le nombre ; aussi l'assemblée renvoya-t-elle cette réalisation à des temps meilleurs.

3. — Les *conclusions du rapport sur l'enseignement des séries infinies*, que M. Schüepp, professeur à Zurich, avait présenté à Baden l'an passé, sont mises en discussion. Celle-ci fut introduite par quelques remarques du rapporteur, dont voici la substance. L'école moyenne s'occupe d'analyse dans le but de préparer le

[1] Voir le compte rendu de M. G. Dumas dans l'*Enseignement mathématique*, 19e année, p. 107-111, 1917.

cours universitaire; le point de départ de cet enseignement est l'étude de propriétés particulières de fonctions particulières. Tandis que l'étude des séries ne prend toute sa signification que dans la théorie générale des fonctions. L'école moyenne est dans l'impossibilité de donner à ses élèves une vue claire de l'importance qu'ont, pour la science, les séries infinies; les applications que l'on peut en faire (calculs numériques de valeurs particulières de fonctions, applications aux sciences naturelles et techniques) ne suffisent pas non plus à obtenir ce résultat *(conclusions 1 et 2)*. L'étude des éléments de la théorie des séries ne peut être conservée que si elle répond à d'autres buts, par exemple, celui de rendre plus claires certaines notions importantes. Or cette étude est, en effet, en mesure de jeter un jour particulier sur la notion de limite et, c'est là le but qui doit être proposé à cet enseignement *(conclusion 3)*. De plus, la méthode doit être adaptée au but: Si l'on veut rendre claire la notion de limite, il est inadmissible d'utiliser des démonstrations peu rigoureuses, qui laissent de côté certaines considérations de limites trop difficiles. Aussi, dans le développement des fonctions élémentaires en séries de puissances, les méthodes qui supposent, sans l'établir, la possibilité du développement, doivent être abandonnées; elles sont d'autant moins indiquées qu'il existe des procédés élémentaires à l'abri de tout reproche, tels ceux employés par Cauchy dans son Cours d'analyse, ou par Briot et Bouquet dans leur Traité de trigonométrie *(conclusion 4)*.

Les quatre premières conclusions furent admises à l'unanimité. Une cinquième proposait de demander à l'Ecole polytechnique de supprimer de son programme d'admission le sujet « Notions sur les séries infinies ». Ce programme étant en revision et la Société, appelée à donner son avis, le président, d'accord avec le rapporteur, proposa de dire simplement que la Société désire voir disparaître ce sujet des plans d'études des écoles moyennes. Après que M. Schüepp eut insisté sur le fait que, pour lui, l'essentiel n'était pas que la théorie des séries fût ou non enseignée, mais que, si elle l'était, elle le fût avec un but convenable et des méthodes appropriées, l'assemblée accepta cette proposition par 20 voix contre 9 et 9 abstentions.

Voici le texte des conclusions du rapport de M. Schüepp adoptées par l'assemblée :

I. — *L'étude des séries infinies, dont le seul but serait de permettre le calcul de π, des logarithmes et des valeurs des fonctions circulaires, n'est pas indiquée à l'école moyenne.*

II. — *Par rapport aux autres parties des mathématiques, les séries infinies jouent un rôle secondaire dans les applications aux sciences techniques et naturelles; ce rôle ne suffit pas à justifier la présence de cet enseignement à l'école moyenne.*

III. — *Si les séries doivent être enseignées, le but de cet enseignement doit être de donner à l'élève une vision claire et une compréhension complète de la notion de limite.*

IV. — *Les méthodes de développement en séries de puissances des fonctions élémentaires, dans lesquelles des parties essentielles de la démonstration sont laissées de côté, ainsi la possibilité de développement, sont à écarter.*

V. — *L'enseignement des séries infinies ne donnant aux élèves que peu d'occasions d'activité personnelle et, pour cette raison, le résultat obtenu n'étant pas en rapport avec le temps nécessaire au traitement consciencieux du sujet, la Société suisse des professeurs de mathématiques désire voir supprimer du programme de mathématiques de l'école moyenne le chapitre des séries infinies.*

4. — L'influence énorme que peut avoir, sur le développement de nos écoles moyennes, une modification dans les conditions d'admission à l'Ecole polytechnique fédérale, saute aux yeux. La Société ayant été appelée à collaborer à l'établissement d'un nouveau règlement, notre président avait préparé un projet de propositions à adresser aux autorités de cette Ecole. Ce projet se compose de deux parties : *vues générales* et *matières d'examen.* La première partie seule fut discutée à fond et les propositions de M. Matter admises. L'examen de la seconde partie fut renvoyé à l'assemblée de 1919, l'accord n'ayant pu se faire sur divers points importants.

Le projet Matter vise à remplacer les examens d'admission par l'institution d'une « maturité fédérale », dont le diplôme donnerait droit d'entrée à l'Ecole polytechnique et dans les universités suisses. Trois formes d'examens seraient instituées, correspondant aux trois formes de gymnases réclamées par la Société des professeurs secondaires : forme classique (pure et réale), forme scientifique — ces deux formes étant celles existant actuellement dans nos gymnases — puis une forme nouvelle, qui correspondrait au gymnase langues modernes dont on demande la création. Les certificats de maturité délivrés seraient équivalents quant aux droits accordés, les porteurs seraient admis à faire des études dans n'importe laquelle des facultés de nos établissements supérieurs d'instruction. Cela revient à poser en principe que la maturité nécessaire à de bonnes études supérieures réside moins dans la somme des connaissances acquises que dans la faculté de savoir travailler avec fruit dans un domaine particulier, quel qu'il soit d'ailleurs. Les examens seraient organisés de façon à apprécier surtout la puissance de travail, les qualités de l'intelligence, la maturité de l'esprit, c'est-à-dire la faculté d'utiliser les connaissances acquises.

Dans la discussion, des craintes furent émises, que l'admission à l'Ecole polytechnique d'élèves insuffisamment préparés en ma-

thématiques et en sciences ne fasse baisser le niveau scientifique de l'École. Il fut répondu que les candidats — tels les bacheliers ès lettres — qui entreraient insuffisamment outillés, bien qu'intellectuellement capables d'entreprendre ces études — le feraient sous leur responsabilité et avec l'obligation de se mettre rapidement au niveau de leurs camarades. Le raccordement nécessaire entre les études classiques secondaires et techniques supérieures pourrait être fait soit par les écoles moyennes elles-mêmes, dans le dernier semestre d'études, soit laissé au soin de l'établissement supérieur; celui-ci devrait alors établir les cours nécessaires.

5. — Après que M. Crelier, professeur à l'Université de Berne, eût remercié le président sortant de charge, M. Matter, de son dévouement et l'eût félicité de la distinction avec laquelle il avait dirigé la Société pendant ces trois dernières années, la séance de l'après-midi fut levée.

6. — Le soir, une nouvelle séance nous réunissait avec nos collègues des sciences naturelles. M. Hindermann (Bâle) y présenta son « orbitoscope ». Cet ingénieux appareil permet la démonstration des particularités du mouvement apparent des planètes; il est appelé à rendre de grands services à l'enseignement de l'astronomie dans nos écoles moyennes. M. Schips (Schwytz) fit une intéressante conférence sur l'emploi des mathématiques dans les sciences naturelles. Cette première prise de contact entre professeurs naturalistes et mathématiciens sera, nous l'espérons bien, suivie d'autres tentatives du même genre: elles sont destinées à élargir l'horizon des uns et des autres.

C. Jaccottet (Lausanne).

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — Le *Prix Ackermann-Teubner* a été attribué à M. L. Prandtl, professeur à l'Université de Gœttingue.

La *Société mathématique allemande* a désigné comme président M. le Prof. H. v. Mangoldt, pour l'exercice 1918-19. Elle a décidé de conférer la présidence d'honneur, pendant cette même période, à M. le Prof. F. Klein, à l'occasion de son 70e anniversaire et de son 50e jubilé de doctorat.

M. C. Carathéodory, professeur à l'Université de Gœttingue, est nommé professeur à l'Université de Berlin.

M. S. Finsterwalder, professeur à l'École technique supérieure de Munich, a été nommé professeur de Géodésie à l'Université de Berlin et directeur à l'Institut géodésique de Potsdam.

M. G. Frege, professeur à l'Université de Iéna, prend sa retraite.

M. G. Hamel est nommé professeur à l'Université de Tubingue, en remplacement de M. le Prof. A. v. Brill, qui prend sa retraite.

M. E. Jacobsthal, privat-docent, a été nommé professeur de Mathématiques à l'École technique supérieure de Berlin.

M. M. Nœther, professeur à l'Université d'Erlangen, prend sa retraite.

Angleterre. — La *British Association for the advancement of Science* tiendra sa réunion de 1919 à *Bournemouth*, au début de septembre, sous la présidence de Sir Charles Parsons.

Le *Prix Adams pour 1918* a été attribué à M. le Prof. J. L. Nicholson, du King's College, à Londres.

Belgique. — La Classe des Sciences de l'*Académie de Belgique* vient d'arrêter le règlement d'une nouvelle et importante fondation *(Agathon De Potter)* destinée à favoriser le progrès des sciences mathématiques, physiques et naturelles, par voie de subsides, prix, etc.

Société Royale des Sciences de Liége. — M. H. Fehr, professeur à l'Université de Genève, a été nommé membre correspondant étranger de la Section des sciences mathématiques et physiques.

Danemark. — A partir de 1919 la *Nyt Tidsskrift for Matematik* est publiée par la Société mathématique de Copenhague et prend le nom de *Matematisk Tidsskrift*. La série A (Mathématiques élémentaires) est dirigée par MM. I. L. W. Jessen et O. A. Smith, la série B (Mathématiques supérieures) par MM. Harald Bohr et T. Bonnesen.

Etats-Unis d'Amérique. — Au 1er janvier 1919 la Société mathématique américaine *(American Mathematical Society)* comptait 723 membres. Pendant les séances tenues en 1918 il a été présenté 137 mémoires. M. le Prof. Frank Morley (Johns Hopkins University, Baltimore) a été élu président pour 1919.

De son côté, l'Association mathématique *(The Mathematical Association of America)*, qui poursuit plus particulièrement le progrès des mathématiques dans les collèges, a appelé à la présidence M. H. E. Slaught (University of Chicago). Le Bulletin publié par l'Association sous le titre *The Mathematical Monthly* (26e année) sera dirigé par MM. R. C. Archibald, W. A. Hurwitz et H. E. Slaught.

France. — *Académie des Sciences de Paris.* — M. Edouard Goursat, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, a été élu membre titulaire de la section de Géométrie, en remplacement de M. Emile Picard, élu secrétaire perpétuel.

Société mathématique de France. — M. Lebesgue a été élu président de la Société pour 1919.

M. Chazy est nommé professeur de mathématiques générales à l'Université de Lille, en remplacement de M. Clairin, décédé.

M. Fréchet, professeur à la Faculté des Sciences de Poitiers,

et M. Esclangon, maître de conférences à l'Université de Bordeaux, sont détachés près l'Université de Strasbourg.

M. Guichard, professeur de Mathématiques générales à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, est nommé, sur sa demande, professeur de Géométrie supérieure à la dite Faculté.

M. P. Humbert, docteur ès sciences, est délégué, jusqu'à la fin de l'année scolaire 1918-19, dans les fonctions de maître de conférences de mathématiques à l'Université de Montpellier, pendant l'absence de M. Denjoy, détaché près l'Université d'Utrecht.

M. Lebesgue, docteur ès sciences, maître de conférences d'analyse mathématique à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris, est nommé à la dite Faculté, professeur d'application de l'analyse à la géométrie (chaire vacante).

M. Roy est nommé professeur de mécanique rationnelle à l'Université de Toulouse, en remplacement de M. Lattès, décédé.

Italie. — M. U. Amaldi, professeur à l'Université de Modène, est nommé professeur de Géométrie descriptive à l'Université de Padoue.

M. Levi-Civita, professeur à l'Université de Padoue, est nommé professeur d'Analyse supérieure à l'Université de Rome.

M. C. Severini, professeur à l'Université de Catane, est nommé professeur d'Analyse infinitésimale à l'Université de Gênes.

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents : Mlle Elena Freda, pour la Physique mathématique, à l'Université de Rome; M. O. Lazzarino, pour la Mécanique rationnelle, à l'Université de Turin ; M. L. Volta, pour l'Astronomie sphérique, à l'Université de Gênes.

Prix de mathématiques. — La Société italienne des Sciences (dite des XL) a décerné sa médaille pour 1916-1917 à M. U. Amaldi, professeur à l'Université de Modène (actuellement à Padoue), pour l'ensemble de ses recherches sur la théorie des groupes continus de transformations.

Académie Royale dei Lincei. — M. E. Pascal, professeur à l'Université de Naples, et M. E. Almansi, professeur à l'Université de Rome, ont été nommés membres nationaux. M. G. Fano, professeur à l'Université de Turin, a été nommé membre correspondant.

Circolo Matematico di Palermo. — Le Comité a décidé de reprendre la publication des *Rendiconti* suspendue pendant la guerre. La seconde partie du Tome XLII vient de paraître; elle sera suivie sous peu du Tome XLIII.

Norvège. — *Société mathématique.* — Le 2 novembre 1918 il a été fondé à Christiania une Société mathématique norvégienne. Son comité est composé de MM. Störmer, président, Birkeland, vice-président, Palmström, secrétaire, et Solberg, caissier. La Société publiera un bulletin dont la rédaction a été confiée à

MM. Alexander et Heegaard. Grâce au concours financier d'une société d'assurances, le prix de l'abonnement annuel ne sera que de cinq couronnes.

Suisse. — M. A. Mohrmann a été nommé professeur ordinaire de mathématiques à l'Université de Bâle.

Nécrologie.

Cr. Alasia de Quesada. — Nous enregistrons avec regret la mort de l'un de nos anciens collaborateurs, M. Cr. Alasia, professeur au Gymnase d'Albengo (Italie), décédé le 19 novembre 1918, à l'âge de 49 ans.

Léon Ballif. — Nous avons le regret d'apprendre la mort de notre collaborateur Léon Ballif, qui, depuis plusieurs années, apportait à la revue des travaux scientifiques. En quelques jours il a été enlevé par la grippe. Ancien élève de l'Ecole Polytechnique de Paris, admis à l'Ecole Centrale des Arts et Manufactures et à l'Ecole Normale supérieure, Léon Ballif servait comme ingénieur d'artillerie navale à la Commission d'expériences de tir de Gâvres, près Lorient. Après avoir commandé au front comme capitaine d'artillerie, il était venu reprendre son poste d'études, où il avait notamment préparé les tables de tir des canons de 400 et de 520. Entre temps, il avait suivi les expériences d'inventions — dues à son initiative — d'attaque des torpilles automobiles par des mitrailleuses à grenades, de stabilisation automatique des projectiles sur leur trajectoire, de mesure de la densité de l'air par l'observation à des altitudes successives d'un ballonnet extensible. Auteur d'un certain nombre de mémoires présentés à l'Académie des Sciences et à d'autres sociétés scientifiques, il avait écrit avant la guerre un ouvrage le *Combat aérien, étude cinématique,* livre prophétique, qui lui avait mérité un prix de l'Académie des Sciences.

Léon Ballif disparaît au moment où son intelligence scientifique était en plein rendement et donnait de brillantes espérances. Nous ne pouvons que joindre nos regrets à ceux de sa famille et de ses nombreux amis.

M. Matteo Bottasso, chargé du cours de mécanique rationnelle à l'Université de Messine, est décédé à Turin, à la suite d'une attaque d'influenza, le 3 octobre 1918, à l'âge de 40 ans. Il appliqua avec beaucoup d'élégance le calcul vectoriel à plusieurs questions de géométrie et de mécanique, en particulier à la statique, à laquelle il dédia un volume, le quatrième de la collection « Analyse vectorielle générale » de MM. Buralli-Forti et Marcolongo.

C. Brandenberger. — La Société suisse des professeurs de mathématiques vient de perdre l'un de ses membres les plus actifs et les plus dévoués, M. le Dr C. Brandenberger, membre fondateur et ancien président, décédé à Zurich le 2 janvier 1919, dans sa 46e année, des suites d'une cruelle maladie. Possédant à un degré très élevé les qualités d'esprit et de cœur qui caractérisent le véritable éducateur, il s'était désigné de bonne heure à l'attention des autorités scolaires du canton de Zurich. Nommé professeur de mathématiques à l'Ecole cantonale, en 1899, il fut, dans toute la force du terme, un maître par le talent et par le dévouement. Il remplit les fonctions de prorecteur de 1908 à 1917.

Dès ses débuts dans la carrière de l'enseignement, il s'attacha à l'étude des questions de didactique mathématique. En 1901, il prit l'initiative, avec son ami Gubler, de la fondation de la Société suisse des professeurs de mathématiques, qui ne tarda pas à grouper la plupart des représentants de cette branche dans les établissements secondaires et supérieurs. Lors de la création, en 1908, de la Commission internationale de l'enseignement mathématique, la délégation suisse trouva dans ce milieu un excellent groupe de collaborateurs, et c'est à Brandenberger qu'il confia la tâche très ardue de rédiger le rapport sur les mathématiques dans l'enseignement moyen. On sait que son exposé compte parmi les meilleurs, non seulement de la série des rapports suisses, mais aussi dans l'ensemble des monographies de la Commission internationale.

Au nombre des questions soulevées par la Sous-commission suisse et mises en discussion dans les séances de la Société des professeurs de mathématiques figurait, entre autres, celle de la préparation des candidats à l'enseignement. Brandenberger y attacha une attention toute spéciale. Aussi, grâce à sa compétence dans ce domaine, il fut chargé, en 1912, de l'enseignement théorique et pratique de la méthodologie et de la didactique mathématique à la section normale de l'Ecole polytechnique fédérale, qui lui conféra le titre de professeur en 1918. Par ces nouvelles fonctions il eut pu exercer une influence féconde sur les jeunes générations de professeurs. Si son action directe n'a été que de trop courte durée, l'impulsion nouvelle donnée par Brandenberger aux progrès de l'enseignement scientifique persistera longtemps encore.

L'admirable unité de vie de Brandenberger, l'ardeur désintéressée avec laquelle il s'attachait à tout ce qui est utile ou généreux, laissent entrevoir ce que fut l'homme. Il fut serviable et bon. Par son caractère bienveillant et droit, il inspirait une grande confiance. Ses collègues et ses anciens élèves se rappelleront toujours la cordialité et la franchise de son accueil. A tous il laisse en exemple une vie féconde, toute de travail et d'énergie. H. F.

Ulisse Dini. — Sa mort est survenue le 28 octobre 1918 à Pise, où il était né le 14 novembre 1845. Il y fit toutes ses études. Très apprécié par Mossotti et de Betti, il obtint déjà à 19 ans le titre de docteur en mathématiques. Il se rendit ensuite à Paris où il suivit les cours d'Hermite et de Bertrand. Dès 1867 il enseigna à Pise, d'abord la géodésie et l'algèbre, puis, jusqu'à sa mort, l'analyse infinitésimale et supérieure.

Ses premières recherches de géométrie différentielle lui assurent à elles seules une place très honorable parmi les mathématiciens du XIXe siècle, mais son œuvre principale se rapporte à l'analyse, qu'il a enrichie par ses études sur les équations différentielles et sur les développements en série de fonctions données, et dont il a rebâti les fondements d'une manière systématique avec une généralité qui n'avait pas été obtenue par ses devanciers. Mentionnons ses écrits classiques intitulés « Fondamenti per la teoria delle funzioni di variabile reale », « La serie di Fourier », ainsi que son traité en quatre volumes « Lezioni d'analisi infinitesimale ».

Maître éminent, sénateur, président ou membre de nombreuses commissions se rapportant à l'instruction publique, il exerça une influence profonde sur la formation des mathématiciens et sur l'organisation des mathématiques en Italie. Ses grands mérites ont été d'ailleurs à juste titre universellement reconnus.

Emile Dumont. — Nous apprenons avec regret la mort de notre distingué collaborateur, M. Emile Dumont, professeur à l'Institut Michot-Montgenast à Bruxelles, tué à l'ennemi. M. Dumont est l'auteur de plusieurs traités au nombre desquels nous mentionnons ici son *Arithmétique générale*, dans laquelle il fait un exposé méthodique et synthétique des principales propriétés des nombres complexes, des ternions et des quaternions.

Emile Lampe. — Le 4 septembre 1918 est décédé à Berlin, dans sa 78e année, M. le Prof. Dr E. Lampe, directeur du *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*. Par le dévouement et le soin qu'il ne cessa d'apporter, pendant plus de 33 ans, à la direction de cet important recueil bibliographique, il a rendu de grands services aux sciences mathématiques. Il a su faire le sacrifice de ses recherches personnelles dans l'intérêt général de la science. Depuis 1900 il dirigeait, avec M. le Prof. E. Jahnke, l'*Archiv der Mathematik und Physik*. Il faisait aussi partie du Comité de rédaction du *Journal de Crelle*. H. F.

A.-M. Liapounoff. — La revue anglaise *Nature*, du 27 février 1919, annonce la mort de M. A.-M. Liapounoff, membre de l'Académie des Sciences de Pétrograde.

Paul Mansion. — Les mathématiciens belges viennent de perdre l'un de leurs représentants les plus distingués, M. Paul Mansion, professeur émérite à l'Université de Gand, membre de l'Académie Royale de Belgique, décédé dans cette ville, le 18 avril 1919, à l'âge de 75 ans.

Ancien élève de l'Université de Gand, le savant géomètre exerça son professorat dès 1867 ; il remplit aussi dans cette haute école, pendant de nombreuses années, les fonctions d'inspecteur des études à l'Ecole préparatoire du Génie civil et des Arts et Manufactures, y annexée. Il fut nommé professeur émérite en 1910. Par ses remarquables qualités de savant et de professeur, M. P. Mansion laisse l'exemple d'une belle carrière scientifique.

Ses recherches appartiennent aux domaines les plus divers des mathématiques pures, notamment à l'Algèbre supérieure, à la Théorie des nombres, à l'Analyse, à l'Etude des fondements de la Géométrie et à l'Histoire des mathématiques. Parmi ses ouvrages didactiques, nous rappellerons ici ses *Eléments de la théorie des déterminants*, ses *Cours d'Algèbre supérieure* et d'*Analyse infinitésimale*, son *Traité sur la théorie des équations aux dérivées partielles du 1er ordre*, ses *Principes de Métagéométrie*, etc. Plusieurs de ces ouvrages ont été traduits en allemand et publiés par la maison Teubner à Leipzig. En 1881 il fonda, avec M. J. Neuberg, la revue *Mathesis*, qu'il ne cessa de diriger jusqu'en 1915, avec son collègue de l'Université de Liége.

Dès sa fondation, l'*Enseignement Mathématique* a eu le privilège de pouvoir compter M. Mansion au nombre des membres de son comité de patronage. H. F.

H. G. Zeuthen. — La Science mathématique vient de perdre l'un de ses meilleurs historiens, M. H. G. Zeuthen, professeur émérite à l'Université et à l'Ecole polytechnique de Copenhague. Né le 15 février 1839, le savant mathématicien danois est décédé le 15 février 1919. Ses travaux se rapportent principalement à la Géométrie des courbes et à l'Histoire des mathématiques. Chacun connaît son bel ouvrage sur l'*Histoire des mathématiques dans l'Antiquité et le Moyen âge* (édition française par J. Mascart, Paris, 1902).

Correspondant de l'Institut de France et de nombreuses sociétés scientifiques, Zeuthen était l'un des vice-présidents du 4e Congrès des mathématiciens (Rome, 1908) ; il faisait partie du Comité de rédaction des *Acta Mathematica* et des *Rendiconti di Palermo* et figurait au nombre des collaborateurs du *Bulletin des sciences mathématiques* et de l'*Encyclopédie des sciences mathématiques*. Il avait été chargé, avec M. J. H. Heiberg, de la publication des *Mémoires scientifiques de Paul Tannery*. H. F.

BIBLIOGRAPHIE

Annuaire pour l'An 1919 publié par le Bureau des Longitudes. — 1 vol. in-16 de près de 700 p. avec 14 fig., 5 cartes célestes en couleurs et 3 cartes magnétiques. Broché 3 fr. Gauthier-Villars & Cie, 55, quai des Grands-Augustins, Paris.

L'Annuaire du Bureau des Longitudes pour 1919 groupe sous un petit volume un grand nombre de renseignements numériques qui sont épars dans de volumineux traités. Il met réellement les données des sciences à la portée de tous.

Il indique les positions relatives des astres (soleil, terre, lune, planètes, étoiles) pour chaque jour de l'année ; les concordances des calendriers de tous pays ; la déclinaison en divers lieux ; les mesures légales ; les données statistiques concernant la population des villes de France.

Il contient des tables d'annuités, de survie, d'intérêt et d'amortissement.

C'est donc un guide pour le chercheur qui veut orienter le courant de ses études. C'est, pour le travailleur un ensemble de documents précieux sans cesse tenus au courant des dernières déterminations de la science.

Le volume comprend en outre deux notices. L'une, due à M. P. Appell, traite des *Figures d'équilibre relatif d'un liquide homogène en rotation, dont les éléments s'attirent suivant la loi de Newton*. C'est un résumé historique et vulgrisateur d'une difficile question ; on n'y trouve point de formules compliquées, mais, au contraire, d'ingénieux graphiques d'une vue très simple. Une bibliographie termine cette note si pleine d'originalité.

Dans la seconde notice, M. Maurice Hamy examine *La détermination interférentielle des diamètres des astres*, en reprenant aussi très simplement la théorie des interférences.

L'annuaire, dont certains ont médit, prouve que son intérêt peut être perfectionné et considérablement augmenté.

P. Appell et S. Dautheville. — **Précis de Mécanique rationnelle.** Introduction à l'étude de la Physique et de la Mécanique appliquée, à l'usage des candidats aux certificats de licence et des élèves des Ecoles techniques supérieures. 2e édition. — 1 vol. gr. in-8° de VIII-836 p. et 230 fig. ; 30 fr. ; Gauthier-Villars & Cie, Paris, 1918.

La seconde édition de cet Ouvrage affirme, une fois de plus, un succès déjà établi pour maintes autres raisons. Il pourrait être représenté dans les termes déjà employés ici (tome XIII, 1911, p. 72) lors de la publication de la première édition ; il peut être distingué d'autres ouvrages pratiques en ce qu'il observe surtout la grande symétrie et la grande généralité analytiques mais avec des formes si simples qu'on peut immédiatement insérer

les applications les plus variées que d'autres auteurs traitent laborieusement sans toujours laisser transparaître la simplicité des principes et des « équations universelles ».

A propos des principes notons toujours qu'aucune définition obligatoire de la « force » n'y figure et que la composition des « forces » concourantes n'est pas distinguée d'un principe. Il y a là des formes qui sont très vraisemblablement d'une simplicité définitive bien que les principes de la Mécanique aient toujours un certain malaise qui vient probablement de l'expérience, celle-ci les serrant de plus près qu'elle ne serre les principes de la Géométrie.

Excellentes sont les discussions sur le choix des unités et l'homogénéité; quelle source de perpétuels scandales il y a là pour les élèves insuffisamment avertis ?

La statique de la première édition s'est augmentée de statique graphique; c'est une géométrie des contours polygonaux qui est excessivement élémentaire et qui, même lorsqu'elle nécessite un complément calculé, a le grand avantage de diriger intuitivement le calcul.

La Résistance des matériaux vient également s'insérer, en un chapitre nouveau, à la fin de la Statique. Elle est débarrassée de toutes considérations relatives à une exposition préalable et tant soit peu élevée de la théorie de l'élasticité. Et l'on peut remarquer, une fois de plus, que, dans ces conditions, on n'en arrive pas moins à nombre d'élégantes formules (telle celle du flambage, due à Euler) apparues d'ailleurs dans la Science bien avant les profonds développements tirés de l'analyse des équations de l'élasticité.

C'est avec la dynamique des systèmes qu'apparaît surtout la simplicité « universelle » déjà signalée. A. de St-Germain, dans son *Recueil d'Exercices* disait déjà il y a fort longtemps : « Les méthodes de la Mécanique sont loin « de présenter les difficultés que leur attribuent trop souvent les débu- « tants; elles se ramènent à un très petit nombre de principes généraux et « les problèmes de Mécanique sont peut-être ceux qu'on peut aborder avec « le moins d'hésitation. » Ce qui semblait déjà tel pour A. de St-Germain est devenu de plus en plus vrai; les problèmes dynamiques *holonomes* uniformisés en méthode par les équations de Lagrange ne sont pas moins uniformisables par les équations fondamentales et les théorèmes généraux; c'est un des principaux mérites du présent volume que de montrer la chose sur les plus nombreux et élégants exemples.

Le principe de d'Alembert ainsi que les équations de Lagrange ne viennent qu'ensuite.

Rappelons aussi que le volume est parfaitement complet pour le niveau auquel il est assigné; il renferme les fondements de la théorie du potentiel et les éléments de la mécanique des milieux continus.

Les très nombreux exercices qui l'accompagnent ont été rajeunis à l'aide des textes des récents examens et concours; le retentissement, tout utilitaire, de la seconde édition, ne sera pas moins vif que celui de la première.

N'oublions pas de mentionner que ce nouveau livre est dédié à la mémoire du capitaine d'artillerie Albert Gauthier-Villars, mort à son poste de commandement le 14 juillet 1918; les auteurs ont, sans doute, voulu rendre hommage au patriote, engagé dans la guerre dès la première heure, ainsi qu'à l'homme éclairé qui fit l'effort connu de tous pour porter l'impression matérielle des mathématiques au plus haut degré d'art et de perfection.

A. Buhl (Toulouse).

Gustave Du Pasquier. — **Introduction à la Science actuarielle.** — 1 vol. in-8°, de 174 p. ; 5 fr. ; Delachaux & Niestlé, Neuchâtel.

L'auteur de cet ouvrage vise à combler une lacune pour les lecteurs de langue française en leur fournissant un traité *élémentaire* des principaux problèmes relatifs aux assurances. Au reste, nous ne saurions mieux faire que de reproduire les conditions qu'il se propose de remplir telles qu'elles sont énoncées dans sa *Préface :* « 1° être à la portée de lecteurs qui ne possèdent que les premiers éléments d'algèbre sans aucune connaissance spéciale ; — 2° exposer les notations et les principes fondamentaux de la science de l'actuaire ; — 3° mettre le lecteur à même de calculer le prix de revient d'un engagement viager, la prime d'une combinaison d'assurance, la réserve mathématique d'une police prise à un moment donné de son cours, d'analyser la situation financière d'une institution de prévoyance basée sur la vie humaine ; — 4° atteindre ces buts par un minimum d'effort sans renvoyer le lecteur à d'autres manuels. »

Le début de ce traité est consacré aux définitions et à une exposition des notations (internationales) de leur signification et de leur origine. Suit un aperçu des bases financières de la science actuarielle, intérêt, valeur escomptée, actuelle, acquise ; puis des bases statistiques, facteurs, taux et tables de mortalité. Enfin dans le chapitre IV l'auteur aborde la question des calculs de primes unique ou échelonnée des contrats usuels d'assurance par une méthode qu'il intitule méthode eulérienne. Le point de départ est le même que celui des méthodes classiques, soit le principe de l'égalité des valeurs actuelles des recettes et dépenses futures, au lieu d'en déduire seulement la prime unique et d'obtenir ultérieurement la prime échelonnée, il l'applique d'emblée au cas plus général où l'assuré verse de suite une somme P et à intervalles successifs égaux une somme a, ce qui lui donne une équation générale de laquelle il tire comme cas particulier la prime unique ou la prime échelonnée, selon qu'il suppose a ou P nuls.

La méthode qui consiste à établir une formule générale et à en déduire les solutions de presque tous les problèmes comme cas particuliers, est sans contredit la meilleure au point de vue logique et esthétique. Quand on se rappelle que l'auteur s'adresse plus particulièrement à ceux qui n'ont pas une préparation mathématique très complète, on peut cependant se demander s'il n'eût pas été préférable de présenter premièrement les méthodes classiques de résolution, moins abstraites parce que moins générales, puis une fois le lecteur familiarisé avec les formules ainsi obtenues, lui en montrer la synthèse dans la méthode eulérienne, qui ressort alors avec toute sa valeur. Mais M. Du Pasquier étant professeur de science actuarielle, a sans nul doute eu l'occasion d'expérimenter les deux méthodes et, dans le cas où il n'aurait trouvé aucun inconvénient d'ordre pédagogique, à appliquer exclusivement la méthode eulérienne, il ne nous reste qu'à en admirer l'élégance.

Le traité se termine, outre quelques tables numériques, par un bref chapitre sur les réserves mathématiques, leur nécessité et très succintement leurs méthodes de calcul. Etant donné l'importance pratique du sujet, il faut espérer que M. Du Pasquier y reviendra ultérieurement dans une suite à cette introduction.

En attendant, ce manuel peut rendre de réels services tout spécialement à ceux ayant eu l'occasion de se familiariser avec la routine des calculs

actuariels uniquement par la pratique, ont l'ambition de perfectionner leurs connaissances et de comprendre le pourquoi et le comment de leur travail.

R. Masson (Paris).

R. Fricke. — **Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen.** — I et II. — 2 vol. in-8°, 399 p. et 413 p. relié, 15 M. le volume ; B. G. Teubner, Leipzig.

Après une longue pratique de l'enseignement à l'Ecole technique supérieure de Braunschweig, M. Fricke a entrepris la publication d'un Traité de Calcul différentiel et intégral destiné aux étudiants de l'enseignement supérieur universitaire ou technique. Sans rien sacrifier des principes importants, et sans renoncer à une rigueur légitime et à une exactitude indispensable, il a su donner un exposé à la fois simple et clair et renoncer à des détails accessoires. Une bonne éducation mathématique exige des habitudes de rigueur. On peut simplifier l'exposé lorsqu'on s'adresse à des élèves-ingénieurs, mais jusqu'à un certain degré seulement. L'auteur n'a pas dépassé ce degré-là.

C'est surtout dans les applications que l'auteur a tenu compte des besoins des futurs physiciens, des futurs ingénieurs électriciens ou mécaniciens. Ce ne sont pas des exercices d'invention, mais des problèmes empruntés à la géométrie, à la mécanique et à la physique. L'auteur insiste aussi, très fréquemment, sur les calculs numériques, sur l'emploi des procédés grahiques et mécaniques. C'est ainsi qu'il initie l'étudiant à la pratique des planimètres, des intégrateurs, des analysateurs.

Voici une rapide énumération des chapitres dont se compose les deux volumes de ce traité :

Tome I. — Introduction : Nombres, variables et fonctions (97 p.). — I. Les bases du Calcul différentiel. — II. Les méthodes du Calcul des fonctions ; théorème de Taylor ; séries. — III. Applications du Calcul différentiel ; applications géométriques ; applications à l'étude du mouvement dans le plan et dans l'espace.

Tome II. — IV. Les bases du Calcul intégral ; intégrales indéfinies ; intégrales définies, intégrales multiples. — V. Applications du Calcul intégral. Applications géométriques. Applications en physique. Séries de Fourier ; analyse harmonique. — VI. Equations différentielles. — Appendice ; Nombres complexes et fonctions analytiques.

Le temps consacré aux mathématiques dans les écoles techniques supérieures ne permet pas au professeur de développer toutes les matières contenues dans ce traité. Le cours oral ne doit d'ailleurs pas faire double emploi avec un cours imprimé. Le livre permet de revoir les matières traitées, de retrouver les définitions et les théorèmes énoncés avec précision, de compléter et d'approfondir certains chapitres que le professeur n'a fait que signaler dans son enseignement oral.

Ecrit pour ceux qui doivent savoir appliquer les mathématiques dans les sciences physiques et techniques, le Traité de M. Fricke sera un excellent guide non seulement pour les élèves ingénieurs, mais aussi pour les étudiants en mathématiques.

H. F.

Rodolphe Guimaraes. — **Sur la vie et l'œuvre de Pedro Nunes.** — Une brochure in-8° de 87 p. ; Coïmbre, Imprimerie de l'Université, 1915.

L'Académie des Sciences de Lisbonne avait, mais sans résultat, proposé

comme sujet de concours, en 1875-1877-1880, une étude de l'œuvre remarquable de Pedro Nunes, l'inventeur du vernier *(nonius)*.

Dans son important ouvrage, *Les Mathématiques en Portugal*, M. Rodolphe Guimarães avait déjà donné une idée de cette œuvre et tracé les principales lignes de la biographie de Pedro Nunes.

Les *Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto* (vol. IX et X) ont récemment publié une étude plus développée du même auteur sur la vie et l'œuvre de Pedro Nunes. Les articles de M. R. Guimarães, réunis en une brochure de 87 p., constituent un travail définitif sur cette importante question d'histoire scientifique. On y trouve la biographie de l'illustre savant portugais, un excellent aperçu de son œuvre complète, ainsi que de précieuses indications bibliographiques. Émile Turrière.

E. Goursat. — **Cours d'Analyse mathématique**, *Tome II :* Théorie des fonctions analytiques. Equations différentielles, 3e édition revue et augmentée. — 1 vol. de IV-670 p., avec 39 fig. ; 30 fr. ; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Nos lecteurs connaissent l'œuvre magistrale publiée par M. Goursat en trois volumes sous le titre de *Cours d'Analyse mathématique*. Cet excellent ouvrage a eu un grand succès, et l'auteur a été obligé de donner une 3e édition du Tome II, après avoir publié la 3e édition du Tome I. Il nous suffira évidemment de signaler cette nouvelle édition qui ne diffère de la précédente que par quelques additions, dont la plus importante est relative à une proposition célèbre de M. Picard. « Ce théorème, dit l'auteur, a fait l'objet d'un grand nombre de travaux, qui ont conduit à une démonstration presque élémentaire, ne faisant appel qu'à des inégalités classiques de la théorie des séries entières. Il m'a semblé qu'une démonstration de cette nature avait sa place marquée dans un Cours d'Analyse. » H. F.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Annales de l'Université de Grenoble, Tome XXX, N° 2, 1918. — Gau : Sur la détermination des caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes.

Annali di Matematica, serie III, Tomo XXVII. — Bordiga : Sul modello minimo della varietà delle n-ple non ordinate dei punti di un piano. — Palatini : Sulla meccanica delle verghe. — Segre : Sui complessi lineari di piani nello spazio a cinque dimensioni. — Tortorici : Nuovi studi sulle superficie rigate. — Segre : Sulla geometria delle schiere rigate o regoli, e in particolare sui complessi lineari di tali enti. — Bianchi : Le trasformazioni di Ribaucour dei sistemi n^{pli} ortogonali et il teorema generale di permutabilità. — Nencini : Sulla classificazione aritmetica di Nöther dei sistemi lineari di curve algebriche piane.

Bulletin de la Société mathématique de France, Tome XLVI, fasc. 1 et 2. — Ed. Maillet : Sur certains types de fractions continues arithmétiques. — Amsler : Sur le développement en fractions continues d'une irrationnelle quadratique. — P. Lévy : Sur la variation de la distribution de l'électricité sur un conducteur dont la surface se déforme.

Mathematische Zeitschrift, herausgegeben von L. Lichtenstein. Verlag J. Springer. Berlin. — Le besoin d'un nouveau périodique mathématique allemand s'était fait sentir depuis plusieurs années. La plupart des rédactions étaient surchargées d'articles. Les retards que subissait la publication des mémoires ont engagé quelques savants à créer une nouvelle revue intitulée : « Mathematische Zeitschrift », qui sera consacrée uniquement à des mémoires originaux. Elle paraîtra sous la direction de M. le prof. L. Lichtenstein avec la collaboration de MM. les prof. K. Knopp, E. Schmidt et I. Schur. Le Comité de rédaction est composé de MM. les prof. W. Blaschke, L. Féjer, C. Herglotz, A. Kneser, E. Landau, O. Perron, F. Schur, E. Study et H. Weyl.

Le prix du volume est de M. 24. Il paraîtra deux volumes par an. Voici le sommaire des tomes I et II :

Band I. — E. Landau : Ueber einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie. — S. Jolles : Die Ermittlung hyperbolischer und elliptischer linearer Strahlenkongruenzen aus zwei Paar reziproker Polaren für eine Fläche II. Ordnung. — O. Perron : Ueber das Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung bei grossen Werten der unabhängig Variabeln. — G. Pick : Ueber positive harmonische Funktionen. — W. Blaschke : Eine isoperimetrische Eigenschaft des Kreises. — E. Hilb : Zur Theorie der Entwicklungen willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen. — L. Fejér : Ueber die Eindeutigkeit der Lösung der linearen partiellen Differentialgleichung zweiter Ordnung — J. Horn : Zur Theorie der nichtlinearen Differenzengleichungen. — H. Hahn : Ueber des Interpolationsproblem. — G. Pólya : Zur arithmetischen Untersuchung der Polynome. — O. Szasz : Ueber harmonische Funktionen und L.-Formen. — Id. : Ungleichungen für die Koeffizienten einer Potenzreihe. — I. Schur : Ueber endliche Gruppen und Hermitesche Formen. — T. Carleman : Ueber ein Minimalproblem der mathematischen Physik. — E. Landau : Ueber einige ältere Vermutungen und Behauptungen in der Primzahltheorie (Zweite Abhandlung). — G. Hamel : Ueber das infinitäre Verhalten der Integrale einer linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung wenn die Charakteristische Gleichung zwei gleiche Wurzeln hat. — L. Lichtenstein : Untersuchungen über die Gleichgewichtsfiguren rotierenden Flüssigkeiten, deren Teilchen einander nach dem Newtonschen Gesetze anziehen ; I. Homogene Flüssigkeiten. Allgemeine Existenzsätze. — O. Blumenthal : Ueber trigonometrische Polynome mit einer Minimumseigenschaft. — S. Jolles : Eine besondere metrische Konstruktion des linearen Strahlenkomplexes. — C. Caratheodory ; Ueber die Fourierschen Koeffizienten der nach Riemann integrierbaren Funktionen. — R. Courant : Beweis des Satzes, dass von allen homogenen Membranen gegebenen Umfanges und gegebener Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton besitzt. — A. Winternitz : Ueber den Jordanschen Kurvensatz und verwandte Sätze der Analysis situs. — G. Szegoe : Ein Beitrag zur Theorie der Polynome von Laguerre und Jacobi. — E. Hecke : Eine neue Art von Zetafunktionen und ihre Beziehungen zur

Verteilung der Primzahlen. — I. Schur : Ueber die Verteilung der Wurzeln bei gewissen algebraischen Gleichungen mit ganzzahligen Koeffizienten. — H. Bohr : Ueber Streckentreue und konforme Abbildung. — R. Sturm : Einfacherer Beweis für die acht Schnittpunkte dreier Flächen zweiter Ordnung. — Id. : Die doppelte Bedingung für eine Rotationsfläche zweiten Grades. — O. Szasz : Berichtigung.

Band II. — L. Bieberbach : Ueber einen Osgoodschen Satz aus der Integralrechnung. — Id. : Zwei Sätze über das Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung wesentlich singulärer Stellen. — Id. : Zur Theorie der komplexen Zahlen. — H. Cramer : Ueber die Nullstellen der Zetafunktion. — P. Epstein : Ueber Möbiuskettenbrüche und Elementarkettenbrüche. — W. Gross : Zum Verhalten analytischer Funktionen in der Umgebung singulärer Stellen. — K. Hensel : Eine neue Theorie der algebraischen Zahlen. — S. Jolles : Der rotatorische elliptische Komplexbüschel und die neue Konstruktion des linearen Strahlenkomplexes. — Id. : Der Büschel kubischer Raumkurven und seine autokonjugierte Kurve. — A. Kneser : Kleinste Wirkung und Galileische Relativität. — P. Koebe : Abhandlungen zur Theorie der konformen Abbildung V. Abbildung mehrfach zusammenhängender schlichter Bereiche auf Schlitzbereiche (Fortsetzung). — K. Knopp : Ein einfaches Verfahren zur Bildung stetiger nirgends differenzierbarer Funktionen. — E. Landau : Ueber Ideale und Primideale in Idealklassen. — Id. : Ein Satz über Riemannsche Integrale. — F. Lukacs : Verschärfung des ersten Mittelwertsatzes der Integralrechnung für rationale Polynome. — W. Fr. Meyer : Ueber die Möbiussche Figur zweier einander ein-und umbeschriebener Tetraeder, und die Figur einer einem Tetraeder umbeschriebenen geradlinigen Fläche zweiter Ordnung. — H. Mohrmann : Ueber eine besondere Klasse von Linienkomplexen. — G. Pólya : Ueber die Nullstellen gewisser ganzer Funktionen. — H. Rademacher : Zu dem Borelschen Satz über die asymptotische Verteilung der Ziffern in Dezimalbrüchen. — F. Riesz : Ueber die Fourier Koeffizienten einer stetigen Funktion von beschränkter Schwankung. — G. Scheffers : Flächentreue Abbildungen in der Ebene. — O. Toeplitz : Das algebraische Amalogon zu einem Satze von Fejér. — H. Weyl : Reine Infinitesimalgeometrie.

Revue de métaphysique et de morale, Année 1918, N° 1. — H. Bourget : Les mesures et notre connaissance du monde extérieur. — N° 2. — L. Rougier : Encore la dégradation de l'énergie : l'entropie s'accroît-elle ? — N° 3. — E. Guillaume : La théorie de la relativité et le temps universel. — N° 4. — C. D. Broad : Sur la dégradation de l'énergie.

Revue scientifique, 55, rue de Châteaudun, Paris. Année 1918. — N° du 29 juin, 6, 13 juillet. R. Chevassus : Les papiers logarithmiques et leurs diverses applications. — 31 août. C. Bigourdan : La vie et les travaux de l'astronome Ch. Wolf. — 20-27 octobre. Ch. Mourre : Les causes des variations du taux de l'intérêt.

2. Livres nouveaux :

Annuaire pour l'an 1919 publié par le Bureau des Longitudes. Avec des Notices scientifiques. — 1 vol. in-16, 700 p. ; 3 fr. ; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

P. Appell et S. Dautheville. — **Précis de Mécanique rationnelle.** Introduction à l'étude de la Physique et de la Mécanique appliquée. 2e édition revue et augmentée. — 1 vol. in-8° de VIII-734 p. avec 230 fig. ; 50 fr. ; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

R. C. Archibald. — **The Training of Teachers of Mathematics** of the Secondary Schools of the Countries represented in the international Commission on the Teaching of Mathematics (Bulletin of the Bureau of Education for 1917, N° 27). — 1 vol. in-8°, 289 p. ; Bureau of Education, Washington.

P. Boutroux. — **Les principes de l'analyse mathématique.** Exposé historique et critique, *Tome second.* — 1 vol. in-8°, 512 p. ; 20 fr. ; A. Hermann & fils, Paris.

M. Cashmore. — **Fermat's Last Theorem.** Three Proofs by Elementary Algebra. — 1 vol. in-16. 55 p. ; 2 sh 6 d. ; G. Bell & Sons, London.

Ch. Davison. — **Differential Calculus for Colleges and Secondary Schools.** — 1 vol. in-16, 309 p. ; 6 sh. ; G. Bell & Sons, London.

M. A. Trevor Dennis. — **An Arithmetic for Preparatory Schools.** — 1 vol. in-8°, 376 p. ; 4 sh. 6 d. ; G. Bell & Sons, London.

L.-G. Du Pasquier. — **Introduction à la Science actuarielle.** — 1 vol. in-8°, 174 p. ; 5 fr. ; Delachaux & Niestlé, Neuchâtel.

R. C. Fawdry. — **Dynamics,** *Part II.* — 1 vol in-16, 176 p. ; 2 sh. 6 d. ; G. Bell & Sons, London.

E. Goursat. — **Cours d'Analyse mathématique,** *Tome II :* Théorie des fonctions analytiques. Equations différentielles. 3e édition entièrement refondue. — 1 vol. de IV-670 p. avec 39 fig. ; 30 fr. ; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Œuvres de G. H. Halphen, publiées par les soins de C. Jordan, H. Poincaré, E. Picard, avec la collaboration de E. Vessiot. *Tome II.* — 1 vol. de VII-560 p., avec 1 portrait ; 40 fr. ; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

G. Kowalewski. — **Einführung in die Infinitesimalrechnung.** (Aus Natur und Geisteswelt, n° 197.), 3e édition. — 1 vol. in-16, 100 p., avec 19 fig. ; 1 M. 60 ; B. G. Teubner, Leipzig.

John Milne. — **The Analytical Geometry of the straight Line and the Circle.** — 1 vol. in-16, 243 p. ; 5 sh. ; G. Bell & Sons, London.

W. P. Milne et G. J. B. Westcott. — **A first Course in the Calculus.** *Part I.* Powers of x. — 1 vol. in-16, 196 p. ; 3 sh. 6 d. ; G. Bell & Sons, London.

A. Oppermann. — **Premiers éléments d'une théorie du quadrilatère complet.** — 1 vol. in-8°, 76 p avec 26 fig., avec une planche hors texte ; 4 fr. ; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

L. Silberstein. — **Projective Vector Algebra,** an Algebra of Vectors independent of the Axioms of Congruence and of Parallels. — 1 vol. in-8°, 78 p., avec 29 fig. ; 7 sh. 6 s. ; G. Bell & Sons, London.

D. E. Smith. — **Numbers Stories on Long Ago.** — 1 vol. in-16, 136 p., illustré ; 48 cents. Avec un supplément intitulé : *Number Puzzles before the Log Fire,* being those given in the Number Stories of Long Ago, 14 p. in-16. Ginn & Co, New-York.

Alb. Turc. — **Introduction élémentaire à la Géométrie Lobatschewskienne.** Ouvrage posthume publié d'après les notes de l'auteur. — 1 vol. in-8°, 170 p., 78 fig. ; 3 fr. 50 ; Librairie scientifique Kündig, Genève ; Librairie H. Gaulon, Paris.

SUR UNE TRANSFORMATION ÉLÉMENTAIRE ET SUR QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES

PAR

C. CAILLER (Genève).

---

1. — La plupart des traités d'Algèbre élémentaire consacrent au moins quelques pages à l'étude de la transformation $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, dans laquelle $f(x)$ et $g(x)$ désignent deux polynômes quelconques du second degré ; elle offre un exemple d'une détermination d'extremum sans l'intervention d'aucune idée de continuité. En dehors de cette application classique, la transformation précédente, qui constitue en Géométrie la base de la théorie de l'involution de 4 points, joue encore un rôle essentiel dans nombre de problèmes d'Analyse : parmi ceux-ci on peut citer l'intégration des irrationnelles du second degré, la réduction des intégrales elliptiques à la forme normale de Legendre, l'abaissement au type elliptique de certaines catégories d'intégrales abéliennes, etc.

En dépit de ces multiples applications la plupart des auteurs, en s'occupant de l'équation $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, s'en tiennent au cas où les deux polynômes f et g sont réels de même que les variables x et y. Or le cas général n'est ni moins simple ni moins intéressant, et comme il est peu connu, on me permettra de revenir ici sur la transformation dont il s'agit envisagée dans toute son étendue. On va voir avec quelle facilité la discussion peut être poussée à bout ; elle s'appuie sur la transformation *circulaire* de la Géométrie et permet d'établir aisément la correspondance entre le plan simple

de la variable x et le double feuillet de Riemann qui est le lieu de la variable y.

A cette question d'ordre algébrique j'adjoindrai quelques-unes des applications d'Analyse mentionnées plus haut, formant du tout une espèce d'exercice d'Algèbre et de Calcul intégral qui n'est pas peut-être dénué de tout intérêt [1].

2. — Soient donc f et g deux polynômes quelconques du second degré; nous les supposons seulement premiers entre eux. Posons

$$\begin{aligned} f &= a_0 x^2 + a_1 x + a_2 = a_0 (x - \alpha_1)(x - \alpha_2) , \\ g &= b_0 x^2 + b_1 x + b_2 = b_0 (x - \beta_1)(x - \beta_2) . \end{aligned} \tag{1}$$

Pour la brièveté, nous ferons encore

$$f_1 = f(\beta_1) , \qquad f_2 = f(\beta_2) , \qquad g_1 = g(\alpha_1) , \qquad g_2 = g(\alpha_2) ;$$

aucune de ces quantités n'est nulle.

Aux polynômes f et g est associé un autre polynôme, également du second degré,

$$h(x) = g^2 \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = g(x) f'(x) - f(x) g'(x) , \tag{2}$$

aux racines η_1 et η_2. On s'assure aisément que ces racines sont toujours distinctes.

Il est aisé aussi de constater le caractère invariant de la relation existant entre f, g et h, vis-à-vis des transformations linéaires $\left(x, \frac{\gamma x + \delta}{\gamma' x + \delta'}\right)$ de module $\gamma\delta' - \gamma'\delta$ égal à l'unité. Enfin $h(x)$ est un *combinant* des polynômes f et g, c'est-à-dire que ce polynôme se reproduit, sauf un facteur constant, toutes les fois qu'on remplace f et g par deux nouveaux polynômes,

$$\mathrm{F} = rf + sg , \qquad \mathrm{G} = r'f + s'g ,$$

contenus l'un et l'autre dans leur faisceau.

Désignons encore par $\mathrm{G}(y)$ le discriminant, relatif à x, du faisceau précédent écrit sous la forme $f - yg$. $\mathrm{G}(y)$ est

[1] Le lecteur est prié de faire lui-même les figures nécessaires à la compréhension du texte.

quadratique en y, se réduit à $f'^2(\alpha_1) = f'^2(\alpha_2)$ quand $y = 0$; si donc ses racines sont désignées par y_1 et y_2, nous aurons

$$G(y) = f'^2(\alpha_1)\left(1 - \frac{y}{y_1}\right)\left(1 - \frac{y}{y_2}\right). \tag{3}$$

Dans le cas de réalité, la signification des polynômes $h(x)$ et $G(y)$ est évidente; les racines du premier, η_1 et η_2, déterminent les positions des extremas du rapport $\frac{f}{g}$, les racines du second définissent les valeurs mêmes de ces extremas. Il est aisé de préciser davantage les relations existant, dans le cas général, entre ces éléments $h(x)$ et $G(y)$.

Les définitions ci-dessus montrent en effet tout de suite que, sauf certains facteurs constants, les polynômes $f - y_1 g$ et $f - y_2 g$ sont égaux aux carrés $(x - \eta_1)^2$ et $(x - \eta_2)^2$: on détermine les facteurs par une hypothèse particulière, par exemple en faisant $x = \alpha_1$, ou $x = \alpha_2$ et l'on obtient ainsi immédiatement

$$\begin{aligned} f - y_1 g &= -y_1 g_1 \frac{(\eta_1 - x)^2}{(\eta_1 - \alpha_1)^2} = -y_1 g_2 \frac{(\eta_1 - x)^2}{(\eta_1 - \alpha_2)^2}, \\ f - y_2 g &= -y_2 g_1 \frac{(\eta_2 - x)^2}{(\eta_2 - \alpha_1)^2} = -y_2 g_2 \frac{(\eta_2 - x)^2}{(\eta_2 - \alpha_2)^2}. \end{aligned} \tag{4}$$

De là, des formes équivalentes, très variées, pour la transformation $y = \frac{f(x)}{g(x)}$. En voici quelques-unes :

$$1 - \frac{y}{y_1} = \frac{g_1}{g}\frac{(\eta_1 - x)^2}{(\eta_1 - \alpha_1)^2} = \frac{g_2}{g}\frac{(\eta_1 - x)^2}{(\eta_1 - \alpha_2)^2}, \tag{5}$$

$$1 - \frac{y}{y_2} = \frac{g_1}{g}\frac{(\eta_2 - x)^2}{(\eta_2 - \alpha_1)^2} = \frac{g_2}{g}\frac{(\eta_2 - x)^2}{(\eta_2 - \alpha_2)^2}, \tag{6}$$

puis par division [1]

$$\frac{1 - \frac{y}{y_1}}{1 - \frac{y}{y_2}} = \left(\frac{\eta_1 - x}{\eta_2 - x}\right)^2 \left(\frac{\eta_2 - \alpha_1}{\eta_2 - \alpha_1}\right)^2. \tag{7}$$

[1] On voit par là qu'en exécutant deux transformations linéaires convenables sur les variables x et y, la transformation $y = \frac{f(x)}{g(x)}$ peut toujours se réduire à la forme simple $y = x^2$; cette propriété est la source de tout ce qui suit.

A remarquer également que y_1 et y_2 sont toujours distincts, c'est une conséquence de la même formule (7).

Cette dernière formule, la plus importante de toutes, se généralise aisément. Désignons par γ_1 et γ_2 les deux racines d'un polynôme $f - cg$ appartenant au faisceau (f, g), nous aurons

$$\frac{1-\frac{c}{\gamma_2}}{1-\frac{c}{\gamma_1}}\,\frac{1-\frac{y}{\gamma_1}}{1-\frac{y}{\gamma_2}} = \left(\frac{\eta_1 - x}{\eta_2 - x}\right)^2 \left(\frac{\eta_2 - \gamma_1}{\eta_1 - \gamma_1}\right)^2 = \left(\frac{\eta_1 - x}{\eta_2 - x}\right)^2 \left(\frac{\eta_2 - \gamma_2}{\eta_1 - \gamma_2}\right)^2 .$$

Récrivons les formules (5) et (6) sous la forme

$$\sqrt{1-\frac{y}{\gamma_1}} = \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g}}\,\frac{\eta_1 - x}{\eta_1 - \alpha_1}, \qquad \sqrt{1-\frac{y}{\gamma_2}} = \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g}}\,\frac{\eta_2 - x}{\eta_2 - \alpha_1}, \tag{8}$$

d'où, par multiplication,

$$\sqrt{G(y)} = f'(\alpha_1)\frac{g_1}{g}\,\frac{(\eta_1 - x)(\eta_2 - x)}{(\eta_1 - \alpha_1)(\eta_2 - \alpha_1)} = \frac{g_1 f'(\alpha_1)}{h(\alpha_1)}\,\frac{h(x)}{g(x)}\,; \tag{9}$$

mais, d'après la définition (2) de $h(x)$, nous avons $h(\alpha_1) = g_1 f'(\alpha_1)$, par conséquent la dernière formule doit se lire simplement

$$\sqrt{G(y)} = \frac{h(x)}{g(x)}\,. \tag{10}$$

Comme d'autre part

$$dy = d\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{h(x)\,dx}{g^2(x)}\,,$$

nous avons encore l'identité

$$\frac{dy}{\sqrt{G(y)}} = \frac{dx}{g(x)}\,; \tag{11}$$

cette dernière joue le plus grand rôle dans les problèmes d'intégration dont j'ai parlé plus haut.

3. — Notre premier soin consiste naturellement à lever les ambiguïtés de signe qui subsistent dans les formules (8) et se répercutent dans (9). Il faut, par une discussion préalable, fixer la signification précise de la corrélation existant entre x et y, ou ce qui est au fond la même chose, avoir une idée claire de la correspondance géométrique entre les plans des variables complexes x et y.

Commençons par une remarque. D'après (5) et (6) nous avons

$$\left(\frac{\eta_1 - \alpha_1}{\eta_1 - \alpha_2}\right)^2 = \left(\frac{\eta_2 - \alpha_1}{\eta_2 - \alpha_2}\right)^2 = \frac{g_1}{g_2},$$

donc, en tenant compte du fait que η_1 est différent de η_2,

$$\frac{\eta_1 - \alpha_1}{\eta_1 - \alpha_2} = -\frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g_2}}, \qquad \frac{\eta_2 - \alpha_1}{\eta_2 - \alpha_2} = \frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g_2}}, \tag{12}$$

formules où les signes de $\sqrt{g_1}$ et $\sqrt{g_2}$ sont choisis arbitrairement[1]. On a donc, explicitement,

$$\eta_1 - \alpha_1 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\sqrt{g_1}}{\sqrt{g_1} + \sqrt{g_2}}, \qquad \eta_2 - \alpha_1 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\sqrt{g_1}}{\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}}, \tag{13}$$

$$\eta_1 - \alpha_2 = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\sqrt{g_2}}{\sqrt{g_1} + \sqrt{g_2}}, \qquad \eta_2 - \alpha_2 = \frac{(\alpha_2 - \alpha_1)\sqrt{g_2}}{\sqrt{g_1} - \sqrt{g_2}}. \tag{14}$$

Reprenons la formule (12) et rappelons quelle est la signification géométrique d'un rapport tel que $\frac{z - \alpha_1}{z - \alpha_2}$: son module est égal au quotient des distances $\overline{z\alpha_1}$, $\overline{z\alpha_2}$, quant à l'argument[2], il est égal à l'angle sous lequel le segment $\overrightarrow{\alpha_1\alpha_2}$ se voit du point z, angle positif ou négatif selon que z est à droite ou à gauche du dit segment.

La différence des arguments des deux membres, dans la formule (12), étant évidemment égale à π, on conclut que *les quatre points* α_1, α_2 et η_1, η_2 *appartiennent au même cercle, et que les deux cordes joignant les points de chaque couple se rencontrent à l'intérieur du cercle.*

Mais les quantités η_1 et η_2 restent les mêmes quand on substitue au polynôme f, un autre polynôme du faisceau $f - yg$. Ainsi donc, d'une manière générale : *si l'on considère les racines* γ_1 et γ_2 *d'un polynôme tel que* $f - cg$, *elles forment avec celles* η_1, η_2 *du polynôme* $h(x)$ *un polygone ins-*

---

[1] Le changement des signes des radicaux revient à permuter les racines η_1 et η_2.
[2] Supposé compris entre $-\pi$ et $+\pi$.

criptible dans un cercle et les deux cordes se croisent à l'intérieur du cercle.

Il y a plus. D'après (12), les modules des rapports $\frac{\eta_1 - \alpha_1}{\eta_1 - \alpha_2}$ et $\frac{\eta_2 - \alpha_1}{\eta_2 - \alpha_2}$ sont égaux.

Par suite, si l'on définit le *rapport de section* de trois points η_1, α_1, η_2 situés sur un même cercle comme égal au quotient des cordes $\alpha_1\eta_1$ et $\alpha_1\eta_2$, on voit que *les deux racines α du polynôme* f, *ou même plus généralement les deux racines γ du polynôme* f — cg, *sont conjuguées harmoniques sur le cercle correspondant, ou divisent de la même manière le segment $\eta_1\eta_2$.*

La théorie de l'involution dépend essentiellement du polynôme $h(x)$ associé à $f(x)$ et $g(x)$. Ainsi quand on envisage cette théorie dans le domaine complexe à la lumière des résultats précédents, on la voit se résumer dans la proposition suivante.

Etant donnés dans un plan deux couples de points α_1, α_2 et β_1, β_2, on peut toujours tracer deux cercles contenant respectivement l'un et l'autre couple, de telle manière que les points d'intersection de ces deux cercles soient réels et divisent harmoniquement les arcs $\alpha_1\alpha_2$ et $\beta_1\beta_2$.

4. — D'après ce qui vient d'être dit il est clair qu'ayant mené suivant η_1 et η_2 un cercle quelconque C tout couple γ_1, γ_2 placé sur ce cercle de part et d'autre de la corde $\eta_1\eta_2$, s'il vérifie d'ailleurs la proportion des distances $\frac{\gamma_1\eta_1}{\gamma_1\eta_2} = \frac{\gamma_2\eta_1}{\gamma_2\eta_2}$, représente un polynôme du faisceau $f - yg$, ou une valeur de y. Qu'on change le cercle C en D, et la racine γ_1 en δ_1; si, par exemple, δ_1 est à l'intérieur de C, la racine δ_2, conjuguée à celle-ci, et qui fournit la même valeur y, sera nécessairement à l'extérieur de C, car δ_1 et δ_2 doivent se trouver de part et d'autre de la corde $\eta_1\eta_2$.

Récapitulons. Soit C un cercle fixe mené suivant $\eta_1\eta_2$. A toute valeur x comprise à l'intérieur de C correspond une valeur de y. Réciproquement à toute valeur y correspondent suivant l'équation quadratique $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, deux valeurs de x,

l'une à l'intérieur du cercle C, l'autre à l'extérieur[1]. Si l'une des valeurs de x est sur le cercle même, l'autre s'y trouvera pareillement; les deux seront séparées par la corde $\eta_1 \eta_2$, de telle manière que quand la variable x décrit l'arc $\eta_1 \eta_2$ situé à gauche de la corde, la variable y engendre dans son plan une ligne Γ qui ne se coupe pas elle-même et réunit les points y_1 et y_2. Cette même ligne Γ se reproduira en sens inverse lorsque x reviendra de η_2 en η_1 en suivant l'arc de droite.

Tout l'intérieur du cercle C se transforme ainsi dans le plan simple des y, et ce plan est muni de la coupure Γ deux fois décrite entre y_1 et y_2. La représentation est partout conforme, sauf aux points η_1 et η_2; les angles tracés dans x, autour de ces points, subissent dans la figure y, une duplication autour des points correspondants y_1 et y_2.

De même, l'extérieur du cercle C engendre un second feuillet du plan y, muni de la même coupure Γ que le premier; les deux feuillets se traversent l'un l'autre le long de Γ de la même manière que l'intérieur et l'extérieur du cercle C communiquent entre eux au bord du cercle.

Il y a, comme toujours, une infinité de manières de construire la surface de Riemann. En changeant le cercle C, nous n'altérons pas les caractères généraux de la représentation; la coupure Γ, image du cercle C dans le plan y, variera naturellement avec le cercle. Voyons ce qui en est.

Soient, comme ci-dessus, $f - cg$ le polynôme relatif au cercle C, γ_1 et γ_2 les racines correspondantes, D un nouveau cercle le long duquel se déplace le point x. Suivant que ce point est à droite ou à gauche de la corde $\eta_1 \eta_2$, le quotient $\frac{\eta_1 - x}{\eta_2 - x}$ possède deux arguments, qui sont constants l'un et l'autre, et d'ailleurs supplémentaires. Il résulte dès lors de la formule (7) que le rapport $\frac{y_1 - y}{y_2 - y}$ possède un seul argument constant quand x se déplace sur D.

---

[1] Il est aisé d'obtenir, sous des formes équivalentes, la relation existant entre les deux valeurs de x fournissant le même y. Une de ces formes est

$$\frac{x_1 - \alpha_1}{x_1 - \alpha_2} \frac{x_2 - \alpha_1}{x_2 - \alpha_2} = \frac{g_1}{g_2}.$$

Ainsi tout cercle complet passant aux points η_1 et η_2, tel qu'est le cercle D, se reproduit dans le plan y sous la forme d'un arc de cercle Γ limité aux points extrêmes y_1 et y_2. On obtient de la sorte une idée très nette de la correspondance existant entre les plans x et y : en voici l'essentiel.

Considérons, dans x, la figure classique comprenant tous les cercles joignant η_1 et η_2, ainsi que les cercles C′ orthogonaux aux précédents; cette double famille de cercles se reproduira, dans le plan y, d'une manière exactement pareille et nous aurons des cercles Γ passant tous en y_1 et y_2, et les orthogonaux Γ' des cercles précédents. Seulement tandis que les C sont des cercles complets, les Γ seront des arcs arrêtés en y_1 et y_2; chacun de ces arcs peut être considéré comme une coupure d'une surface de Riemann particulière. En outre, quand x décrit une seule fois un cercle C′, la variable y entoure deux fois de suite le cercle correspondant Γ'; pour obtenir une seule description du cercle Γ', de manière que partant d'un des bords de la coupure Γ on arrive au bord opposé sans l'avoir traversée, il faudrait limiter le cercle C′ à la portion comprise, soit à l'intérieur, soit à l'extérieur d'un certain cercle C.

5. — La transformation étant écrite sous la forme $y = \frac{f}{g}$, pour appliquer ce qui précède, on prendra le plus souvent comme cercle fixe C, celui qui contient les racines $\alpha_1 . \alpha_2$ du polynôme f. Dans ce cas, l'arc Γ qui sert de coupure contiendra l'origine du plan y. Si l'on choisit pour C le cercle contenant les racines $\beta_1 \beta_2$ du polynôme g, le cercle Γ doit passer par les points de l'infini; il est donc devenu rectiligne et se compose des deux prolongements de la droite $y_1 y_2$. Dans l'une comme dans l'autre hypothèse la coupure est connue à priori. Adoptons la première.

Le cercle C contient ainsi à sa périphérie les racines α_1 et α_2, de part et d'autre de la corde $\eta_1 \eta_2$; en outre un des pôles β_1 du quotient $\frac{f}{g}$ se trouve à l'intérieur du cercle, l'autre étant à l'extérieur. Joignons les points α_1 et α_2 par une

ligne $\mathcal{L}$ qui ne se coupe pas elle-même et ne sorte pas du cercle C.

Il résulte immédiatement de la conformation de la surface de Riemann que quand x décrit la ligne $\mathcal{L}$, la variable y part de l'origine pour y revenir de l'autre côté de la coupure Γ, après avoir décrit un lacet Λ. Et le point y_i qu'enveloppe le dit lacet correspond au point η_i qui, relativement à la ligne $\mathcal{L}$, est situé de l'autre côté que le pôle β_1. Supposons que c'est η_1.

Il est maintenant aisé de supprimer les ambiguïtés de signe que contenaient les formules 8).

Désignons par $\sqrt{g_2}$ la valeur de la fonction $\sqrt{g(x)}$, prolongée suivant la ligne $\mathcal{L}$, à partir de la valeur initiale $\sqrt{g_1}$ dont le signe sera choisi à volonté.

Les valeurs initiales des radicaux $\sqrt{1-\frac{y}{y_1}}$ et $\sqrt{1-\frac{y}{y_2}}$ sont égales entre elles, toutes deux à l'unité. La valeur finale du premier radical, ou $\frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g_2}}\frac{\eta_1-\alpha_2}{\eta_1-\alpha_1}$ doit être égale à -1, la variable y ayant circulé autour du point y_1. Au contraire, le point y_2 est resté en dehors du circuit Λ, le radical $\sqrt{1-\frac{y}{y_2}}$ reprend donc sa valeur de départ et l'on a $\frac{\eta_2-\alpha_1}{\eta_2-\alpha_2}=\frac{\sqrt{g_1}}{\sqrt{g_2}}$.

Ces résultats qui sont d'accord formellement avec les équations (12) en précisent la signification : *si donc $\sqrt{g_2}$ est le prolongement de $\sqrt{g_1}$ le long de la ligne $\mathcal{L}$, η_1 et β_1 seront placés de part et d'autre de la ligne $\mathcal{L}$. η_2 et β_1 seront du même côté.*

La règle précédente n'est pas changée dans l'hypothèse qui peut très bien se rencontrer où les six points α, β, η appartiendraient à un seul et même cercle. Ainsi que nous savons, les points de chaque couple α_1, α_2 et β_1, β_2 sont de côtés différents par rapport à la corde $\eta_1\eta_2$, et les proportions

$$\frac{\alpha_1\eta_1}{\alpha_1\eta_2}=\frac{\alpha_2\eta_1}{\alpha_2\eta_2}, \quad \text{et} \quad \frac{\beta_1\eta_1}{\beta_1\eta_2}=\frac{\beta_2\eta_1}{\beta_2\eta_2},$$

font voir que les cordes $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ et $\overline{\beta_1\beta_2}$ ne peuvent pas se couper

à l'intérieur du cercle. D'où il suit que β_1 et β_2 seront toujours du même côté de la ligne $\mathcal{L}$, tous deux dans la région opposée à η_1.

Le cas examiné à l'instant comprend en particulier celui où les six quantités α, β, η, seraient toutes réelles.

Supposons les α et β réels; il résulte de ce qui vient d'être dit que si les segments rectilignes $\overline{\alpha_1\alpha_2}$ et $\overline{\beta_1\beta_2}$ empiètent l'un sur l'autre les η ne peuvent être réels.

Pour la réalité de η_1 et η_2, il faut donc, mais il suffit aussi, que les dits segments, ou n'aient aucune partie commune, ou que l'un d'eux soit inclus dans l'autre; les deux cas n'en font qu'un, car en reliant au besoin par l'infini les deux points appartenant au même couple, on peut toujours se figurer que les segments réels dont il s'agit ne possèdent aucun élément commun. Et alors l'étude des extremas du rapport réel

$$\frac{b_0}{a_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{(x-\beta_1)(x-\beta_2)}$$

montre à l'instant que chacun des segments $\overline{\alpha_1\alpha_2}$, $\overline{\beta_1\beta_2}$, décrits comme il vient d'être dit, contient une racine η_1 et η_2 du polynôme $h(x)$.

Dans ce cas de réalité, c'est l'axe des x qui joue le rôle du cercle C; les parties, intérieure ou extérieure, du même cercle se confondent avec les demi-plans, positif ou négatif, du plan complexe. Et l'on voit immédiatement que si α_1 et α_2 sont réunis par une ligne $\mathcal{L}$ tracée sur un seul de ces deux demi-plans, le lacet Λ correspondant, qui joint l'origine à elle-même dans le plan y, entoure le point $y_1 = \frac{f(\eta_1)}{g(\eta_1)}$, où η_1 est la racine de $h(x)$ appartenant au segment $\alpha_1\alpha_2$.

6. — Pour terminer, présentons quelques applications se rattachant au calcul intégral. Considérons d'abord l'intégrale

$$\int \frac{f(x)^{m-1}}{g(x)^{m+\frac{1}{2}}}\,dx\,, \tag{15}$$

nous avons identiquement

$$\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{a_0^{m-1}} \int \frac{f(x)^{m-1}}{g(x)^{m+\frac{1}{2}}} dx = \int \frac{(x-\alpha_1)^m (x-\alpha_2)^{m-1}}{g(x)^{m+\frac{1}{2}}} dx$$
$$- \int \frac{(x-\alpha_2)^m (x-\alpha_1)^{m-1}}{g(x)^{m+\frac{1}{2}}} dx . \tag{16}$$

Mais, à cause de la formule (11),

$$\frac{dx}{g(x)} = \frac{dy}{\sqrt{G(y)}} = \frac{dy}{\sqrt{\left(1-\frac{y}{y_1}\right)\left(1-\frac{y}{y_2}\right)}} \frac{1}{f'(\alpha_1)} ;$$

la première des intégrales du second membre de (16) s'écrit encore

$$\int \frac{x-\alpha_1}{\sqrt{g(x)}} \left[\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{g(x)}\right]^{m-1} \frac{dx}{g(x)} = \int \frac{x-\alpha_1}{\sqrt{g(x)}} \frac{y^{m-1} dy}{\sqrt{G(y)}} . \tag{17}$$

et, de même, la seconde,

$$\int \frac{x-\alpha_2}{\sqrt{g(x)}} \left[\frac{(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)}{g(x)}\right]^{m-1} \frac{dx}{g(x)} = \int \frac{x-\alpha_2}{\sqrt{g(x)}} \frac{y^{m-1} dy}{\sqrt{G(y)}} . \tag{18}$$

D'autre part, les formules (8) nous donnent évidemment avec certains coefficients constants A_1, B_1, A_2, B_2

$$\frac{x-\alpha_1}{\sqrt{g(x)}} = A_1 \sqrt{1-\frac{y}{y_1}} + B_1 \sqrt{1-\frac{y}{y_2}} ,$$

$$\frac{x-\alpha_2}{\sqrt{g(x)}} = A_2 \sqrt{1-\frac{y}{y_1}} + B_2 \sqrt{1-\frac{y}{y_2}} .$$

Par suite, en transportant ces valeurs dans (16), (17), (18), nous obtenons un résultat tel que le suivant

$$\int \frac{f(x)^{m-1}}{g(x)^{m+\frac{1}{2}}} dx = P \int \frac{y^{m-1} dy}{\sqrt{1-\frac{y}{y_1}}} + Q \int \frac{y^{m-1} dy}{\sqrt{1-\frac{y}{y_2}}} , \tag{19}$$

où P et Q désignent de nouvelles constantes.

Par exemple, si l'on fait $m = \frac{1}{4}$, on trouve immédiatement le résultat suivant qui est bien connu.

Soit $X = f(x)g(x)$ un polynôme quelconque du 4e degré, la transformation $z^4 = \frac{f(x)}{g(x)}$ ramène l'intégrale abélienne $\int \frac{dx}{X^{3/4}}$ à deux intégrales elliptiques appartenant chacune au type de la lemniscate $\int \frac{dz}{\sqrt{1 - az^4}}$.

7. — Il est aisé de généraliser, de différentes manières, la formule (19); on a, par exemple, quel que soit l'exposant k,

$$\int \frac{dx}{f(x)^{1-m} g(x)^{m-k+\frac{1}{2}} (ag + bf)^k} = \mathrm{P} \int \frac{y^{m-1} dy}{\sqrt{\left(1 - \frac{y}{y_1}\right)} (a + by)^k} + \mathrm{Q} \int \frac{y^{m-1} dy}{\sqrt{1 - \frac{y}{y_2}} (a + by)^k}. \tag{20}$$

Par suite, si $k = m = \frac{1}{2}$, on voit qu'une intégrale hyperelliptique de la forme

$$\int \frac{dx}{\sqrt{fg(ag + bf)}}, \tag{21}$$

est réductible à deux intégrales elliptiques de la première espèce.

Revenons au type (19), et faisant

$$\alpha_1 = 0, \quad \alpha_2 = 1, \quad \text{ou} \quad f(x) = x(1 - x),$$

proposons-nous de déterminer l'intégrale définie

$$\int_0^1 \frac{x^m (1 - x)^{m-1} dx}{g(x)^{m+\frac{1}{2}}}, \tag{22}$$

où le chemin d'intégration est rectiligne, tandis que l'exposant m est supposé supérieur à l'unité pour la convergence. En ce qui concerne $g(x)$, nous admettons qu'il ne possède

aucune racine réelle entre 0 et 1, et nous posons $g_0 = g(0)$ et $g_1 = g(1)$.

Faisons $y = \frac{f(x)}{g(x)}$, l'intégrale devient

$$\int \frac{y^{m-1}\,dy}{\sqrt{G(y)}} \frac{x}{\sqrt{g(x)}} .$$

Mais les formules (8) nous donnent ici

$$\eta_1 \sqrt{1 - \frac{y}{y_1}} = \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g}} (\eta_1 - x) \; ; \qquad \eta_2 \sqrt{1 - \frac{y}{y_2}} = \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g}} (\eta_2 - x) ,$$

puis

$$\frac{x}{\sqrt{g}} = \frac{\eta_1 \eta_2}{(\eta_2 - \eta_1)\sqrt{g_0}} \left(\sqrt{1 - \frac{y}{y_2}} - \sqrt{1 - \frac{y}{y_1}} \right) ,$$

soit, en vertu de (12),

$$\frac{x}{\sqrt{g}} = \frac{1}{2\sqrt{g_1}} \left(\sqrt{1 - \frac{y}{y_2}} - \sqrt{1 - \frac{y}{y_1}} \right) . \tag{23}$$

Il convient de rappeler que $\sqrt{g_1}$ est la valeur finale, obtenue par continuité, de la fonction $\sqrt{g(x)}$; le signe de la valeur initiale $\sqrt{g_0}$ est choisi à volonté. De la même façon y_1^m est la valeur finale, au point η_1, de la fonction $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)^m$, dont la valeur près de l'origine est supposée parfaitement déterminée. Et quant à η_1, il représente celle des racines du polynôme $h(x)$ qui est à droite du segment 01 lorsque ce segment laisse à sa gauche le seul pôle de $\frac{f(x)}{g(x)}$ contenu à l'intérieur de C et inversement.

Soit Λ la coupure qui correspond au chemin d'intégration, nous avons

$$2\sqrt{g_1} \int_0^1 \frac{x^m (1-x)^{m-1}\,dx}{g(x)^{m+\frac{1}{2}}} = \int_\Lambda \frac{y^{m-1}\,dy}{\sqrt{1 - \frac{y}{y_1}}} - \int_\Lambda \frac{y^{m-1}\,dy}{\sqrt{1 - \frac{y}{y_2}}} .$$

Mais le lacet Λ entoure le seul point y_1, par suite

$$\sqrt{g_1}\int_0^1 \frac{x^m(1-x)^{m-1}\,dx}{g(x)^{m+\frac{1}{2}}} = \int_0^{y_1} \frac{y^{m-1}\,dy}{\sqrt{1-\frac{y}{y_1}}} ,$$

et en résumé

$$\int_0^1 \frac{x^m(1-x)^{m-1}\,dx}{g(x)^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{2^{2m}}{\sqrt{g_1}}\,\frac{m!\,(m-1)!}{(2m)!}\,y_1^m . \tag{24}$$

Changeons dans l'intégrale la variable x contre la variable $1-x$; il suffit de remarquer que y_1 est le même pour les deux polynômes $g(x)$ et $g(1-x)$ pour trouver

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^m\,dx}{g(x)^{m+\frac{1}{2}}} = \frac{2^{2m}}{\sqrt{g_0}}\,\frac{m!\,(m-1)!}{(2m)!}\,y_1^m ; \tag{25}$$

et enfin, en additionnant les deux résultats précédents,

$$\int_0^1 \frac{x^{m-1}(1-x)^{m-1}\,dx}{g(x)^{m+\frac{1}{2}}} = 2^{2m}\left(\frac{1}{\sqrt{g_0}}+\frac{1}{\sqrt{g_1}}\right)y_1^m\,\frac{m!\,(m-1)!}{(2m)!} . \tag{26}$$

Le degré d'homogénéité de l'élément intégré est ici égal à -2. Nous avons donc affaire à une intégrale du type hypergéométrique ; pour en obtenir explicitement la signification, calculons y_1 en fonction des coefficients du polynôme

$$g(x) = ax^2 + bx + c .$$

On a

$$g_0 = c , \qquad g_1 = a + b + c ;$$

puis

$$y_1 = \frac{f'(\eta_1)}{g'(\eta_1)} = \frac{1-2\eta_1}{2a\eta_1 + b} .$$

Mais

$$\eta_1 = \frac{\sqrt{g_0}}{\sqrt{g_0}+\sqrt{g_1}} ,$$

d'où

$$y_1 = \frac{\sqrt{g_1} - \sqrt{g_0}}{(b + 2a)\sqrt{g_0} + b\sqrt{g_1}} = \frac{g_1 - g_0}{(a + b)(b + 2c + 2\sqrt{g_0}\sqrt{g_1})}.$$

$$= \frac{1}{b + 2c + 2\sqrt{g_0}\sqrt{g_1}} = \frac{b + 2c - 2\sqrt{g_0}\sqrt{g_1}}{b^2 - 4ac}.$$

La forme définitive de (24) est donc

$$\int_0^1 \frac{z^m(1 - z)^{m-1}}{(az^2 + bz + c)^{m+\frac{1}{2}}}\, dz \tag{27}$$

$$= \frac{2^{2m} m!\,(m-1)!}{(2m)!} \frac{1}{\sqrt{g_1}} \left(\frac{b + 2c - 2\sqrt{g_0}\sqrt{g_1}}{b^2 - 4ac}\right)^m;$$

ou encore, moyennant une généralisation évidente,

$$\int_0^x \frac{z^m(x - z)^{m-1}}{(az^2 + bz + c)^{m+\frac{1}{2}}}\, dz \tag{28}$$

$$= \frac{2^{2m} m!\,(m-1)!}{(2m)!} \frac{1}{\sqrt{g(x)}} \left(\frac{bx + 2c - 2\sqrt{g_0}\sqrt{g}}{b^2 - 4ac}\right)^m.$$

Comme toutes les précédentes, cette formule est valable pour un exposant m quelconque : la seule condition qui soit imposée à ce coefficient est d'être positif.

Si, en particulier, nous le faisons entier, on peut dériver m fois, et alors en posant

$$2\varpi = bx + 2c - 2\sqrt{c}\sqrt{g(x)}, \tag{29}$$

nous aurons

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\varpi^m}{\sqrt{g}}\right) = 1.3.5 \ldots (2m - 1)\left(\frac{b^2}{4} - ac\right)^m \frac{x^m}{g(x)^{m+\frac{1}{2}}}. \tag{30}$$

C'est là une identité remarquable relative à un polynôme quelconque du second degré $g(x)$. Il est intéressant de la retrouver par une voie moins détournée, et strictement algébrique. C'est par là que je terminerai.

8. — Avec quelques auteurs représentons par le symbole (x^m) un développement ordonné suivant les puissances croissantes de x lorsque le premier terme est du degré m; le nombre m peut d'ailleurs être quelconque positif ou négatif. De la même manière $\left(\frac{1}{x^m}\right)$ désignera une série ordonnée suivant les puissances descendantes de x lorsque le terme initial est d'ordre m par rapport à $\frac{1}{x}$.

Soit m un entier positif, $f(x)$ une fonction du type $\left(\frac{1}{x}\right)^{-m}$, c'est-à-dire

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \ldots + a_0 + \frac{a_{-1}}{x} + \ldots$$

Si le développement est sans lacunes, le degré des diverses dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, .. va diminuant d'une unité à chaque rang. Il y a toutefois exception pour la $(m+1)^{\text{me}}$ dérivée dont l'ordre s'abaisse brusquement de m unités. Au lieu d'être du type $\left(\frac{1}{x}\right)$, cette $(m+1)^{\text{me}}$ dérivée est évidemment du type $\left(\frac{1}{x}\right)^{m+2}$: telle est la simple remarque qui me sert de point de départ.

Soit maintenant $g(x)$ un polynôme quadratique non carré,

$$g(x) = ax^2 + bx + c\ , \qquad b^2 - 4ac \neq 0$$

et $p_m(x)$ un polynôme quelconque du m^{me} degré, de sorte que $\frac{p_m}{\sqrt{g}}$ est du type (x^{m-1}). Alors, comme on vient de voir, la quantité $\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{p_m}{\sqrt{g}}\right)$ sera du type $\left(\frac{1}{x}\right)^{m+1}$. D'autre part, en opérant la différentiation, on trouve directement

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{p_m}{\sqrt{g}}\right) = \frac{P_m}{g^{m+\frac{1}{2}}}\ , \tag{31}$$

équation où figure un nouveau polynôme P_m. Au lieu d'être du degré $2m$ comme il le semblerait d'abord, ce polynôme P_m, suivant la remarque ci-dessus, est du degré m.

D'autre part, si p_m parcourt l'ensemble ∞^{m+1} des polynômes du m^{me} degré, P_m décrira aussi le même ensemble dans sa totalité. Dans le cas contraire, deux polynômes différents p_m et p'_m ramèneraient le même numérateur P_m, et nous aurions l'égalité absurde

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{p_m - p'_m}{\sqrt{g}}\right) = 0 .$$

Ainsi, à tout polynôme p_m correspond selon l'égalité (31) un autre polynôme P_m et inversément. Et voici la conséquence qui se déduit de là ; $g(x)$ *étant un polynôme du second degré,* P *un polynôme quelconque du* m^{me} *degré, la différentielle* $\frac{P}{g^{m+\frac{1}{2}}}$ *sera toujours intégrable algébriquement* m *fois de suite.*

9. — Pour opérer l'intégration il est intéressant d'exprimer l'un par l'autre les deux polynômes p_m et P_m.

A cet effet, prenons un cas particulier, et posons, α et β étant les deux racines de $g(x)$,

$$p(x) = (x - \alpha)^{\lambda}(x - \beta)^{\mu},$$

avec la condition $\lambda + \mu \leq m$, de sorte que $p(x)$ ait le degré voulu. Je dis que, dans ce cas, $P(x)$ est divisible par $p(x)$.

En effet, puisque $g(x) = a(x - \alpha)(x - \beta)$, la quantité $\frac{p}{\sqrt{g}}$ développée selon les puissances de $(x - \alpha)$ est du type $((x - \alpha))^{\lambda - \frac{1}{2}}$, ainsi le premier membre de (31) sera de la forme $((x - \alpha))^{\lambda - \frac{1}{2} - m}$. La comparaison avec le second membre indique le degré de P, qui est λ.

Autrement dit, P est divisible par $(x - \alpha)^{\lambda}$, et pour la même raison il le sera aussi pour $(x - \beta)^{\mu}$. En particulier si la somme des indices $\lambda + \mu$ est égale à m, le polynôme P, du degré m, se confond avec $(x - \alpha)^{\lambda}(x - \beta)^{\mu}$, sauf un facteur constant A.

On obtient sans difficulté ce facteur en partant de l'identité (31) qui s'écrit maintenant

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{(x-\alpha)^{\lambda-\frac{1}{2}}(x-\beta)^{\mu-\frac{1}{2}}}{\sqrt{a}} = A_\lambda \frac{(x-\alpha)^{\lambda-m-\frac{1}{2}}(x-\beta)^{\mu-m-\frac{1}{2}}}{a^{m+\frac{1}{2}}} ; \qquad (31^{\text{bis}})$$

en comparant dans les deux membres les plus petites puissances de $(x-\alpha)$, ou de $(x-\beta)$, nous avons

$$\begin{aligned} A_\lambda &= a^m(\alpha-\beta)^m\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)\left(\lambda-\frac{3}{2}\right)\dots\left(\lambda+\frac{1}{2}-m\right) \\ &= a^m(\beta-\alpha)^m\left(\mu-\frac{1}{2}\right)\left(\mu-\frac{3}{2}\right)\dots\left(\mu+\frac{1}{2}-m\right), \end{aligned}$$

valeurs égales à cause de la relation $\lambda+\mu=m$. Au reste, il est intéressant de remarquer que l'identité (31bis) ci-dessus, obtenue pour des valeurs *entières* de λ et μ, demeure vraie, ainsi qu'on voit sans peine, quels que soient ces paramètres, sous réserve de la condition $\lambda+\mu=m$ relative aux indices.

La formule (31), récrite sous la forme

$$\frac{d^m}{dx^m}\frac{(x-\alpha)^\lambda(x-\beta)^\mu}{\sqrt{g(x)}} = A_\lambda \frac{(x-\alpha)^\lambda(x-\beta)^\mu}{g(x)^{m+\frac{1}{2}}}, \qquad \lambda+\mu=m$$

comprend en réalité $(m+1)$ cas distincts obtenus en faisant parcourir à λ la série $\lambda=0, 1, \dots m$; la combinaison de ces cas particuliers redonne le cas général. Et voici, si on veut, le résultat explicite.

Posons, pour abréger, $f_\lambda=(x-\alpha)^\lambda(x-\beta)^\mu$, et mettons p_m sous la forme

$$p_m = c_0 f_0 + c_1 f_1 + c_2 f_2 + \dots + c_m f_m ,$$

on a alors

$$P_m = c_0 A_0 f_0 + c_1 A_1 f_1 + c_2 A_2 f_2 + \dots c_m A_m f_m .$$

Toute la question se réduit à développer dans la forme indiquée un polynôme quelconque, ou même le monôme x^n, avec $n \leqq m$. On posera

$$r = m - n , \qquad t = \frac{x-\beta}{x-\alpha} .$$

et

$$(\beta - \alpha)^m x^n = \big(\beta(x - \alpha) - \alpha(x - \beta)\big)^n \big[(x - \alpha) - (x - \beta)\big]^r ,$$

$$= \beta^n (x - \alpha)^m \left(1 - \frac{\alpha}{\beta} t\right)^n (1 - t^r) .$$

Si donc

$$\left(1 - \frac{\alpha}{\beta} t\right)^n (1 - t)^r = \sum_{(k)} d_k t^k ,$$

le coefficient de f_{m-k} dans le développement de x^n se trouve égal à la quantité

$$\frac{\beta^n}{(\beta - \alpha)^m} d_k .$$

Par là se trouve résolu, d'une manière complète, le problème de la correspondance existant entre les deux polynômes p_m et P_m qui figurent dans (31). Mais cette solution, assez compliquée, est susceptible de simplification dans un cas particulier.

10. — Soit x_0 une constante quelconque. Par l'extraction de la racine carrée $\sqrt{g}$, on peut toujours définir un polynôme du 1er degré p_1 et une constante q_0, de manière que la différence $\varpi = p_1 - q_0\sqrt{g}$ soit d'ordre 2 par rapport à $x - x_0$, ou

$$\varpi = p_1 - q_0\sqrt{g} = \big((x - x_0)\big)^2 . \tag{32}$$

Elevons ϖ à la m^{me} puissance, nous obtenons

$$\varpi^m = p_m - q_{m-1}\sqrt{g} = \big((x - x_0)\big)^{2m} , \tag{33}$$

équation où les deux polynômes p_m et q_{m-1} ont un degré égal à leur indice.

Par suite, en dérivant m fois,

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{p_m}{\sqrt{g}}\right) = \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\varpi^m}{\sqrt{g}}\right) = \frac{P_m}{g^{m+\frac{1}{2}}} ;$$

et comme, d'après (32), ce résultat doit être de la forme $\big((x - x_0)\big)^m$, *le polynôme* P_m, *du degré* m, *sera égal à*

$(x - x_0)^m$ *sauf un facteur constant* c. On a donc

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{p_m}{\sqrt{g}}\right) = \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\varpi^m}{\sqrt{g}}\right) = c\frac{(x - x_0)^m}{g^{m+\frac{1}{2}}}. \qquad (33^{\text{bis}})$$

Il est clair que les polynômes p_m et q_{m-1}, introduits à l'instant, dépendent de la conversion en fraction continue de la fonction $\frac{1}{\sqrt{g}}$. En effet, la relation (33), écrite sous la forme,

$$\frac{1}{\sqrt{g}} - \frac{q_{m-1}}{p_m} = \left((x - x_0)\right)^{2m}, \qquad (34)$$

montre que la fraction rationnelle $\frac{q_{m-1}}{p_m}$, du degré m, représente l'irrationnelle $\frac{1}{\sqrt{g}}$ aux termes près de l'ordre $(x - x_0)^{2m}$; c'est la caractéristique d'une réduite.

Si on multiplie (33) par la quantité conjuguée $p_m + q_{m-1}\sqrt{g}$, laquelle est d'ordre zéro, on voit que $p_m^2 - gq_{m-1}^2$ est aussi d'ordre $2m$ en $x - x_0$, et comme ce polynôme est du degré $2m$, nous avons l'équation de Pell

$$p_m^2 - gq_{m-1}^2 = \mathrm{A}(x - x_0)^{2m}. \qquad (35)$$

La constante A, de même que c qui figure dans (33bis), dépend évidemment du paramètre laissé arbitraire dans la définition de p_1 et q_0.

Et il importe de remarquer que l'équation ci-dessus *caractérise* aussi les polynômes p_m et q_{m-1} premiers entre eux. En effet, si (35) a lieu, une seule des quantités $p_m - q_{m-1}\sqrt{g}$ et $p_m + q_{m+1}\sqrt{g}$ doit être d'ordre $2m$, la première, par exemple. On aura donc

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{p_m}{\sqrt{g}}\right) = a\frac{(x - x_0)^m}{g^{m+\frac{1}{2}}},$$

ce qui suffit à établir que p_m coïncide avec le polynôme étudié précédemment.

Dans l'équation (32), p_1 est un polynôme arbitraire du pre-

mier degré. Dès qu'il est choisi, le binôme $x - x_0$, selon les puissances duquel on effectue les développements, est déterminé, car on a

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{p_1}{\sqrt{g}}\right) = \left((x - x_0)\right) .$$

Ce binôme ne diffère donc que par un coefficient constant du suivant

$$f = p'_1 g - \frac{1}{2} g' p_1 .$$

Pour trouver le coefficient c de la formule (33bis), il suffit de faire x voisin de l'une des racines de $g(x)$, en comparant entre elles les parties principales des deux membres. On obtient immédiatement de la sorte

$$\frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{p_m}{\sqrt{g}}\right) = \frac{d^m}{dx^m}\left(\frac{\varpi^m}{\sqrt{g}}\right) = 1 . 3 . 5 \ldots (2m - 1) \frac{f^m}{g^{m+\frac{1}{2}}} .$$

C'est, sous une forme légèrement plus générale, l'équation (30) qu'il s'agissait de vérifier. Pour obtenir cette dernière, on fera

$$g(x) = ax^2 + bx + c \; ; \quad \sqrt{g(x)} = \sqrt{c}\left(1 + \frac{b}{2c}x + \frac{4ac - b^2}{8c^2}x^2 + \ldots\right)$$

$$p_1(x) = c + \frac{bx}{2} , \qquad x_0 = 0 .$$

De là

$$q_0 = \sqrt{g_0} = \sqrt{c} , \qquad \varpi = \frac{b^2 - 4ac}{8c}x^2 + \ldots = p_1 - \sqrt{c}\sqrt{g} ,$$

et

$$f = \left(\frac{b^2}{4} - ac\right)x .$$

SUR L'INTÉGRALE $n!\int_0^h \frac{h^n e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h}\,dh$,

PAR

Félix VANEY et Maurice PASCHOUD (Lausanne).

I. — Dans un mémoire inséré au *Bulletin de la Société mathématique de France*, LAGUERRE (*Œuvres*, t. I, p. 415) considère l'intégrale

$$\int_0^z z^n e^{-\frac{z^2}{2}+zx}\,dz$$

et il en déduit les propriétés fondamentales des polynômes $U(x)$ d'HERMITE.

En partant de l'intégrale

$$n!\int_0^h \frac{h^n e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h}\,dh,$$

on peut, par un calcul analogue à celui de LAGUERRE, établir les propriétés essentielles des polynômes P_n qu'il a obtenus dans un autre mémoire du même Bulletin (*Œuvres*, t. I, p. 434), et qu'il définit (*Œuvres*, t. I, p. 436) par la relation :

$$\frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} = P_0 + P_1\frac{h}{1!} + P_2\frac{h^2}{2!} + \ldots + P_n\frac{h^n}{n!} + \ldots \qquad (1)$$

où P_n a comme expression générale :

$$P_n(x) = n!\left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{1^2.2^2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1^2.2^2.3^2}x^3 + \ldots\right]. \qquad (2)$$

LAGUERRE indique les propriétés suivantes des polynômes P_n.

$$\int_{-\infty}^{0} e^x P_m(x) P_n(x)\, dx = 0 \text{ pour } m \neq n ,$$

$$\int_{-\infty}^{0} e^x P_n^2(x)\, dx = [n!]^2 ,$$

ainsi que les relations

$$P_{n+1} = (x + 2n + 1) P_n - n^2 P_{n-1} ,$$

$$x P_n' = n P_n - n^2 P_{n-1} ,$$

$$x P_n'' + (x + 1) P_n' - n P_n = 0 .$$

On voit de plus que

$$P_n = e^{-x} \frac{d^n}{dx^n} [x^n e^x] .$$

II. — Posons pour abréger $\frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} = T$.

On a

$$\frac{d}{dh}[h^p (1-h)^2 T] = p h^{p-1} T - (x + 2p + 1) h^p T + (p + 1) h^{p+1} T .$$

En multipliant les 2 membres par dh et intégrant de 0 à h, il vient :

$$(p+1) \int_0^h h^{p+1} T dh = h^p (1-h)^2 T + (x + 2p + 1) \int_0^h h^p T dh - p \int_0^h h^{p-1} T dh .$$

Si l'on pose

$$\frac{I_n}{n!} = \int_0^h h^n T dh ,$$

il vient entre 3 intégrales définies consécutives la formule de récurrence

$$I_{p+1} = p!\, h^p (1 - h^2) T + (x + 2p + 1) I_p - p^2 I_{p-1} . \qquad (3)$$

On voit de suite que

$$I_1 = (1 - h)^2 T + (x + 1) I_0 - 1 ,$$

et, en tenant compte de cette dernière relation, (3) donne successivement :

$$\text{pour } p = 1 : \; I_2 = (h + x + 3)(1 - h)^2 T + (x^2 + 4x + 2) I_0 - (x + 3) ,$$

$$\text{pour } p = 2 : \; I_3 = [2h^2 + (x + 5)h + x^2 + 8x + 11](1 - h)^2 T + (x^3 + 9x^2 + 18x + 6) I_0 - (x^2 + 8x + 11) .$$

D'une façon générale

$$I_n = [\theta_n(h , x)](1 - h)^2 T + P_n I_0 - V_n(x) , \qquad (4)$$

où $\theta_n(h, x)$ est un polynôme de degré $(n - 1)$ en h et en x, $P_n(x)$ est un polynôme de degré n en x et $V_n(x)$ un polynôme de degré $(n - 1)$ en x.

On a en outre $V_n(x) = \theta_n(0 , x)$.

D'après les calculs précédents :

$$\theta_1(h , x) = 1 ; \qquad \theta_2(h , x) = h + x + 3 ;$$

$$\theta_3(h , x) = 2h^2 + (x + 5)h + x^2 + 8x + 11 .$$

$$V_1(x) = 1 ; \qquad V_2(x) = x + 3 ; \qquad V_3(x) = x^2 + 8x + 11 .$$

$$P_1(x) = x + 1 ; \qquad P_2(x) = x^2 + 4x + 2 ; \qquad P_3(x) = x^3 + 9x^2 + 18x + 6 .$$

De plus

$$P_0 = 1 .$$

En dérivant chaque membre de l'identité

$$p ! \int_0^h h^p e^{-\frac{hx}{1-h}} dh = I_p - \frac{1}{p+1} I_{p+1}$$

par rapport à x, on trouve

$$I_{p+1} = \frac{d I_{p+1}}{dx} - (p + 1) \frac{d I_p}{dx} . \qquad (5)$$

Cette relation donne pour $p = 0$

$$I_1 = \frac{d I_1}{dx} - \frac{d I_0}{dx}$$

et, en tenant compte de $I_1 = (1 - h)^2 T + (x + 1) I_0 - 1$, on obtient

$$\frac{d I_0}{dx} = \frac{1}{x}(1 - h) T + I_0 - \frac{1}{x} , \qquad (6)$$

expression qui sera utilisée dans la suite.

III. — Il existe des relations de récurrence pour les polynômes θ, V, P. Partons de la relation (3) en y remplaçant I_n par son expression (4), il vient :

$$[\theta_{n+1}.(1-h)^2T + P_{n+1}I_0 - V_{n+1}] - (x+2n+1)[\theta_n.(1-h)^2T + P_nI_0 - V_n]$$
$$+ n^2[\theta_{n-1}(1-h)^2T + P_{n-1}I_0 - V_{n-1}] = n!\,h^n(1-h)^2T\ ,$$

d'où les relations cherchées

$$\theta_{n+1} - (x+2n+1)\theta_n + n^2\theta_{n-1} = n!\,h^n\ , \tag{7}$$

$$V_{n+1} - (x+2n+1)V_n + n^2V_{n-1} = 0\ , \tag{8}$$

$$P_{n+1} - (x+2n+1)P_n + n^2P_{n-1} = 0\ . \tag{9}$$

La formule (9) montre que les P_n sont bien les polynômes de Laguerre, car $P_1 = x+1$ et $P_2 = x^2+4x+2$.

La formule (8) se déduit de (7) en y faisant $h=0$; elle est identique à (9), mais les polynômes V_n sont différents des polynômes P_n, car $V_1 = 1$ et $V_2 = x+3$.

IV. — Dérivons les deux membres de (4) par rapport à x; il vient, en remplaçant $\frac{dI_0}{dx}$ par sa valeur (6) et en tenant compte de (5) :

$$(1-h)\left[\theta_{n+1} - \frac{d\theta_{n+1}}{dx} + (n+1)\frac{d\theta_n}{dx}\right] + h[\theta_{n+1} - (n+1)\theta_n]$$
$$= \frac{P_{n+1} - (n+1)P_n}{x}\ , \tag{10}$$

$$V_{n+1} = \frac{dV_{n+1}}{dx} - (n+1)\frac{dV_n}{dx} + \frac{P_{n+1} - (n+1)P_n}{x}\ , \tag{11}$$

$$\frac{dP_{n+1}}{dx} = (n+1)\left(\frac{dP_n}{dx} + P_n\right)\ . \tag{12}$$

La relation (11) s'obtiendrait de (10) en y faisant $h=0$. De (12) on déduit le développement suivant de P'_n :

$$P'_n = nP_{n-1} + n(n-1)P_{n-2} + \ldots + n!\,P_0\ . \tag{13}$$

De (9) et (12) on tire sans peine la relation indiquée par LAGUERRE

$$xP'_n = nP_n - n^2 P_{n-1} \tag{14}$$

et l'équation différentielle

$$xP''_n + (x+1)P'_n - nP_n = 0 \ . \tag{15}$$

V. — Posons $\theta_n = e^{\frac{x}{1-h}} . H_n$.

En utilisant la relation (14) et en substituant cette valeur de θ_n dans la relation (10), on obtient :

$$(n+1)\left(H_n + \frac{dH_n}{dx}\right) - \frac{dH_{n+1}}{dx} = \frac{e^{-\frac{x}{1-h}}}{1-h}\frac{P'_{n+1}}{n+1} \ . \tag{16}$$

La relation de récurrence entre les H_n est

$$H_{n+1} - (x + 2n + 1)H_n + n^2 H_{n-1} = n!\, h^n e^{-\frac{x}{1-h}} \ . \tag{17}$$

De (16) et (17) on déduit finalement l'équation différentielle :

$$x\frac{d^2 H_n}{dx^2} + (x+1)\frac{dH_n}{dx} - nH_n$$
$$= \frac{e^{-x}}{1-h} T[hP_n - 2(1-h)P'_n - n!\, h^{n+1}] \ , \tag{18}$$

qui ne diffère de celle des polynômes de LAGUERRE que par la présence du second membre.

Pour $h = 0$, $H_n(0, x) = e^{-x} V_n$ et (18) donne l'équation différentielle à laquelle satisfont les polynômes V_n

$$x\frac{d^2 V_n}{dx^2} + (1-x)\frac{dV_n}{dx} - (n+1)V_n = -2P'_n \ . \tag{19}$$

VI. — La fonction $\frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h}$, considérée par ABEL[1] (*Œuvres*, t. II, p. 284), donne naissance à des polynômes Q_n si on la développe suivant les puissances croissantes de h

$$\frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} = Q_0 + Q_1\frac{h}{1!} + Q_2\frac{h^2}{2!} + \ldots + Q_n\frac{h^n}{n!} + \ldots \tag{20}$$

[1] Voir aussi NIJLAND, *Over een bijsondere soort van geheele functiën*. Utrecht, 1896. (Thèse).

où Q_n a comme expression générale :

$$Q_n(x) = n!\left[1 - nx + \frac{n(n-1)}{1^2.2^2}x^2 - \frac{n(n-1)(n-2)}{1^2.2^2.3^2}x^3 + \ldots\right]. \quad (21)$$

Abel indique en outre les propriétés suivantes de ces polynômes

$$\int_0^\infty e^{-x} Q_n(x)\, Q_m(x)\, dx = 0 \,, \qquad \text{pour} \quad m \neq n$$

$$\int_0^\infty e^{-x} Q_n^2(x)\, dx = [n!]^2 \,.$$

En partant de la fonction génératrice, il est facile d'obtenir la relation de récurrence des polynômes Q_n

$$Q_{n+1} - (2n + 1 - x)\, Q_n + n^2 Q_{n-1} = 0 \,,$$

ainsi que l'équation différentielle

$$xQ_n'' + (1 - x)\, Q_n' + nQ_n = 0 \,.$$

Q_n s'exprime encore sous forme de dérivée n^{me}

$$Q_n = e^x \frac{d^n}{dx^n}[x^n e^{-x}] \,.$$

VII. — Le développement des Q_n en fonction des P_n peut s'obtenir au moyen de l'équation différentielle :

$$Q_n = (-1)^n\left[P_n - \frac{n^2}{1}\, 2P_{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2}\, 2^2 P_{n-2} - \ldots\right.$$

$$\left.(-1)^r \frac{n^2(n-1)^2 \ldots (n-r+1)^2}{1.2.3\ldots r}\, 2^r P_{n-r} - \ldots (-1)^n n!\, 2^n P_0\right] .$$

Comme les polynômes Q_n se déduisent des P_n en y remplaçant x par $-x$ et réciproquement, il est possible d'écrire

$$P_n = (-1)^n\left[Q_n - \frac{n^2}{1!}\, 2Q_{n-1} + \frac{n^2(n-1)^2}{1.2}\, 2^2 Q_{n-2} - \ldots\right.$$

$$\left.(-1)^r \frac{n^2(n-1)^2 \ldots (n-r+1)^2}{1.2.3\ldots r}\, 2^r Q_{n-r} - \ldots (-1)^n n!\, 2^n Q_0\right] .$$

Ces développements sont, à l'alternance des signes près et aux puissances de 2 près dans les coefficients, analogues à l'expression générale (21) de Q_n ou à celle (2) de P_n.

Remplaçons maintenant dans le développement (20) h par $\frac{1}{h}$ et multiplions chaque membre par e^{-x} on obtient

$$-\frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} = \tag{22}$$

$$e^{-x}\left[\frac{Q_0}{h} + \frac{Q_1}{1!}\frac{1}{h_2} + \frac{Q_2}{2!}\frac{1}{h^3} + \ldots + \frac{Q_{n-1}}{(n-1)!}\frac{1}{h^n} + \frac{Q_n}{n!}\frac{1}{h^{n+1}} + \ldots\right].$$

Ce second membre représente le développement suivant les puissances décroissantes de h de la fonction génératrice des polynômes de Laguerre.

De la même manière, on tire de (1) le développement suivant les puissances décroissantes de h de la fonction $\frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h}$.

$$-\frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1-h} =$$

$$e^{x}\left[\frac{P_0}{h} + \frac{P_1}{1!}\frac{1}{h^2} + \frac{P_2}{2!}\frac{1}{h^2} + \ldots + \frac{P_{n-1}}{(n-1)!}\frac{1}{h^n} + \frac{P_n}{n!}\frac{1}{h^{n+1}} + \ldots\right].$$

Multiplions chaque membre de cette dernière relation par $n!\,h^n dh$ et intégrons de 0 à h, il vient :

$$-I_n = -\int_0^h \frac{n!\,h^n}{1-h} e^{-\frac{hx}{1-h}} dh = n!\,e^x\left[\frac{P_0}{n}\frac{h^n}{1!} + \frac{P_1}{n-1}\frac{h^{n-1}}{2!} + \frac{P_2}{n-2}\frac{h^{n-2}}{3!}\right.$$

$$\left. + \frac{P_3}{n-3}\frac{h^{n-3}}{4!} + \ldots + \frac{P_{n-1}}{1}\frac{h}{(n-1)!} + \ldots\right]. \tag{23}$$

VIII. — En utilisant une méthode indiquée par Hermite à propos de l'intégrale $\int_0^h \frac{h^n dh}{\sqrt{1-2hx+h^2}}$ (*Œuvres*, t. IV, p. 169), on voit que les polynômes θ_n et V_n peuvent s'exprimer au moyen des P_n et des Q_n.

Si l'on écrit (4) de la manière suivante :

$$\frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} I_n = \theta_n(h, x) + \frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} P_n I_0 - \frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} V_n ,$$

on remarque que $\theta_n(h, x)$ forme la partie entière du produit

$$\frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1-h} \int_0^h \frac{n!\, h^n}{1-h} e^{-\frac{hx}{1-h}} dh ,$$

développé suivant les puissances décroissantes de h.

Si l'on remplace les deux facteurs par leur développement respectif (22) et (23) et si l'on multiplie membre à membre, on obtient le développement de $\theta_n(h, x)$ suivant les puissances décroissantes de h

$$\begin{aligned}
\theta_n(h, x) = n! \Bigg[& \frac{P_0 Q_0}{n} h^{n-1} + \left(\frac{P_0 Q_1}{n} + \frac{P_1 Q_0}{n-1}\right) h^{n-2} \\
& + \left(\frac{P_0 Q_2}{n.2!} + \frac{P_1 Q_1}{(n-1).1!1!} + \frac{P_2 Q_0}{(n-2).2!.1}\right) h^{n-3} \\
& + \left(\frac{P_0 Q_3}{n.3!} + \frac{P_1 Q_2}{(n-1).1!2!} + \frac{P_2 Q_1}{(n-2).2!1!} + \frac{P_3 Q_0}{(n-3).3!}\right) h^{n-4} + \dots \\
& + \left(\frac{P_0 Q_i}{n.i!} + \frac{P_1 Q_{i-1}}{(n-1).1!(i-1)!}\right. \\
& \left. + \frac{P_2 Q_{i-2}}{(n-2).2!(i-2)!} + \dots + \frac{P_i Q_0}{(n-i).i!}\right) h^{n-i-1} + \dots \Bigg] .
\end{aligned} \tag{24}$$

Le développement de V_n est formé de tous les termes ne contenant pas h

$$\begin{aligned}
V_n = {} & P_0 Q_{n-1} + \frac{n}{1!} P_1 Q_{n-2} + \frac{n(n-1)}{2!} P_2 Q_{n-3} \\
& + \dots + \frac{n(n-1)}{1!} P_{n-2} Q_1 + \frac{n}{1} P_{n-1} Q_0 .
\end{aligned} \tag{25}$$

Un autre développement de V_n, ayant la forme :

$$V_n = a_1 P_{n-1} + \dots + a_r P_{n-r} + \dots + a_n P_0 ,$$

s'obtient au moyen de l'équation différentielle (19) et du développement (13)

$$\begin{aligned}
V_n = {} & P_{n-1} + 2(n-1) P_{n-2} + (n-2)(3n-4) P_{n-3} \\
& + 2^2 (n-2)^2 (n-3) P_{n-4} + (n-3)(n-4)(5n^2 - 25n + 32) P_{n-5} + \dots
\end{aligned}$$

chaque coefficient s'obtenant au moyen du précédent par la formule de récurrence

$$a_r = \frac{2}{2n - r + 1}\left[(n - r + 1)^2 a_{r-1} + \frac{n!}{(n - r)!}\right].$$

IX. — En prenant $h = 1$, comme limite supérieure dans l'intégrale I_n et son expression (4), il vient :

$$\int_0^1 \frac{n!\,h^n}{1 - h} e^{-\frac{hx}{1-h}} dh = - V_n + P_n \int_0^1 \frac{e^{-\frac{hx}{1-h}}}{1 - h} dh ,$$

ou encore

$$\int_0^1 \frac{n!\,h^n}{1 - h} e^{-\frac{x}{1-h}} dh = - e^{-x} V_n + P_n \int_0^1 \frac{e^{-\frac{x}{1-h}}}{1 - h} dh .$$

Posons $z = \frac{x}{1 - h}$; on a, après substitution,

$$\int_x^\infty n!\,(z - x)^n \frac{e^{-z}}{z^{n+1}} dz = - e^{-x} V_n + P_n \int_0^\infty \frac{e^{-z}}{z} dz . \qquad (26)$$

Le premier membre peut se mettre sous forme d'intégrale multiple d'ordre n de la fonction $\frac{e^{-x}}{x^{n+1}}$; ces intégrales multiples donnent donc naissance aux polynômes P_n.

La formule (26) est celle obtenue par Laguerre (*Œuvres*, t. I, p. 432), qui en déduit que P_n est le dénominateur de la réduite d'ordre n du développement en fraction continue de la fonction $e^x \int_x^\infty \frac{e^{-x}}{x} dx$, le polynôme V_n étant le numérateur de cette réduite.

Enfin on remarque que l'intégrale I_n se transforme par le changement de x en $-x$, en une nouvelle intégrale J_n qui donne naissance aux polynômes Q_n d'Abel

$$J_n = \int_0^h \frac{n!\,h^n}{1 - h} e^{\frac{hx}{1-h}} dh = [\Omega_n(h, x)](1 - h)^2 \frac{e^{\frac{hx}{1-h}}}{1 - h} + Q_n J_0 - W_n(x) ,$$

où

$$\Omega_n(h, x) = \theta_n(h, -x) ,$$
$$Q_n(x) = P_n(-x) ,$$
$$W_n(x) = V_n(-x) .$$

EXTENSION DE LA NOTION DE JACOBIEN

PAR

M. Stuyvaert (Gand).

---

1. — On connaît pour n fonctions à n variables, le *théorème de J. Bertrand* relatif au déterminant fonctionnel ou Jacobien J de ces fonctions [1],

$$J = \begin{vmatrix} d_1 f \, d_1 \varphi \ldots \\ d_2 f \, d_2 \varphi \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} d_1 x \, d_1 y \ldots \\ d_2 x \, d_2 y \ldots \\ \ldots\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

les lignes du dernier déterminant ci-dessus étant n systèmes d'accroissements des variables x, y,... et les lignes du premier déterminant étant les différentielles totales correspondantes des fonctions f, φ,...

L'égalité ci-dessus résulte immédiatement de la règle de multiplication des déterminants, et peut s'écrire en notation abrégée,

$$J = \frac{D(f_1, f_2, \ldots f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)}.$$

Le Jacobien joue, à l'égard des fonctions de plusieurs variables, un rôle analogue à celui de la dérivée d'une fonction d'une variable. Ainsi la notation précédente conduit immédiatement à ces deux corollaires :

1° Pour les fonctions inverses,

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)} \times \frac{D(x_1, x_2, \ldots x_n)}{D(f_1, f_2, \ldots f_n)} = 1 ;$$

2° Pour les changements de variables (ou, ce qui revient au

---

[1] Voir p. ex. Niewenglowski, *Algèbre*, t. II, p. 176.

même, pour les fonctions de fonctions), si $x_i = \varphi_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, on a

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots f_n)}{D(y_1, y_2, \ldots y_n)} = \frac{D(f_1, f_2, \ldots f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots x_n)} \times \frac{D(x_1, x_2, \ldots x_n)}{D(y_1, y_2, \ldots y_n)} ;$$

en particulier si la substitution φ est linéaire, le second rapport est le module de la substitution et l'on voit que le Jacobien d'un système de formes algébriques est un covariant.

Enfin on sait que si le Jacobien est identique à zéro, il existe une relation identique entre les fonctions, ou bien l'une d'elles est constante.

2. — La première extension de la notion de Jacobien est relative à m fonctions de n variables ($m \gtrless n$), mais en prenant toujours les dérivées partielles du premier ordre.

Le cas de $m = n \pm 1$ a déjà été rencontré, au moins pour les formes algébriques, par L. Cremona et par nous, dans nos *Cinq Etudes de Géométrie analytique*[1], pour quatre variables homogènes et trois ou cinq surfaces algébriques.

On peut évidemment considérer aussi deux ou quatre courbes algébriques dans un plan : dans le premier cas on a la matrice

$$\begin{Vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \end{Vmatrix}$$

qui s'annule pour des points du plan en nombre généralement fini ; si f est de degré n et g de degré n', ce nombre est

$$(n - 1 + n' - 1)^2 - (n - 1)(n' - 1) = n^2 + nn' + n'^2 - 3(n + n') + 3 .$$

Ce sont les points qui ont même droite polaire relativement aux deux courbes. Dans le cas de deux coniques, ce sont les sommets du triangle conjugué commun.

Si l'on a quatre courbes planes f_1, f_2, f_3, f_4 d'ordres

[1] Gand, Van Goethem, 1908, p. 30 et suiv.

n_1, n_2, n_3, n_4, la matrice Jacobienne représente des points isolés en nombre

$$\begin{aligned}(n_1 - 1 + n_2 - 1 + n_3 - 1)(n_1 - 1 + n_2 - 1 + n_4 - 1)\\ - (n_1 - 1 + n_2 - 1)^2 + (n_1 - 1)(n_2 - 1)\\ = \Sigma n_1 n_2 - 3\Sigma n + 6 .\end{aligned}$$

Ces points sont ceux dont les droites polaires, pour les quatre courbes, passent par un même point. Parmi ces points figurent les points communs aux quatre courbes, s'il y en a (mais non pas les points doubles des courbes données).

Pour étendre à l'espace ordinaire, on pourra prendre deux ou six surfaces, et les matrices ayant alors deux colonnes de plus que de lignes, s'annulent pour des points isolés dont l'étude est analogue à ce qui précède. Et de même pour l'hyperespace.

3. — La matrice jacobienne étudiée à l'instant a un sens pour toutes les fonctions possédant des dérivées partielles et non seulement pour les polynômes homogènes. Son évanouissement identique correspond encore, si aucune des fonctions n'est constante, à une relation identique entre les fonctions.

Le théorème de J. Bertrand est applicable et donne (pour fixer les idées)

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \frac{\partial f}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} & \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \end{matrix} \right\| \times \left| \begin{matrix} d_1 x_1 & d_2 x_1 & d_3 x_1 & d_4 x_1 \\ d_1 x_2 & d_2 x_2 & d_3 x_2 & d_4 x_2 \\ d_1 x_3 & d_2 x_3 & d_3 x_3 & d_4 x_3 \end{matrix} \right|$$

$$= \left\| \begin{matrix} d_1 f & d_2 f & d_3 f & d_4 f \\ d_1 \varphi & d_2 \varphi & d_3 \varphi & d_4 \varphi \end{matrix} \right\| ;$$

la multiplication est *à droite* et lignes par colonnes, suivant l'usage de la théorie abstraite des matrices. Ecrivons ceci en abrégé

$$J \times M = D ,$$

d'où

$$J = D \times M^{-1} .$$

Corollaire pour les fonctions inverses :

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial f} & \frac{\partial x_1}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_2}{\partial f} & \frac{\partial x_2}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial x_3}{\partial f} & \frac{\partial x_3}{\partial \varphi} \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} d_1 f & d_2 f & d_3 f & d_4 f \\ d_1 \varphi & d_2 \varphi & d_3 \varphi & d_4 \varphi \end{matrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{matrix} d_1 x_1 & d_2 x_1 & d_3 x_1 & d_4 x_1 \\ d_1 x_2 & d_2 x_2 & d_3 x_2 & d_4 x_2 \\ d_1 x_3 & d_2 x_3 & d_3 x_3 & d_4 x_3 \end{matrix} \right\| ,$$

en abrégé

$$K \times D = M . \qquad \text{d'où} \qquad K = M \times D^{-1} ,$$

par suite

$$J \times K = D \times M^{-1} \times M \times D^{-1} = I .$$

Corollaire pour le changement de variables : si les x sont fonctions, par exemple de y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, on a

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_i} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_i} \\ \frac{\partial x_3}{\partial y_i} \end{matrix} \right\|_1^5 \times \left\| \begin{matrix} d_i y_1 \\ d_i y_2 \\ d_i y_3 \\ d_i y_4 \\ d_i y_5 \end{matrix} \right\|_1^4 = \left\| \begin{matrix} d_1 x_1 & d_2 x_1 & d_3 x_1 & d_4 x_1 \\ d_1 x_2 & d_2 x_2 & d_3 x_2 & d_4 x_2 \\ d_1 x_3 & d_2 x_3 & d_3 x_3 & d_4 x_3 \end{matrix} \right\| ,$$

en abrégé

$$L \times N = M \qquad \text{ou} \qquad L = M \times N^{-1} ,$$

M ayant le sens de plus haut. D'autre part,

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial y_i} \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y_i} \end{matrix} \right\|_1^5 \times \left\| \begin{matrix} d_i y_1 \\ d_i y_2 \\ d_i y_3 \\ d_i y_4 \\ d_i y_5 \end{matrix} \right\|_1^4 = \left\| \begin{matrix} d_i f \\ d_i \varphi \end{matrix} \right\|_1^4$$

en abrégé

$$J' \times N = D$$

N et D ayant le sens de plus haut. Or on a aussi $J \times M = D$, d'où

$$J \times M = J' \times N$$

$$J \times M \times N^{-1} = J'$$

ou enfin

$$J \times L = J' .$$

4. — Pour les fonctions u, v, ... quelconques (algébriques ou non) de x, y, ..., on peut encore généraliser la notion du jacobien en faisant intervenir des dérivées partielles d'ordre supérieur au premier. Prenons le cas de deux fonctions et deux variables, pour fixer les idées et posons

$$J \equiv \left\| \begin{matrix} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{matrix} \right\| .$$

Cette matrice est identiquement nulle si l'une des fonctions u, v est linéaire en x et y, ou si $\frac{\partial u}{\partial x}$ est une fonction arbitraire de F $\frac{\partial v}{\partial x}$, et $\frac{\partial u}{\partial y}$ une fonction G de $\frac{\partial v}{\partial y}$, arbitraire aussi sauf la restriction que la dérivée de G par rapport à x soit identique à la dérivée de F par rapport a y. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier cette propriété et de la généraliser.

L'extension du théorème de J. Bertrand s'effectue en multipliant (à droite et lignes par colonnes) la Jacobienne ci-dessus par la matrice carrée

$$M \equiv \left\| \begin{matrix} (d_1 x)^2 & d_1 x d_2 x & (d_2 x)^2 \\ 2 d_1 x d_1 y & d_1 x d_2 y + d_2 x d_1 y & 2 d_2 x d_2 y \\ (d_1 y)^2 & d_1 y d_2 y & (d_2 y)^2 \end{matrix} \right\|$$

ce qui donne

$$D \equiv \left\| \begin{matrix} d_1^2 u & d_1 u d_2 u & d_2^2 u \\ d_1^2 v & d_1 v d_2 v & d_2^2 v \end{matrix} \right\| .$$

Puisque

$$J \times M = D ,$$

on en conclut

$$J = D \times M^{-1} .$$

Le corollaire pour les fonctions inverses ne semble rien donner d'intéressant.

Voici un corollaire pour les changements de variables. Soient X, Y les nouvelles variables, J′ la Jacobienne pour ces nouvelles variables et N la matrice carrée analogue à M pour X, Y ; alors

$$J' = D \times N^{-1} ,$$

d'où facilement

$$J' = J \times M \times N^{-1}$$

et de même

$$J = J' \times N \times M^{-1} .$$

Cas particulier de la substitution linéaire,

$$x = \lambda_1 X + \mu_1 Y$$
$$y = \lambda_2 X + \mu_2 Y ,$$

alors

$$(d_i x)^2 = \lambda_1^2 (d_i X)^2 + 2\lambda_1 \mu_1 d_i X d_i Y + \mu_1^2 (d_i Y)^2 \ (i = 1, 2) ,$$

$$d_i x d_i y = \lambda_1 \lambda_2 (d_i X)^2 + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1) d_i X d_i Y + \mu_1 \mu_2 (d_i Y)^2 ,$$

$$d_1 x d_2 x = (\lambda_1 d_1 X + \mu_1 d_1 Y)(\lambda_1 d_2 X + \mu_1 d_2 Y)$$
$$= \lambda_1^2 d_1 X d_2 X + \lambda_1 \mu_1 (d_1 X d_2 Y + d_2 X d_1 Y) + \mu_1^2 d_1 Y d_2 Y ,$$

$$d_1 x d_2 y + d_2 x d_1 y$$
$$= (\lambda_1 d_1 X + \mu_1 d_1 Y)(\lambda_1 d_2 X + \mu_2 d_2 Y) + (\lambda_1 d_2 X + \mu_1 d_2 Y)(\lambda_2 d_1 X + \mu_2 d_1 Y)$$
$$= 2\lambda_1 \lambda_2 d_1 X d_2 X + (\lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1)(d_1 X d_2 Y + d_2 X d_1 Y) + 2\mu_1 \mu_2 d_1 Y d_2 Y ,$$

etc.

Donc M est le produit (à droite) de

$$\begin{Vmatrix} \lambda_1^2 & \lambda_1 \mu_1 & \mu_1^2 \\ 2\lambda_1 \lambda_2 & \lambda_1 \mu_2 + \lambda_2 \mu_1 & 2\mu_1 \mu_2 \\ \lambda_2^2 & \lambda_2 \mu_2 & \mu_2^2 \end{Vmatrix} \quad \text{ou } \Delta$$

par

$$\begin{Vmatrix} (d_1 X)^2 & d_1 X d_2 X & (d_2 X)^2 \\ 2 d_1 X d_1 Y & d_1 X d_2 Y + d_2 X d_1 Y & 2 d_2 X d_2 Y \\ (d_1 Y)_2 & d_1 Y d_2 Y & (d_2 Y)^2 \end{Vmatrix} ;$$

cette dernière est N, finalement

$$J' = J \times \Delta \times N \times N^{-1} = J \times \Delta$$

et la *matrice* carrée Δ ne contient que les éléments de la substitution ; on sait que le *déterminant* Δ vaut le cube du module $(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)$ de la substitution.

5. — Si la matrice proposée est

$$K \equiv \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} \end{Vmatrix},$$

le théorème de J. Bertrand est encore applicable, mais avec multiplication à gauche,

$$\begin{Vmatrix} (d_1 x)^2 & 2d_1 x d_1 y & (d_1 y)^2 \\ d_1 x d_2 x & d_1 x d_2 y + d_2 x d_1 y & d_1 y d_2 y \\ (d_2 x)^2 & 2d_2 x d_2 y & (d_2 y)^2 \end{Vmatrix} \times K$$

donne

$$\begin{Vmatrix} d_1^2 u & d_1^2 v \\ d_1 u d_2 u & d_1 v d_2 v \\ d_2^2 u & d_2^2 v \end{Vmatrix}.$$

De même pour le changement de variables et la substitution linéaire, mais avec multiplication à gauche.

Un cas particulier de ce qui précède (et qui correspond au Hessien dans la théorie du Jacobien) est celui où u, v, ... sont elles-mêmes déjà des dérivées partielles d'une fonction f.

Exemple

$$H \equiv \begin{Vmatrix} \dfrac{\partial^4 f}{\partial x^4} & \dfrac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} & \dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} & \dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} \\ \dfrac{\partial^4 f}{\partial x^3 \partial y} & \dfrac{\partial^4 f}{\partial x^2 \partial y^2} & \dfrac{\partial^4 f}{\partial x \partial y^3} & \dfrac{\partial^4 f}{\partial y^4} \end{Vmatrix}.$$

Le théorème de J. Bertrand ne semble pas avoir ici d'ana-

logue simple, mais bien le corollaire de la substitution linéaire : le dernier résultat ci-dessus conduit à

$$\left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial X^3}\right) & \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial X^2 \partial Y}\right) & \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial X \partial Y^2}\right) & \frac{\partial}{\partial X}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial X^3}\right) & \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial X^2 \partial Y}\right) & \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial X \partial Y^2}\right) & \frac{\partial}{\partial Y}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3}\right) \end{matrix} \right\|$$

$$= \left\| \begin{matrix} \lambda_1 \mu_1 \\ \lambda_2 \mu_2 \end{matrix} \right\| \times \left\| \begin{matrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial X^3}\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial X^2 \partial Y}\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial X \partial Y^2}\right) & \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial Y_3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial X^3}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial X^2 \partial Y}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial X \partial Y^2}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^3 F}{\partial Y^3}\right) \end{matrix} \right\| ,$$

où F désigne la transformée de f, c'est-à-dire

$$f(\lambda_1 X + \lambda_2 Y \ , \ \mu_1 X + \mu_2 Y) \ ;$$

et la dernière matrice ci-dessus est à son tour le produit de la matrice initiale par

$$\left\| \begin{matrix} \lambda_1^3 & \lambda_1^2 \lambda_2 & \lambda_1 \lambda_2^2 & \lambda_2^3 \\ 3\lambda_1^2 \mu_1 & 2\lambda_1 \lambda_2 \mu_1 + \lambda_1^2 \mu_2 & 2\lambda_1 \lambda_2 \mu_2 + \mu_1 \lambda_2^2 & 3\lambda_2^2 \mu_2 \\ 3\lambda_1 \mu_1^2 & \mu_1^2 \lambda_2 + 2\lambda_1 \mu_1 \mu_2 & \lambda_1 \mu_2^2 + 2\mu_1 \mu_2 \lambda_2 & 3\lambda_2 \mu_2^2 \\ \mu_1^3 & \mu_1^2 \mu_2 & \mu_1 \mu_2^2 & \mu_2^3 \end{matrix} \right\| .$$

Dans cet exemple donc, la transformée s'obtient en multipliant la matrice initiale à *droite* et à *gauche* par des tableaux carrés ne contenant que les éléments de la substitution. Pour le cas particulier du polynôme de degré 4 (ou en général n), les dérivées partielles sont, à un facteur constant près, les coefficients et l'on obtient une propriété de matrices invariantes signalées par nous dans l'*Enseignement mathématique* (1910).

SUR LA REPRÉSENTATION PROPORTIONNELLE EN MATIÈRE ÉLECTORALE

PAR

G. Pólya (Zurich).

Dans plusieurs périodiques non mathématiques[1], j'ai essayé de mettre en contact l'analyse mathématique avec l'énorme diversité des opinions émises sur la question de la représentation proportionnelle en matière électorale. La partie la plus intéressante de la recherche est, me semble-t-il : trouver, dans une littérature de controverse qui s'éloigne beaucoup de l'exposition et des sujets mathématiques habituels, des principes tangibles, des faits susceptibles d'une explication exacte et les « mettre en équation ». Dans les travaux cités j'ai énoncé plusieurs résultats mathématiques. Je les ai vérifiés expérimentalement par des exemples, j'ai tâché de les rapprocher du bon sens sans l'aide des formules, mais j'ai dû omettre les démonstrations. Dans les lignes suivantes je donnerai l'analyse exacte, une analyse très élémentaire d'ailleurs, mais qui ne sera peut-être pas dépourvue d'un certain intérêt pour quelques lecteurs.

1. — *Notations.* Soient A, B, C,... L les nombres de suffrages obtenus par les listes en présence. Soit S la somme totale des suffrages exprimés

$$A + B + C + \ldots + L = S . \qquad (1)$$

Soit s le nombre des sièges à répartir. En partageant s unités

---

[1] *Schweiz. Zentralblatt für Staats- und Gemeindeverwaltung*, 1919, N° 1 ; *Journal de statistique suisse*, 1918, N° 4 ; *Wissen und Leben*, N°s de janvier et février 1919. *Zeitschrift für die gesamte Staatswissenschaft* (sous presse).

arbitrairement divisibles proportionnellement aux nombres A, B, C,... L, on obtient les « parts exactes »

$$a = \frac{As}{S}, \quad b = \frac{Bs}{S}, \quad \ldots \quad l = \frac{Ls}{S}.$$

On a

$$a + b + c + \ldots + l = s. \tag{2}$$

Les parts exactes a, b, c, ... l ne sont pas en général des nombres entiers. Donc si l'on décerne aux diverses listes respectivement α, β, γ, ... λ sièges, on commet inévitablement des erreurs. Les erreurs commises sont respectivement $\alpha - a$. $\beta - b$. ... $\lambda - l$ pour les différentes listes et $\frac{\alpha - a}{A}$, $\frac{\beta - b}{B}$, ... $\frac{\lambda - l}{L}$ pour les électeurs des différentes listes. S il y a des erreurs, il y en a toujours des positives et des négatives, la somme de toutes les erreurs étant

$$\begin{aligned} &\alpha - a + \beta - b + \ldots + \lambda - l \\ &= A\frac{\alpha - a}{A} + B\frac{\beta - b}{B} + \ldots + L\frac{\lambda - l}{L} = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

On a proposé un très grand nombre et appliqué effectivement un nombre considérable de systèmes différents pour effectuer la répartition des sièges, c'est-à-dire pour déterminer les nombres entiers α. β. γ, ... λ en connaissant A, B, C, ... L. On peut poser, à priori, certaines conditions très plausibles, que tout système doit remplir pour être admissible. Premièrement, si l'on a

$$A \geqq B \geqq C \geqq \ldots \geqq L,$$

chaque système raisonnable doit donner

$$\alpha \geqq \beta \geqq \gamma \geqq \ldots \geqq \lambda.$$

Remarquons, en second lieu, que chaque règle doit devenir indéterminée en certains cas particuliers, par exemple si le nombre s est impair et s'il n'y a que deux listes en présence, les deux ayant obtenu le même nombre de suffrages. Pour qu'un système de répartition soit admissible, il faut que ces cas d'indétermination soient exceptionnels. Cette condition sera précisée plus loin. Enfin les entiers α. β. γ, ... λ doivent « s'approcher » autant que possible des parts exactes

a, b, c, ... l ou plutôt les erreurs commises doivent être « les plus petites possible ». Cette condition peut être précisée de manières très diverses.

2. — *Traitement égal des partis.* Considérons d'abord les erreurs commises pour chaque parti. Quelle est la répartition les rendant les plus petites possible ? Le problème est indéterminé. En effet, si des erreurs d'observation étaient en question, nous aurions, après tant de recherches théoriques et expérimentales, sinon des arguments absolument décisifs, du moins quelques bonnes raisons d'appliquer la méthode des moindres carrés. Il s'agit, dans notre cas, d'erreurs d'ordre juridique, et à ma connaissance on n'a proposé jusqu'ici que des raisons de sentiment qui parlent plutôt en faveur de la méthode des moindres carrés qu'en celle d'une autre méthode quelconque. Nous allons essayer plusieurs méthodes à la fois.

Problème. — *Soit* $\varphi(x)$ *une fonction figurée par une courbe convexe,* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ *pour* $x \gtrless 0$. *Etant donné les nombres positifs* a, b, c, ... l. *satisfaisant à* (2), *trouver des entiers non-négatifs* α, β, γ, ... λ *satisfaisant à* (3) *tels que la somme* $\varphi(\alpha - a) + \varphi(\beta - b) + \ldots + \varphi(\lambda - l)$ *soit la plus petite possible.*

En posant, par exemple, $\varphi(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 1$, on cherche la solution de notre problème de répartition d'après la méthode « des moindres puissances $\alpha^{-\text{mes}}$ ». On écrit la somme en question comme suit :

$$\begin{aligned}
&\varphi(\alpha - a) + \varphi(\beta - b) + \ldots + \varphi(\lambda - l) \\
&\quad = \varphi(-a) + \varphi(-b) + \ldots \varphi(-l) \\
&+ \big(\varphi(1 - a) - \varphi(-a)\big) + \big(\varphi(2 - a) - \varphi(1 - a)\big) \\
&\quad + \ldots + \big(\varphi(\alpha - a) - \varphi(\alpha - 1 - a)\big) \\
&+ \big(\varphi(1 - b) - \varphi(-b)\big) + \big(\varphi(2 - b) - \varphi(1 - b)\big) \\
&\quad + \ldots + \big(\varphi(\beta - b) - \varphi(\beta - 1 - b)\big) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&+ \big(\varphi(1 - l) - \varphi(-l)\big) + \big(\varphi(2 - l) - \varphi(1 - l)\big) \\
&\quad + \ldots + \big(\varphi(\lambda - l) - \varphi(\lambda - 1 - l)\big) .
\end{aligned} \tag{4}$$

Désignons le nombre des partis concurrents par p. Le second membre de l'égalité (4) comprend $p+1$ lignes. La $0^{-\text{me}}$ ligne se compose de p termes, indépendants du choix de $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \lambda$, c'est la longueur des p lignes suivantes qui en dépend. La première ligne[1] correspondant au premier parti, comprend α termes, la seconde ligne β termes et ainsi de suite chaque ligne comprend autant de termes qu'il y a de sièges attribués au parti correspondant.

Quelle est la grandeur relative de ces termes dans les p dernières lignes ? L'hypothèse que la courbe $y = \varphi(x)$ est convexe (vue d'en bas) entraîne[2] que la fonction $\varphi(x+1) - \varphi(x)$ augmente constamment avec x. Donc la réponse à la question : quel est le plus grand des deux termes donnés ? est (l'hypothèse en question remplie) indépendante de φ et ne dépend que des arguments. On voit facilement que le problème, rendre minimum le premier membre (ou le second) de (4) revient à ceci : choisir dans le tableau suivant, à p lignes et à une infinité de colonnes,

$$\begin{array}{l} 1-a,\ 2-a,\ 3-a, \ldots\ [a]-a,\ [a]+1-a \ldots \\ 1-b;\ 2-b,\ 3-b, \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 1-l,\ 2-l,\ 3-l, \ldots \end{array} \tag{5}$$

α nombres de la première ligne, β de la seconde, ... λ de la p^{me}, de manière que les $\alpha+\beta+\gamma+\ldots+\lambda$ nombres choisis soient les s plus petits nombres de tout le tableau.

Dans la première ligne il y a $[a]$ (c'est-à-dire partie entière de a) nombres négatifs, voir $1-a$, $2-a$, ... $[a]-a$, le suivant $[a]+1-a$ est $\leqq 1$ et les suivants sont > 1. On constate que dans tout le tableau (5) il y a

$$[a]+[b]+[c]+\ldots+[l] \leqq s\ ,$$

[1] Cette ligne, comme les suivantes, a été partagée en deux à cause des difficultés d'impression.

[2] Pour les notions analytiques utilisées, voir JENSEN, *Acta Mathematica*, t. 30 (1906), p. 175-193.

nombres non-positifs et p nombres compris entre 0 et 1. C'est entre ces $[a] + [b] + [c] + \ldots + [l] + p$ nombres que nous devons chercher les s plus petits du tableau (5), parce que, évidemment,

$$s < [a] + 1 + [b] + 1 + \ldots + [l] + 1 .$$

En résumé, pour rendre minimum la somme

$$\varphi(\alpha - a) + \varphi(\beta - b) + \ldots + \varphi(\lambda - l)$$

on a la règle suivante : *attribuer d'abord aux partis respectivement* [a], [b], [c], ... [l] *sièges; s'il reste encore des sièges disponibles* (ce qui sera généralement le cas), *attribuer le complément aux plus grandes des fractions* a — [a], b — [b], c — [c], ... l — [l]. C'est la *règle des plus grands restes,* comme on dit couramment. La règle des plus grands restes ne peut être indéterminée que dans le cas où deux des nombres $a - [a]$, $b - [b]$, ... $l - [l]$ deviennent égaux.

Le résultat est qu'une infinité des méthodes, par exemple celle des moindres carrés, celle des moindres bicarrés, etc., appliquées aux erreurs relatives aux listes préconisent la même répartition des sièges. Ce résultat peut être généralisé encore, en élargissant les conditions auxquelles la fonction $\varphi(x)$ est assujettie.

Je ne veux pas formuler les conditions les plus générales ; on voit par exemple que la démonstration s'applique presque sans changements à la fonction $\varphi(x) = |x|$, ce qui n'est pas sans intérêt.

Le problème de répartir les sièges de telle manière que le maximum des écarts $|\alpha - a|$, $|\beta - b|$, ..., $|\lambda - l|$ soit aussi petit que possible, conduit aussi à la règle des plus grands restes. J'omets la démonstration, parce qu'elle est facile et bien connue.

3. — *Traitement égal des électeurs.* D'après la nature de la question, ce ne sont pas les erreurs relatives aux partis, mais celles relatives aux électeurs qui importent. En essayant d'appliquer à ces erreurs-là les différentes mé-

thodes imaginables, on est amené à rendre minimum l'expression

$$A\varphi\left(\frac{\alpha - a}{A}\right) + B\varphi\left(\frac{\beta - b}{B}\right) + \dots + L\varphi\left(\frac{\lambda - l}{L}\right)$$

par le choix convenable des entiers α, β, γ, ... λ de la somme donnée s. En remplaçant $S\varphi\left(\frac{x}{S}\right)$ par $\varphi(x)$, on peut aussi envisager l'expression suivante

$$a\varphi\left(\frac{\alpha - a}{a}\right) + b\varphi\left(\frac{\beta - b}{b}\right) + \dots + l\varphi\left(\frac{\lambda - l}{l}\right).$$

C'est cette dernière que je rendrai minimum en admettant que la fonction φ remplisse les conditions énoncées auparavant.

On a l'identité analogue à (4)

$$\begin{aligned}
&a\varphi\left(\frac{\alpha}{a} - 1\right) + b\varphi\left(\frac{\beta}{b} - 1\right) + \dots + l\varphi\left(\frac{\lambda}{l} - 1\right) \\
&\quad = a\varphi(-1) + b\varphi(-1) + \dots + l\varphi(-1) \\
&+ a\left(\varphi\left(\frac{1}{a} - 1\right) - \varphi(-1)\right) + a\left(\varphi\left(\frac{2}{a} - 1\right) - \varphi\left(\frac{1}{a} - 1\right)\right) \\
&\qquad + \dots + a\left(\varphi\left(\frac{\alpha}{a} - 1\right) - \varphi\left(\frac{\alpha - 1}{a} - 1\right)\right) \\
&+ b\left(\varphi\left(\frac{1}{b} - 1\right) - \varphi(-1)\right) + b\left(\varphi\left(\frac{2}{b} - 1\right) - \varphi\left(\frac{1}{b} - 1\right)\right) \\
&\qquad + \dots + b\left(\varphi\left(\frac{\beta}{b} - 1\right) - \varphi\left(\frac{\beta - 1}{b} - 1\right)\right) \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&+ l\left(\varphi\left(\frac{1}{l} - 1\right) - \varphi(-1)\right) + l\left(\varphi\left(\frac{2}{l} - 1\right) - \varphi\left(\frac{1}{l} - 1\right)\right) \\
&\qquad + \dots + l\left(\varphi\left(\frac{\lambda}{l} - 1\right) - \varphi\left(\frac{\lambda - 1}{l} - 1\right)\right).
\end{aligned} \tag{6}$$

La 0me ligne du membre droit donne $s\varphi(-1)$. Les lignes suivantes[1] sont puisées du tableau

$$\begin{array}{l}
\dfrac{\varphi\left(\frac{1}{a}-1\right)-\varphi(-1)}{\frac{1}{a}}, \quad \dfrac{\varphi\left(\frac{2}{a}-1\right)-\varphi\left(\frac{1}{a}-1\right)}{\frac{1}{a}}, \\
\qquad\qquad \ldots \dfrac{\varphi\left(\frac{n}{b}-1\right)-\varphi\left(\frac{n-1}{a}-1\right)}{\frac{1}{a}}, \ldots \\
\dfrac{\varphi\left(\frac{1}{b}-1\right)-\varphi(-1)}{\frac{1}{b}}, \quad \dfrac{\varphi\left(\frac{2}{b}-1\right)-\varphi\left(\frac{1}{b}-1\right)}{\frac{1}{b}}, \\
\qquad\qquad \ldots \dfrac{\varphi\left(\frac{n}{b}-1\right)-\varphi\left(\frac{n-1}{b}-1\right)}{\frac{1}{b}}, \ldots \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dfrac{\varphi\left(\frac{1}{l}-1\right)-\varphi(-1)}{\frac{1}{l}}, \quad \dfrac{\varphi\left(\frac{2}{l}-1\right)-\varphi\left(\frac{1}{l}-1\right)}{\frac{1}{l}}, \\
\qquad\qquad \ldots \dfrac{\varphi\left(\frac{n}{l}-1\right)-\varphi\left(\frac{n-1}{l}-1\right)}{\frac{1}{l}}, \ldots
\end{array} \tag{7}$$

où on posera $n = 1, 2, 3, \ldots$ La courbe $y = \varphi(x)$ étant convexe, on a, par de simples considérations géométriques,

$$\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h} < \frac{\varphi(\mathrm{T}+h)-\varphi(\mathrm{T})}{h} < \frac{\varphi(\mathrm{T}+\mathrm{H})-\varphi(\mathrm{T})}{\mathrm{H}} \tag{8}$$

pourvu qu'on ait $t < \mathrm{T}$, $0 < h < \mathrm{H}$. La première des inégalités (8) montre que dans chaque ligne du tableau (7) les quantités sont rangées par ordre de leur valeur algébrique croissante. On rend donc minimum l'expression (6) *en choisissant dans le tableau* (7) *les* s *quantités les plus petites en valeur*

[1] Sont partagées à cause de l'impression.

algébrique, et en attribuant à chaque parti autant de sièges qu'il y a de quantités parmi ces s prises dans la ligne correspondante du tableau (7).

En appliquant cette règle à la fonction $\varphi(x) = |x|$ à laquelle la démonstration s'applique aussi, avec de légers changements, on retrouve la règle des plus grands restes. Ce qui est évident d'ailleurs d'après l'identité

$$a\left|\frac{\alpha - a}{a}\right| + b\left|\frac{\beta - b}{b}\right| + \ldots + l\left|\frac{\lambda - l}{l}\right| = |\alpha - a| + |\beta - b| + \ldots + |\lambda - l| .$$

Le lecteur est prié d'appliquer aussi la règle à la fonction $\varphi(x) = x^2$. Il retrouvera ainsi la règle des moindres carrés donnée par M. Sainte-Laguë dans un travail[1] qui constitue un réel progrès de la théorie de la représentation proportionnelle, autant que cette théorie est mathématique. C'est la méthode de M. Sainte-Laguë que nous avons généralisée dans l'analyse précédente. En appliquant la règle à d'autres fonctions, par exemple à $\varphi(x) = |x|^3$, x^4, $|x|^5$, ... l'on trouvera toujours d'autres méthodes de répartition de sièges[2].

On peut faire voir que les méthodes ainsi trouvées sont réellement différentes en recherchant leurs cas d'indétermination. Si notre règle ne peut pas décider à qui attribuer un siège, au premier parti ou au second, une relation de la forme

$$a\left(\varphi\left(\frac{\alpha}{a} - 1\right) - \varphi\left(\frac{\alpha - 1}{a} - 1\right)\right) = b\left(\varphi\left(\frac{\beta}{b} - 1\right) - \varphi\left(\frac{\beta - 1}{b} - 1\right)\right) \quad (9)$$

doit avoir lieu. Considérons les entiers α, β comme donnés et les quantités a, b comme variables. D'après (8) le membre gauche est une fonction croissante de $\frac{1}{a}$, donc une fonction décroissante de a. Une remarque analogue a lieu concernant le membre droit. Il s'en suit que la courbe représentative

---

[1] Voir *Annales de l'Ecole Normale*, 3e série, tome 27 (1910), p. 529-542.

[2] Ces différentes méthodes pour mesurer la petitesse des erreurs peuvent être envisagées aussi à propos d'autres questions. Par exemple le polynôme qui s'écarte le moins possible du zéro a une signification qui varie avec la notion de l'écart. On obtient différents polynômes d'un degré donné.

de la relation (9) dans le plan a, b ne peut rencontrer qu'une fois une droite parallèle à l'axe des a ou à l'axe des b. Cette courbe sera différente quand on remplace $\varphi(x)$ par les fonctions différentes $|x|$, x^2, $|x|^3$, x^4, etc.

Voici encore une remarque qui me paraît importante. Supposons qu'on ait

$$A \geqq B \geqq C \geqq \ldots \geqq L$$

ou ce qui revient au même,

$$a \geqq b \geqq c \geqq \ldots \geqq l \,.$$

Il suit de ces inégalités, en vertu de (8), qu'en parcourant de haut en bas une colonne quelconque du tableau (7), on rencontre des quantités toujours plus grandes. Si donc, sur les s quantités plus petites contenues dans le tableau (7) il y a α appartenant à la 1re, β appartenant à la 2me, ... λ appartenant à p^{me} ligne, on a nécessairement

$$\alpha \geqq \beta \geqq \gamma \geqq \ldots \geqq \lambda \,.$$

Donc toutes les méthodes de répartition considérées remplissent une condition évidente, qu'on a posée à priori.

On peut évidemment choisir entre une infinité de méthodes pour mesurer la petitesse des erreurs et l'on peut se poser une infinité de problèmes de minimum. Mais le choix n'est pas tout à fait arbitraire. Les problèmes doivent être résolubles et les solutions doivent remplir certaines conditions. C'est ce que nous avons montré pour les problèmes traités. On verra plus loin que d'autres problèmes de minimum, mentionnés toutefois par plusieurs auteurs, ne remplissent pas les conditions posées ci-dessus. Il est intéressant de constater que différentes méthodes, donnant des résultats divergents quand on les applique aux erreurs relatives aux électeurs, convergent au même point quand on les applique à celles relatives aux partis.

4. *Rapprochement des deux points de vue.* Nous avons vu que contrairement à certaines assertions un peu hâtivement émises, la règle des plus grands restes traite également tout aussi bien les électeurs que les partis, en mesurant la

petitesse des erreurs par une mesure simple : la somme de leur valeur absolue. Est-ce que ce système est le seul qui rapproche ces deux points de vue ? Nous allons démontrer qu'il en est ainsi, sous des conditions très larges. Nous supposerons seulement que la petitesse des erreurs relatives aux partis soit mesurée par une expression de la forme

$$\varphi(\alpha - a) + \varphi(\beta - b) + \ldots + \varphi(\lambda - l) \tag{10}$$

où φ désigne une fonction continue, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(x) > 0$ pour $x \gtrless 0$. Soit r un nombre rationnel, différent de zéro et n un entier positif. On choisira successivement deux entiers positifs, α et β satisfaisant aux inégalités

$$n\alpha - r > 0 \qquad , n\alpha - r < n\alpha + \beta \ ,$$

puis deux entiers positifs, A et B satisfaisant à l'égalité

$$\frac{n\alpha - r}{n\alpha + \beta} = \frac{n}{n + \frac{B}{A}} \ . \tag{11}$$

C'est seulement le quotient B : A qui est déterminé par (11). C'est avantageux de se figurer A et B grands par rapport à α et β.

Supposons deux élections. A la première, il y a $n + 1$ partis concurrents qui ont obtenu respectivement

$$A, A, A, \ldots A, B$$

suffrages et auxquels une loi quelconque attribue respectivement

$$\alpha, \alpha, \alpha, \ldots \alpha, \beta$$

sièges. A la seconde il y a deux partis obtenant respectivement nA et B suffrages et $n\alpha$ et β sièges. Les erreurs commises au détriment ou au profit des électeurs sont absolument les mêmes dans les deux cas. En calculant à l'aide de (11) les erreurs commises pour chaque parti, on voit que l'expression (10) se réduit à

$$n\varphi\left(\frac{r}{n}\right) + \varphi\left(\beta - \frac{n\alpha + \beta}{nA + B} B\right)$$

dans le premier cas et à

$$\varphi(r) + \varphi\left(\beta - \frac{n\alpha + \beta}{nA + B} B\right)$$

dans le second cas. Si l'évaluation des erreurs doit être la même en envisageant les erreurs relatives aux partis et celles relatives aux électeurs, les deux dernières expressions doivent être égales, ce qui donne

$$\varphi(r) = n\varphi\left(\frac{r}{n}\right). \tag{12}$$

En vertu de ce qui a été dit, le nombre rationnel r et l'entier positif n peuvent être quelconques. L'équation (12) valable dans cette étendue entraîne, suivant des raisonnements classiques, que $\varphi(x)$ est égal à une fonction linéaire et homogène pour les valeurs positives de x. Une conséquence analogue a lieu pour $x < 0$. On a donc

$$\varphi(x) = c_1 |x| \text{ pour } x > 0$$
$$\varphi(x) = c_2 |x| \text{ pour } x < 0 ,$$

c_1 et c_2 étant deux constantes positives. On peut réunir les deux formules en une seule en écrivant

$$\varphi(x) = \frac{c_1 + c_2}{2} |x| + \frac{c_1 - c_2}{2} x .$$

La somme (10) se réduit à

$$\begin{aligned} &\frac{c_1 + c_2}{2}(|\alpha - a| + \ldots + |\lambda - l|) + \frac{c_1 - c_2}{2}(\alpha - a + \ldots + \lambda - l) \\ &\qquad = \frac{c_1 + c_2}{2}(|\alpha - a| + \ldots + |\lambda - l|) \end{aligned} \tag{13}$$

en vertu de (3). Comme nous avons vu, c'est la règle des plus grands restes qui rend minimum le membre droit de (13) c. q. f. d.

5. — *Aspect géométrique de la question.* Je suppose qu'il y a trois listes en présence, dont les parties exactes sont x, y, z et qu'il y a s sièges à distribuer. On a

$$x + y + z = s , \qquad x > 0, \; y > 0, \; z > 0 . \tag{14}$$

Si l'on abaisse d'un point intérieur d'un triangle équila-

téral de hauteur s trois perpendiculaires sur les trois côtés de longueur x, y, z respectivement, les nombres x, y, z satisfont aux relations (14). (Pour démontrer on joint le point en question aux trois sommets du triangle et on considère l'aire totale des trois triangles partiels obtenus.) On peut donc représenter toutes les répartitions de suffrage essentiellement différentes entre 3 partis par l'ensemble des points à coordonnées rationnelles x, y, z à l'intérieur d'un triangle de référence équilatéral. Les nombres des suffrages obtenus sont les coordonnées homogènes du point représentatif. Les répartitions des suffrages entre deux partis concurrents peuvent être représentées sur un segment de droite, celles entre 4 partis par les points à l'intérieur d'un tétraèdre régulier, celles entre p partis dans l'espace à $p - 1$ dimensions. J'envisagerai ici de préférence le cas $p = 3$.

Les différentes répartitions de sièges sont représentées par des points, dont toutes les trois coordonnées x, y, z sont des nombres entiers. Ils sont les sommets d'un réseau de triangles équilatéraux. Par exemple un sommet du triangle de référence correspond à l'attribution de tous les s sièges en question à un des partis.

Comment interpréter géométriquement les diverses règles de répartition ? Une règle quelconque fait correspondre à chaque point, représentant une répartition déterminée des suffrages, un point, différent en général du premier, représentant la distribution coordonnée des sièges. Il y a une infinité de répartitions de suffrages qui mènent à la même distribution de sièges. Leurs points représentatifs remplissent une aire, entourant le point représentatif de la distribution correspondante de sièges.

Prenons par exemple la règle des plus grands restes qui est la plus simple. Soient x, y, z les coordonnées d'un point. Ce point représente le résultat d'un scrutin, où les forces numériques des électeurs de 3 listes en présence étaient dans le rapport $x : y : z$. Si les partis obtiennent α, β, γ sièges, ces trois entiers non-négatifs doivent rendre minimum l'expression

$$(\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2 \tag{15}$$

d'après un théorème général précédemment démontré. (Le cas particulier qui nous intéresse momentanément fut déjà donné par M. Sainte-Laguë, l. c.). Or le carré de la distance des deux points x, y, z et α, β, γ est précisément les deux tiers de la somme (15), comme on le démontre facilement. Par conséquent, la règle des plus grands restes fait correspondre à un résultat de scrutin x, y, z le sommet le plus rapproché du réseau considéré ci-dessus. Les différents résultats de scrutin qui amènent la même distribution de sièges, sont représentés par des points plus rapprochés d'un certain sommet α, β, γ du réseau qu'ils ne sont à aucun autre et remplissent l'aire d'un hexagone régulier, dont le centre est α, β, γ. Les cas où la règle des plus grands restes devient illusoire sont situés sur les périphéries des hexagones et forment des lignes d'indétermination séparant les cellules qui entourent les points du réseau (voir fig. 1).

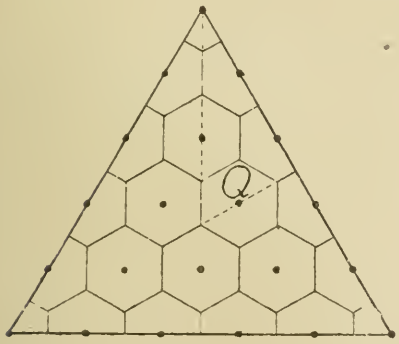


Fig. 1.

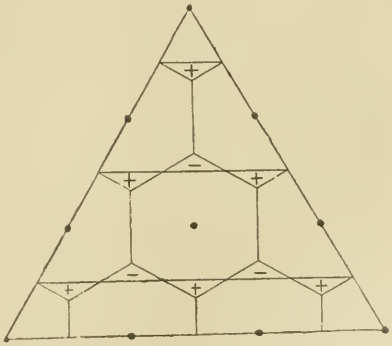


Fig. 2.

La règle des plus grands restes est la plus simple et la plus naturelle au point de vue géométrique comme elle l'est aussi au point de vue arithmétique. Les autres règles engendrent d'autres divisions du triangle de référence. Je ne peux ici que mentionner certaines propriétés. La règle bien connue d'Hondt est figurée par un amas de cellules qui ont toutes la même étendue. Entre les règles de répartition considérées jusqu'ici, il n'y en a que trois qui donnent naissance à des cellules à limites rectilignes : ce sont celles des

plus grands restes, de d'Hondt et de Sainte-Laguë. Les cellules hexagonales de ces deux dernières méthodes ne sont pas régulières. Les différentes méthodes que nous avons mises en relation avec le traitement égal des électeurs ont des lignes courbes d'indétermination (voir formule (9) et les explications qui s'y rattachent). La plupart des méthodes en usage pratique ne peuvent invoquer aucune raison théorique en leur faveur, mais elles dépendent toutes des opérations linéaires et les cellules de leur représentation graphique sont, par conséquent, limitées par des segments de droites.

M. Macquart — dont les mérites pratiques pour la cause de la R. P. ne peuvent nullement être diminués par cette remarque — adresse à la règle des plus grands restes le reproche suivant[1] : en adoptant cette règle de répartition, il peut arriver qu'un parti A luttant deux fois de suite contre des adversaires B et C obtienne à la seconde élection une plus faible partie de sièges, quoique ayant une plus forte partie de suffrages. Il aurait pu adresser ce reproche à tous les systèmes imaginables de répartition proportionnelle. C'est impossible que toutes les lignes d'indétermination soient parallèles à un des côtés du triangle. On peut donc bien dépasser quelques-unes de ces lignes en se mouvant parallèlement à un des côtés du triangle ou même passer d'une cellule à une cellule voisine, appartenant à un sommet *moins élevé* du réseau en suivant une direction légèrement *ascendante*.

Notre représentation graphique peut élucider une quantité de paradoxes et réduire à leur juste valeur une foule d'objections semblables. Arrivons à des services plus importants qu'elle peut rendre.

6. — *Cas d'indétermination exceptionnels et non-exceptionnels.* Quand les points d'indétermination sont situés sur un nombre fini d'arcs simples (c'est-à-dire qui ne rencontrent qu'une fois une droite parallèle à un des côtés du triangle),

[1] Voir *Revue scientifique* (1905), II.

on pourra dire à bon droit que les cas d'indétermination sont exceptionnels. C'est dans ce sens qu'on peut affirmer que les méthodes de répartition examinées jusqu'ici ne donnent lieu qu'exceptionnellement à des indécisions. Tandis que si tous les points (rationnels) remplissant une surface sont des points d'indétermination, l'indécision n'est plus exceptionnelle et la règle doit être rejetée.

En admettant ce postulat, on doit rejeter la règle suivante : distribuer les sièges de manière que l'erreur relative à un électeur, la plus grande en valeur absolue soit la plus petite possible. Je dis, en effet, que cette règle sera indéterminée toutes les fois que s sièges étant à répartir, $s \geqq 6$, les parts exactes des trois partis en concurrence satisfont aux inégalités

$$x < \frac{1}{2}, \quad y > \frac{s}{3}, \quad z > \frac{s}{3}, \tag{16}$$

c'est-à-dire quand les points représentatifs se trouvent à l'intérieur d'un certain quadrilatère. Au lieu des erreurs commises pour chaque électeur, je considérerai comme auparavant les grandeurs $\frac{\alpha - x}{x}$, $\frac{\beta - y}{y}$, $\frac{\gamma - z}{z}$ qui leur sont proportionnelles et je les nommerai simplement « les erreurs ». La première des inégalités (16) entraîne

$$\frac{\alpha - x}{x} = \frac{\alpha}{x} - 1 > 1 \text{ pour } \alpha = 1, 2, 3, \ldots s.$$

En attribuant au parti ayant la part exacte x 0 sièges, on est sûr d'avoir atteint la limite inférieure de l'erreur maximale

$$\left| \frac{0 - x}{x} \right| = 1 .$$

Le nombre des sièges étant assez grand, on pourra trouver *de plusieurs manières* deux entiers β, γ satisfaisant aux relations

$$\beta + \gamma = s, \quad \beta \leqq \frac{2s}{3}, \quad \gamma \leqq \frac{2s}{3}. \tag{17}$$

En attribuant β sièges au parti à part exacte y, l'erreur

commise pour chaque électeur est en vertu de (16) (17)

$$-1 < \frac{\zeta - y}{y} < \frac{\frac{2s}{3} - \frac{s}{3}}{\frac{s}{3}} = 1 .$$

On trouvera de même

$$\left| \frac{\gamma - z}{z} \right| < 1 .$$

C'est donc de *plusieurs manières* que l'erreur la plus grande en valeur absolue peut atteindre sa limite inférieure, c. q. f. d.

M. Equer[1] a proposé de réduire à un minimum la différence entre l'électeur le plus et le moins favorisé. Cette différence est d'ailleurs égale à la somme des valeurs absolues de l'erreur positive et de l'erreur négative extrêmes. Malheureusement cette règle si plausible ne remplit pas non plus le postulat relatif aux exceptions, au moins quand il s'agit de quatre listes ou davantage. Représentons les différents rapports possibles entre les forces numériques de quatre partis par les points à l'intérieur d'un tétraèdre régulier. S'il y a 20 sièges à distribuer, la hauteur du tétraèdre sera de 20 unités de longueur. Considérons le point dont les distances aux 4 faces du tétraèdre sont respectivement

$$x = 1{,}8 \qquad y = 2{,}2 \qquad z = 7{,}6 \qquad t = 8{,}4 .$$

Ce point représente un scrutin où les forces des partis sont dans le rapport 18 : 22 : 76 : 84. On peut s'assurer par une discussion numérique que j'omets, qu'en donnant aux listes

2 2 7 9

ou bien

2 2 8 8

sièges respectivement, la différence dont M. Equer parle sera la plus petite possible. En poursuivant la discussion, on pourra montrer que la règle de M. Equer sera en défaut

[1] Voir Sainte-Laguë, l. c., p. 535.

non seulement pour le point considéré, mais aussi pour tous les points à l'intérieur d'une sphère de rayon assez petit, décrite autour du point en question. D'après le sens du postulat énoncé, les points formant un ensemble de même dimension que la totalité des cas possibles, ne peuvent plus être considérés comme non-exceptionnels.

On pourrait aussi considérer le principe : rendre minimum l'erreur négative extrême relative à un électeur. Cette règle est impuissante de choisir entre les répartitions différentes tant qu'on a $s < p$ et engendre la méthode dite des « plus fortes fractions » quand $s \geqq p$ (s le nombre de sièges, p le nombre des partis comme auparavant)[1].

Il n'y a qu'une règle de cette sorte qui pour chaque combinaison de s et de p ne devient indéterminé qu'exceptionnellement. C'est la règle d'Hondt, qui tend à rendre minimum l'erreur *positive* extrême[2]. Ce que nous avons dit sert à justifier dans une certaine mesure le système d'Hondt et montre que bien qu'il y ait une infinité de principes de minimum possibles, on ne saurait en choisir un tout à fait au hasard.

7. *Le rôle des probabilités.* Les élections sont un jeu de hasard, comme on l'a dit souvent. *Est-ce que les chances du jeu sont égales pour tous les partis ?*

Je montrerai par un exemple simple comment on peut trouver ces chances. Envisageons le problème suivant :

Dans une circonscription il y a cinq sièges à distribuer, 3 partis qui se les disputent et la répartition se fait d'après les plus grands restes. Quelle est l'espérance mathématique d'une erreur en faveur du parti le plus fort, du parti moyen et du plus faible ?

Soient les parts exactes des partis en question x, y, z

$$x > y > z \,. \tag{18}$$

Les inégalités (18) délimitent la sixième partie du triangle de référence, un triangle rectangle aux angles de 90°, 60° et 30° (voir fig. 1). Il y a autant de cas possibles que de points

[1] Voir Sainte-Laguë, l. c., p. 535

[2] Voir Sainte-Laguë, l. c., p. 534.

rationnels dans le dit triangle rectangle. Je suppose que la probabilité de l'événement qu'un point choisi au hasard tombe dans un certain domaine est proportionnel à l'aire de celui-ci. Cette supposition est la plus simple, je l'ai justifiée en comparant ses conséquences à des données statistiques et elle peut en outre être fondée théoriquement[1]. Calculons par exemple la probabilité pour que le parti le plus fort et le parti moyen obtiennent chacun 2 sièges et que le plus faible en obtienne 1. C'est la probabilité pour qu'un point du triangle délimité par les inégalités (18) tombe dans la moitié supérieure de la cellule entourant le point Q (voir fig. 1). Elle est égale au quotient des aires de ces deux domaines, c'est-à-dire à $\frac{6}{25}$, comme on vérifie facilement. Des probabilités analogues sont réunies dans le tableau suivant :

Nombre de sièges obtenus par le parti le plus fort	moyen	le plus faible	Probabilité
5	0	0	$\frac{1}{25}$
4	1	0	$\frac{6}{25}$
3	2	0	$\frac{6}{25}$
3	1	1	$\frac{6}{25}$
2	2	1	$\frac{6}{25}$

Les trois partis obtiendront donc en moyenne respectivement

$$\frac{1 \cdot 5 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 3 + 6 \cdot 2}{25} = \frac{77}{25}$$

$$\frac{1 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 2}{25} = \frac{36}{25}$$

$$\frac{1 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 6 \cdot 0 + 6 \cdot 1 + 6 \cdot 1}{25} = \frac{12}{25}$$

[1] Voir POINCARÉ. *Calcul de probabilités*, 2me édition, p. 123-126. La supposition adoptée par SAINTE-LAGUË, l. c., p. 541-542, est, à mon avis, incorrecte et en tous cas différente de celle adoptée ici. En admettant que les parties d'égale longueur du segment de droite qui représente les différents rapports de la force numérique des deux partis sont d'égale probabilité, le problème traité l. c. donne le résultat $\frac{1}{4}$. Voir pour une interprétation de l'hypothèse faite ici, mon travail cité de Zentralblatt.

sièges. La proportion moyenne des suffrages qu'ils obtiendront est donnée par les coordonnées du centre de gravité du triangle rectangle (18), c'est-à-dire par les nombres

$$\frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}+\frac{5}{2}+\frac{5}{1}\right)=\frac{55}{18} \qquad \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}+\frac{5}{2}+0\right)=\frac{25}{18} \qquad \frac{1}{3}\left(\frac{5}{3}+0+0\right)=\frac{10}{18}$$

les trois sommets du triangle (18) ayant respectivement les coordonnées

$$\frac{5}{3}, \frac{5}{3}, \frac{5}{3}; \qquad \frac{5}{2}, \frac{5}{2}, 0; \qquad \frac{5}{1}, 0, 0.$$

L'espérance mathématique d'une erreur en faveur d'un des partis est la différence de sa part moyenne en sièges et en suffrages. Les espérances mathématiques cherchées sont donc respectivement

$$\frac{77}{25}-\frac{55}{18}=+0{,}024, \qquad \frac{36}{25}-\frac{25}{18}=+0{,}051. \qquad \frac{12}{25}-\frac{10}{18}=-0{,}075.$$

C'est-à-dire la règle des plus grands restes avantage, au moins quand il s'agit de 5 sièges, les deux partis les plus forts au détriment du troisième, mais l'avantage est assez médiocre. Sur 100 élections ayant lieu dans des conditions analogues, la perte moyenne du parti le plus faible serait de 7 à 8 sièges. Les élections ordinaires ne sauraient déceler un effet si faible.

Ce n'est pas inutile de mentionner une interprétation géométrique des trois nombres calculés. Chacun d'eux est la moyenne d'autant de distances que le triangle (18) est partagé en parties différentes par les lignes d'indétermination. Considérons dans chaque cellule ou portion de cellule comprise dans le triangle (18) le centre de gravité de l'aire et un axe parallèle à la base du triangle de référence, passant par le sommet du réseau auquel la cellule ou la portion de cellule en question est rattachée. Nous compterons la distance du centre de gravité à cet axe positivement, si le centre de gravité est au-dessous et négativement s'il est au-dessus de l'axe. C'est de ces distances que l'espérance mathématique du plus grand parti est la moyenne, mais pas une moyenne arithmétique simple, parce que chaque distance a un « poids »

proportionnel à l'aire correspondante. Les espérances mathématiques des deux autres partis sont les moyennes des distances analogues, les axes en question devant être tracés parallèlement à un des deux autres côtés du triangle de référence. Dans le cas représenté par la fig. 1 ($s = 5$) le triangle rectangle (18) ne comprend que des portions de cellules. Au contraire, quand le nombre des sièges est grand ce sont les cellules entières qui sont en grande majorité. Mais le centre de gravité d'un hexagone régulier est précisément le sommet du réseau auquel l'hexagone est rattaché et la distance en question est par conséquent zéro. Ainsi pour $s = \infty$ l'espérance mathématique d'une erreur, commise en faveur de qui que ce soit, tend vers zéro. C'est-à-dire quand les circonscriptions sont assez grandes, le système des plus grands restes n'avantage aucun des partis concurrents d'une manière *systématique*. Voilà une conclusion d'une certaine valeur pratique et qui peut être soumise au contrôle de l'expérience électorale.

Voici encore un problème de cette nature :

Dans une circonscription il y avait originalement 3 partis qui se disputaient les s sièges à pourvoir ; 2 de ces partis se décident de présenter une liste commune. Quelle est l'espérance mathématique d'un gain ensuite de cette réunion si le système des plus grands restes est en vigueur ?

La situation originale des partis peut être figurée par un point (rationnel) quelconque $\mathfrak{T}$ du triangle de référence. Soient « y » et « z » les deux partis qui se réunissent. La force numérique du troisième parti restant invariable, menons par le point $\mathfrak{T}$ une parallèle à la base du triangle de référence. Cette parallèle rencontrera un des deux autres côtés, par exemple celui de droite, en un point $\mathfrak{T}'$. Envisageons les sommets du réseau Q et Q′ qui sont les plus rapprochés des points $\mathfrak{T}$ et $\mathfrak{T}'$ respectivement. Q′ se trouve nécessairement sur le pourtour du triangle de référence. Je distingue 3 cas.

1. Q et Q′ sont à la même distance de la base. Il n'y a ni gain ni perte occasionnés par la réunion.

2. Q′ est plus rapproché de la base que Q. La différence

des distances ne peut être que d'une unité. Le parti « x » a perdu un siège ensuite de la réunion de ses deux adversaires.

3. Q′ est plus éloigné de la base que Q. L'éloignement est d'une unité et signifie un siège perdu pour les deux alliés.

Les régions remplies par les points $\mathfrak{T}$ pour lesquelles le cas (2) se présente, sont désignées par le signe + dans la figure 2 (où $s = 3$), les régions correspondantes au cas (3) par le signe —. Désignons l'aire totale des premières par $\mathcal{R}_+$, celle des secondes par $\mathcal{R}_-$, l'aire du triangle de référence par $4s^2\Delta$. En considérant les aires qui jouent un rôle analogue par rapport à y et z que les aires $\mathcal{R}_+$ et $\mathcal{R}_-$ par rapport à x, on trouve facilement

$$3\mathcal{R}_+ = \frac{s(s+1)}{2}\Delta, \qquad 3\mathcal{R}_- = \frac{s(s-1)}{2}\Delta.$$

L'espérance mathématique d'un gain par l'alliance est

$$\frac{1 \cdot \mathcal{R}_+ - 1 \cdot \mathcal{R}_- + 0 \cdot (4s^2\Delta - \mathcal{R}_+ - \mathcal{R}_-)}{4s^2\Delta} = \frac{1}{12s}.$$

C'est-à-dire le système des plus grands restes, contrairement à certaines affirmations légèrement émises, favorise les alliances, mais dans une mesure si faible qui ne compte pas dans la pratique. Je remarque en passant que le résultat serait identique pour le *système Sainte-Laguë*.

Je renvoie pour de plus amples résultats numériques et pour des vérifications expérimentales à mon article paru dans le *Journal de statistique suisse*. C'est, à mon avis, l'étude des *chances* des différents systèmes qui constitue une véritable théorie mathématique de la représentation proportionnelle, une théorie qui peut rendre compte de certains faits observés et en prévoir d'autres. Je crois avoir suffisamment élucidé les principes de cette théorie par les calculs précédents. *Sapienti sat.* Le lecteur désireux d'approfondir cette théorie pourra envisager des distributions non-uniformes de probabilité ou des problèmes où interviennent

4 ou plusieurs partis. Il sera amené à généraliser pour des domaines « tétraédriques » à plusieurs dimensions la formule des trapèzes qui sert au calcul approché des intégrales et à étudier certaines divisions « semirégulières » de ces domaines. Il rencontrera une foule de jolis problèmes que je n'ai pas le loisir d'exposer ici. J'ai hâte d'arriver à un résultat qui me semble d'intérêt principal.

8. *Influence minimale de la division du pays en circonscriptions électorales sur le résultat total.* Je me permets d'extraire le passage suivant du travail plusieurs fois cité de M. Sainte-Laguë : « La répartition des sièges dans chaque circonscription peut sembler d'autant meilleure que les résultats globaux auxquels elle conduit sont plus voisins de ceux qu'aurait donnés la répartition directe des sièges faite aux listes globales obtenues en prenant les totaux des suffrages pour tout le pays.

Ce critérium semble difficile à appliquer, comme le montre l'exemple suivant :

Supposons qu'on ait seulement deux listes en présence A et B et que les deux listes réunissent à peu près le même nombre de suffrages dans tout le pays ; la règle la meilleure sera alors celle qui partagera par moitié dans chaque circonscription les sièges entre les deux listes A et B et cela pour aussi disproportionnés que soient les nombres des suffrages recueillis dans la circonscription considérée. »

Contrairement à ce que semble en penser M. Sainte-Laguë, je trouve que le dit critérium est, bien interprété, parfaitement clair, qu'il touche le point essentiel de la question et qu'il mène à un résultat déterminé. Pour le bien interpréter il ne faut pas oublier que c'est d'une *question de probabilité* qu'il s'agit. Voici d'ailleurs mon analyse qui est un peu abstraite mais très simple au fond.

Admettons qu'il s'agit de la répartition de s sièges entre p partis, dont les parts exactes sont désignées par $x_1, x_2, x_3, \ldots x_p$. On a

$$x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_p = s \,. \tag{19}$$

Considérons une règle quelconque de répartition. Cette règle fera correspondre au résultat du scrutin, exprimé par le rapport des nombres $x_1, x_2, x_3, \ldots x_p$ un certain entier ξ_1, fonction de ces nombres,

$$\xi_1 = f(x_2, x_3, x_4, \ldots x_p) .$$

en désignant par ξ_1 le nombre des sièges attribués par la règle en question au parti dont la part exacte est $x_1 = s - x_2 - x_3 - \ldots - x_p$. La fonction f est une fonction symétrique de ses $p - 1$ variables et elle caractérise parfaitement la règle considérée, en tant qu'il ne s'agit que de p partis et de s sièges. En effet on attribuera respectivement

$$\xi_2 = f(x_1, x_3, x_4, \ldots x_p)$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$\xi_p = f(x_1, x_2, x_3, \ldots x_{p-1})$$

sièges aux autres partis en présence. On a par conséquent

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots + \xi_p = s . \tag{20}$$

La fonction f n'a que des valeurs entières non-négatives. Si la règle satisfait à un desideratum expliqué plus haut, les points de discontinuité de la fonction f seront situés sur certaines variétés $p - 2$-dimensionales.

Admettons que les parts exactes $x_1, x_2, x_3, \ldots x_p$ varient conformément à une loi de probabilité quelconque qui n'est assujettie qu'à cette unique condition : elle doit être la même pour tous les partis en question. Nous avons considéré précédemment la loi la plus simple de cette nature. Je désignerai par $\mathfrak{E}(\varphi)$ l'espérance mathématique d'une fonction quelconque φ des variables $x_1, x_2, \ldots x_p$ liées par la relation (19). Si la loi de probabilité envisagée est continue, $\mathfrak{E}\,\varphi$ s'exprime par une intégrale définie $p - 2$-tuple. On a par raison de symétrie

$$\mathfrak{E}(\xi_1 - x_1) = \mathfrak{E}(\xi_2 - x_2) \ldots = \mathfrak{E}(\xi_p - x_p)$$
$$= \frac{1}{p}\mathfrak{E}(\xi_1 - x_1 + \xi_2 - x_2 + \ldots + \xi_p - x_p) = 0$$

en vertu de (19) et (20). On a de même

$$\mathfrak{E}\left((\xi_1 - x_1)^2\right) = \mathfrak{E}\left((\xi_2 - x_2)^2\right) = \ldots = \mathfrak{E}\left((\xi_p - x_p)^2\right)$$
$$= \frac{1}{p}\mathfrak{E}\left((\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + \ldots + (\xi_p - x_p)^2\right) = b$$

en désignant par b une constante positive, dépendant du système de répartition et de la loi de probabilité qu'on envisage.

Envisageons un grand nombre n de circonscriptions, dans chacune desquelles il y a le même nombre de votants et le même nombre s de sièges à répartir. Le scrutin donne pour le premier des partis concurrents les parts exactes x_1', x_1'', x_1''', ... $x_1^{(n)}$ dans les différentes circonscriptions et la règle en question lui attribue ξ_1', ξ_1'', ξ_1''', ... $\xi_1^{(n)}$ sièges. Le critérium, formulé et contesté par M. Sainte-Laguë, exige évidemment que la différence

$$\xi_1' + \xi_1'' + \ldots + \xi_1^{(n)} - x_1' - x_1'' - \ldots - x_1^{(n)} \tag{21}$$

soit la plus petite possible *en général*. D'après un théorème de Laplace[1], la probabilité pour que l'écart (21) dépasse en valeur absolue une certaine limite h est

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{h}{\sqrt{2bn}}}^{\infty} e^{-x^2}\, dx\,.$$

Cette probabilité décroît évidemment avec b. Le principe en question exige donc que b soit le plus petit possible. Mais puisque

$$b = \frac{1}{p}\mathfrak{E}\left((\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + \ldots + (\xi_p - x_p)^2\right)$$

c'est la quantité $(\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + \ldots + (\xi_p - x_p)^2$ dépendant de la règle de répartition adoptée qui doit devenir minimum. Ainsi le postulat que le système de répartition appliqué dans les diverses circonscriptions doit donner des résultats concordant autant que possible à la force numérique des partis dans tout le pays, préfère un certain pro-

[1] Voir *Théorie analytique des probabilités*, Livre II, N° 39.

blème de minimum aux autres, considérés auparavant. C'est le problème : rendre minimum la somme des carrés des erreurs relatives aux partis dont la solution est donnée par la règle des plus grands restes. C'est, à ce qu'il me paraît, la meilleure justification théorique de cette règle si simple et naturelle.

Zurich, avril 1919.

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'un problème inédit de E. Torricelli.

Au sujet de la publication de mon article sur *Les origines d'un problème inédit de E. Torricelli* (*L'Enseignement mathématique*, XXe année, 1918 et 1919, p. 245-268), je dois signaler que M. Michele Cipolla, professeur à l'Université de Catane, vient de faire paraître une importante étude sur le même problème.

Michele Cipolla. — I triangoli di Fermat e un problema di Torricelli, *Atti dell' Accademia Gioenia di scienze naturali in Catania*, serie 5^a^, vol. XI, memoria XI.

Je n'ai eu connaissance de l'existence de ce mémoire qu'après la correction des épreuves de mise en pages de mon propre travail.

2 août 1919. Emile Turrière.

A propos d'une note de M. Paschoud.

Sur les équations transcendantes qui se présentent dans la théorie des tiges élastiques. (*L'Enseignement mathématique*, **20**, N° 4, 286, 1919).

J'ai lu avec intérêt la note de M. Paschoud qui fait remarquer que les racines de l'équation $\operatorname{tg} x \operatorname{cth} x = -1$ se déduisent immédiatement de celles de l'équation $\cos x \operatorname{ch} x = -1$. Ce fait, il est vrai, avait échappé à M. Emde et à moi. Mais, déjà en 1909, nous avons saisi l'occasion de signaler l'équivalence de l'équation $\cos x \operatorname{ch} x = 1$ à l'équation $\operatorname{tg} \frac{x}{2} \operatorname{cth} \frac{x}{2} = \pm 1$, dans l'*Archiv der Mathematik und Physik* (3), **15**, 372, à la suite d'une communication de M. Greenhill.

Berlin, 24 juillet 1919. E. Jahnke.

CHRONIQUE

Académie des Sciences de Paris. — Prix décernés.

Mathématiques. — *Prix Francœur* (1000 francs) : M. Georges Giraud, docteur ès sciences, pour ses travaux sur les fonctions automorphes.

Mécanique. — *Prix Poncelet* (2000 francs) : Général Prosper Charbonnier, inspecteur général de l'artillerie navale, pour ses travaux de balistique.

Astronomie. — *Prix Benjamin Valz* (460 francs) : M. Félix Boquet, astronome à l'Observatoire de Paris, pour l'ensemble de ses travaux.

Prix G. de Pontécoulant (700 francs) : M. Arthur Stanley Eddington, professeur à l'Université de Cambridge, pour ses travaux de mécanique céleste.

Prix Petit d'Ormoy, *Sciences mathématiques :* 10,000 fr., M. M. Henri Lebesgue, professeur à la Faculté des Sciences de Paris, pour l'ensemble de ses travaux de mathématiques.

Fonds de Recherches scientifiques. — *Fondation Gegner* (4000 fr.), M. René Baire, professeur à la Faculté des Sciences de Dijon, en récompense de ses travaux sur la théorie générale des fonctions.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Allemagne. — M. R. Baldus a été nommé professeur ordinaire de Géométrie descriptive à l'Ecole technique supérieure de Calsruhe.

M. Battermann, Directeur de l'Observatoire de Königsberg, a pris sa retraite.

M. J. Bauschinger a été nommé professeur ordinaire d'Astronomie à l'Université de Königsberg.

M. V. Blæss a été nommé professeur extraordinaire de Mécanique à l'Ecole technique supérieure de Darmstadt.

M. W. Blaschke a été nommé professeur de Mathématiques à la nouvelle Université de Hambourg.

M. P. E. Böhmer a été nommé professeur ordinaire pour les Mathématiques des assurances à l'Ecole technique supérieure de Dresde.

M. E. Hecke a été nommé professeur ordinaire de Mathématiques à l'Université de Hambourg.

M. G. Hessenberg a été nommé professeur ordinaire de Mathématiques à l'Université de Tubingue.

M. W. Killing, professeur à l'Université de Munich, a pris sa retraite.

M. K. Knopp a été nommé professeur ordinaire de Mathématiques à l'Université de Königsberg.

M. Krause, professeur à l'Ecole technique supérieure de Dresde, prendra sa retraite.

M. A. Lœwy a été nommé professeur ordinaire de Mathématiques à l'Université de Fribourg en-Br.

M. R. v. Mises a été nommé professeur ordinaire pour la Résistance des matériaux, l'Hydraulique et l'Aérodynamique à l'Ecole technique supérieure de Dresde.

M. J. Radon a été nommé professeur extraordinaire de Mathématiques à l'Université de Hambourg.

M. R. Schorr a été nommé professeur ordinaire d'Astronomie à l'Université de Hambourg.

M. F. Schur a été nommé professeur ordinaire à l'Université de Breslau.

M. L. Stickelberger, professeur à l'Université de Fribourg-en-Br., a pris sa retraite.

M. H. Tietze a été nommé professeur ordinaire de Mathématiques à l'Université d'Erlangen.

Privat-docents. — Ont été admis en qualité de privat-docents : M. P. Barnays, pour la théorie des nombres, à l'Université de Gœttingue ; M. P. Epstein, pour les Mathématiques pures, à l'Université de Francfort-s-M. ; M. F. Levi, pour l'Algèbre supérieure, à l'Université de Leipzig ; Mlle E. Nœther et M. Schmeidler, à l'Université de Gœttingue.

Angleterre. — M. W. H. Young, F. R. S., a été appelé à la chaire de mathématiques pures de l'Université de Wales, à Aberystwyth.

Autriche. — M. E. Czuber, professeur ordinaire de Mathématiques à l'Ecole technique supérieure de Vienne, a pris sa retraite.

Belgique. — Le prix décennal de mathématiques pures (1904-1913) a été décerné à M. Alphonse Demoulin pour ses travaux sur la géométrie infinitésimale.

La Classe des sciences de l'Académie de Belgique a décerné le Prix F. Deruyts à M. Lucien Godeaux.

M. J. Fairon a été nommé professeur ordinaire à l'Université de Liége.

MM. Merlin et Styuvaert ont été nommés professeurs ordinaires à l'Université de Gand.

Danemark. — M. N. E. Nörlund, professeur à l'Université de Lund (Suède), a été appelé à l'Université de Copenhague, dans son pays d'origine.

La nouvelle de la mort de M. Zeuthen, que nous avions reproduite d'après le *Bull. of the Amer. Math. Soc.*, est, heureusement, erronée. Le savant géomètre danois a fêté son 80me anniversaire le 15 février dernier et nous sommes heureux d'apprendre que sa santé continue à être excellente.

France. — *Académie des Sciences.* — M. Henri Andoyer a été nommé membre de la section d'astronomie en remplacement de M. Wolf décédé.

M. Boussinesq, professeur de calcul des probabilités et de physique mathématique, admis sur sa demande à la retraite, est nommé professeur honoraire de la Faculté des Sciences de Paris.

M. Chapelon est nommé maître de conférences à l'Université de Lille.

M. Gau, professeur adjoint, est nommé à la chaire d'analyse infinitésimale de la Faculté des Sciences de Grenoble, en remplacement de M. Collet, admis à la retraite.

M. Got, professeur au Lycée de Marseille, est chargé d'un cours de mathématiques à l'Université de Nancy.

M. Janet, agrégé de mathématiques, est nommé maître de conférences à l'Université de Grenoble.

M. Kampé de Fériet est nommé maître de conférences à l'Université de Lille.

M. Leau, professeur au Lycée St-Louis, est chargé de cours à l'Université de Nancy (Calcul différentiel et intégral).

M. Emile Turrière a été nommé maître de conférences à l'Université de Montpellier, en remplacement de M. Villat, appelé à Strasbourg dans la chaire de mécanique rationnelle.

M. Vessiot est nommé professeur de mathématiques générales à la Faculté des Sciences de Paris, en remplacement de M. Guichard.

Université de Strasbourg. — L'Université de Strasbourg, qui a été réouverte le 15 janvier de cette année, est en voie de réorganisation. A la rentrée prochaine, elle sera en plein fonctionnement. Au point de vue mathématique, grâce à ses cinq professeurs titulaires et à ses trois maîtres de conférences, ce sera, après Paris, le centre mathématique le plus important de France. L'Institut de mathématiques y offrira un grand nombre de cours et de conférences. On trouvera la liste dans ce même fascicule (p. 386).

Italie. — Le *R. Istituto Veneto* a décerné en mai dernier le *prix Querini Stampalia* (échéance 31 décembre 1917, 3000 francs à M. G. D. Birkhoff, professeur à l'Université Harvard de Cambridge, Mass., pour ses deux mémoires : « The restricted problem of the three bodies », Rend del Circolo Mat. di Palermo, t. XXXIX, 1915 ; « Dynamical Systems with two degrees of freedom », Trans. of the American Math. Society, vol. XVIII, 1917.

M. S. Pincherle, professeur à l'Université de Bologne, a été nommé membre correspondant du R. Istituto Veneto.

MM. G. Castelnuovo et T. Levi-Civita, professeurs à l'Université de Rome, ont été nommés membres correspondants de l'Académie de Bologne.

M. E. Laura, professeur extraordinaire de mécanique rationnelle à l'Université de Pavie, a été nommé professeur ordinaire.

Nécrologie.

Antoine Gob. — Les mathématiques belges viennent d'éprouver une perte sensible en la personne de M. Antoine Gob, professeur à l'Athénée royal de Liège, membre de la Société royale des Sciences de Liège, décédé en cette ville à l'âge de 51 ans.

Ancien élève de l'Ecole normale des Sciences de Gand, M. A. Gob a publié de belles recherches de géométrie dans *Mathesis*, les *Bulletins de l'Académie de Belgique* et de l'*Association française pour l'avancement des Sciences*. Son sujet de prédilection était l'hypocycloïde à 3 rebroussements. Il a aussi donné des soins efficaces aux dernières éditions du Manuel de Géométrie analytique de Falisse.

M. E. Böttcher, professeur à l'Université de Leipzig, est mort accidentellement, le 5 août 1919, à l'âge de 72 ans.

M. O. Danzer, privat-docent à l'Ecole technique supérieure de Vienne, est mort en suite d'un accident, le 26 mars 1919.

M. O. Dziobek, professeur à l'Ecole technique supérieure de Charlottenbourg, est décédé à l'âge de 63 ans.

M. F. Graefe, professeur à l'Ecole technique supérieure de Charlottenbourg, est mort le 2 décembre 1918, à l'âge de 63 ans.

M. E. Netto, professeur à l'Université de Giessen, est mort à l'âge de 72 ans.

M. K. Th. Reye, précédemment professeur à l'Université de Strasbourg, est mort à l'âge de 81 ans.

M. R. Sturm, professeur à l'Université de Breslau, est décédé à l'âge de 77 ans.

M. J. Wellstein, précédemment professeur à l'Université de Strasbourg, est mort le 24 juin 1919, à Wetzlar, dans sa 50e année.

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Année 1919-1920.

ÉTATS-UNIS D'AMÉRIQUE

Columbia University *(New-York).* — T. S. Fiske : Diff. Equations, 4. — F. N. Cole : Invariants and higher Plane Curves, 3 ; Theory of Groups, 3. — J. Maclay : Theory of Functions, 4. — D. E. Smith : History of Math., 2 ; Practicum in the History of Math., 4. — C. J. Keyser : Modern Theories in Geometry, 4. — E. Kasner : Seminar in Diff. Geometry, 2. — W. B. Fite : Differential Equations, 3. — J. F. Ritt : Transcendental Functions, 3.

Cornell University *(Ithaca).* — J. Mc Mahon : Math. of Insurance and Probabilities ; Actuarial Science. — J. H. Tanner : Math. of Finance. — V. Snyder : Birational Transformations ; Theory of Equations. — F. R. Sharpe : Fourier Series and the Potential Function. — A. Ranum : Non-Euclidean Geometry ; Theory of Numbers. — W. B. Carver : Projective Geometry. — D. C. Gillespie : Elementary Diff. Equations ; Calculus of Variations. — W. A. Hurwitz : Theory of Groups ; Vector Analysis. — C. F. Craig : Theory of Differential Equations ; Math. for Teachers. — F. W. Owens : Advanced Calculus ; Mechanics. — H. B. Owens : Advanced Analytic Geometry. (Chaque cours de 3 heures par semaine).

Harvard University *(Cambridge, Mass).* — W. F. Osgood : Diff. and Integral Calculus ; Infinite Series and Products ; Galois's Theory of Equations. — G. L. Bouton : The Elementary Theory of Diff. Equations ; Diff. Equations ; with an Introduction to Lie's Theory of Continuous Groups. — J. L. Coolidge : Introduction to Modern Geometry and Modern Algebra ; Projective Geometry ; Non-Euclidean Geometry. — Huntington : The fundamental Concepts of Mathematics. — O. D. Kellogg : Introduction to the Theory of Potential Functions and Laplace's Equation ; Vector Analysis. — G. D. Birkhoff : Differential and Integral Calculus. — The analytical Theory of heat and Problems in elastic vibrations ; The partial differential Equations of mathematical Physics. — X : The Theory of Functions ; Developments in series ; Dynamics. — W. C. Graustein : Differential Geometry of Curves and Surfaces. — H. C. M. Morse : Elliptic Functions ; Automorphic Functions. — I. A. Barnett : Integral Equations ; Functions of Lines.

Professor Kellogg will conduct a fortnightly seminar in analysis Courses of research are also offered by Professor Osgood in the Theory of Functions, by Professor Bouton in the Theory of Point Transformations, by Professor

Coolidge in Geometry, by Professor Kellogg in Analysis, by Professor Birkhoff in the Theory of Differential Equations, and by Professor Graustein in Geometry.

Johns Hopkins University *(Baltimore)*. — Prof. Frank Morley : Higher Geometry, 3 (first term) ; Theory of Functions, 3 (second term) ; Seminar, 2. — Prof. L. S Hulburt : Projective Geometry and higher plane Curves, 3. — Prof. A. Cohen : Elementary Theory of Functions, 2 ; Diff. Equations and Mechanics, 3. — Dr. F. D. Murnaghan : Electricity and Magnetism, 3 (first term) ; Dynamics of a rigid Body, 3 (second term).

Princeton University. — H. B. Fine : Functions of a complexe variable. — L. P. Eisenhart : Differential Geometry. — O. Veblen : Seminar in analysis situs. — P. Boutroux ; Linear Differential Equations. — J. H. M. Wedderburn : Higher Algebra.

University of California *(Berkeley)*. — Prof. M. W. Haskell : Higher plane Curves, 3 (first term) ; Advanced analytic Geometry, 3 (second term). — Prof. C. A. Noble : Functions of a complex Variable, 3 ; Elementary Mathematics for advanced Students, 3 (first term). — Prof. D. N. Lehmer : Theory of Numbers, 3 (first term) ; Algebraic Surfaces, 3 (second term). — Prof. Florian Cajori : History of Mathematics, 2 ; History of Physics, 2 (second term) ; Seminar, 2 ; Teaching of Mathematics, 3 (first term). — Prof. T. M. Putnam : Solid analytic Geometry, 3 (first term) ; Theory of algebraic Equations, 3 (second term). — Prof. Frank Irwin : Advanced Calculus, 3. — Prof. B. A. Bernstein : Algebra of Logic, 3 (first term) ; Theory of Probability, 3 (second term) ; Logic of Mathematics, 2. — Prof. J. H. McDonald : Analytic Mechanics, 3 ; Partial differential Equations, 3 (first term).

University of Chicago. *Autumn Quarter.* — E. H. Moore : Seminar in general Analysis, 2 ; Matrices in general Analysis, 4. — G. A. Bliss : Theory of Functions of a real variable, 4 ; Calculus, 5. — L. E. Dickson : Continuous Groups, 4 ; Elementary Theory of Equations, 4. — A. C. Lunn : Vector Analysis, 4 ; Applied Mathematics, 5. — *Winter Quarter.* — E. H. Moore : Seminar in general Analysis, 2 ; Theory of Functions of infinitely many variables in general Analysis, 4. — G A. Bliss : Calculus of Variations, 5 ; Calculus, 5. — L. E. Dickson : Theory of algebraic Invariants, 4 ; Solid Analytics, 4. — H. E. Slaught : Theory of definite Integrals, 4. — E. J. Wilczinski : Projective Geometry, 4. — A. C. Lunn : Applications of vector Analysis in the Theory of Electromagnetism, 4 ; Applied Mathematics, 5. — *Spring Quarter.* — E. H. Moore : Seminar in general Analysis, 2 ; Theory of Functions of infinitely many variables in general Analysis, 4. — E. J. Wilczinski : Higher Geometry, 4 ; Projective Geometry, 4. — A. C. Lunn : The Theory of Relativity, 4 ; Applied Mathematics, 5. — J. W. A. Young : Limits and Series, 4 ; Calculus, 5.

University of Illinois *(Urbana)*. — E. J. Townsend : Differential Equations and advanced Calculus ; Functions of real Variables. — G. A. Miller : Theory of Equations ; Theory of Groups. — J. B. Shaw : Fundamental Functions ; Functional Transformations. — A. B. Coble : Automorphic Functions ; Solid Analytic Geometry. — R. D. Carmichael : Linear difference Equations. — A. Emch : Algebraic Surfaces. — A. J. Kempner : Modern Algebra. — A. R. Crathorne : Actuarial Theory. — E. B. Lytle : History of Mathematics, 2. — H. Blumberg : Projective Geometry.

University of Pensylvania *(Philadelphia).* — G. H. Hallett : Higher Calculus, 5. — H. H. Mitchell : Mathematical Theory of Probability, 5. — R. L. Moore : Introduction to the Theory of Functions of a complex Variable, 5.

Yale University *(New-Haven, Corn.).* — J. Pierpont : Elliptic Functions. — P. F. Smith : Foundations of Geometry. — E. W. Brown ; Hydrodynamics with Applications to aeronautics. — W. R. Longley : Theory of Differential Equations. — J. I. Tracey : Modern Geometry ; including differential Geometry. — J. K. Whittemore : Differential Geometry. — J. R. Kline : Advanced Algebra.

FRANCE

Université de Strasbourg, Faculté des Sciences. — 1er semestre. — *Mathématiques préparatoires et mathématiques générales.* X..., professeur (3 cours par semaine) ; Darmois, maître de conférences (2 conférences par semaine). — *Calcul différentiel et intégral.* Valiron, professeur (3) ; Antoine, maître de conférenceë (2). — *Mécanique rationnelle.* Villat, professeur (3) ; Véronnet, chargé de conférences (2). — *Astronomie.* Esclangon, professeur (2). — *Analyse supérieure*.* Fréchet, professeur : Calcul fonctionnel (2) ; Fonctions d'approximations (1).

2me semestre. — *Mathématiques générales.* X... (1) ; Darmois (2). — *Calcul différentiel et intégral.* Valiron (1) ; Antoine (2). — *Mécanique rationnelle.* Villat (1) ; Véronnet (2). — *Astronomie.* Esclangon, professeur (2) ; Danjon, astronome adjoint : Travaux pratiques à l'observatoire. — *Analyse supérieure*.* Fréchet : Calcul fonctionnel (3). — *Géométrie supérieure.* X... (2). — *Théorie des fonctions*.* Valiron : Fonctions entières (2) ; Fonctions elliptiques avec applications à la physique mathématique (2).

1er et 2me semestre. *Préparation à l'enseignement,* sous la direction de M. Villat, professeur. — *Mathématiques spéciales.* Villat, professeur (1). — *Mathématiques élémentaires.* M. N. (1). — *Calcul différentiel et intégral.* Antoine (1). — *Mécanique rationnelle.* Darmois (1).

Travaux pratiques de mathématiques. X..., directeur du laboratoire de mathématiques ; N., preparateur de mathématiques.

Institut de mathématiques. Fréchet, directeur. — L'horaire des colloques mathématiques (destinés à encourager les recherches originales) sera établi ultérieurement suivant le nombre des chercheurs inscrits.

ITALIE[1]

Bologna ; *Università.* — Burgatti : Meccanica dei corpi deformabili con applicazioni ai solidi elastici, ai fluidi perfetti e vischiosi, 3. — Donati : Teoria del calore (conduzione e radiazione ; termodinamica e atomistica) ; Principio di relatività e sue ripercussioni nei vari campi della fisica

* Les cours dont les titres sont suivis d'une astérisque portent sur des sujets variables chaque année et s'adressent aux étudiants avancés.

[1] Les cours fondamentaux, tels que Analyse algébrique et infinitésimale, Géométrie analytique, descriptive, projective, Mécanique rationnelle, existant dans toute université, ne figurent pas dans la liste.

moderna, 3. — Enriques : Integrali abeliani, 3. — Pincherle : Teoria degli aggregati di punti ; Funzioni di variabile reale e loro integrali ; teoremi di esistenza per le equazioni differenziali ordinarie, 3.

Catania ; *Università.* — Cipolla : Teoria delle funzioni ellittiche e sue applicazioni, 4. — Daniele : Teoria matematica delle vibrazioni, 4. — Picone : Equazioni integrali ; Potenziale ; Applicazioni, con speciale riguardo alle equazioni totalmente ellittiche della fisica matematica, 5. — Scorza : La geometria sopra una curva dal punto di vista algebrico-aritmetico di Dedekind e Weber, 3.

Genova ; *Università.* — Loria : Geometria degli spazi a più dimensioni, 3. — Severini : Calcolo delle variazioni, 3. — Tedone : Fenomeni ottici d'ordine superiore : assorbimento e dispersione della luce, 3.

Messina ; *Università.* — Calapso : Teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche, 4. — Giambelli : Teoria differenziale delle singolarità delle curve piane algebriche secondo il metodo dell'Enriques ; Introduzione alla geometria proiettiva degli iperspazi ; Teoria dei moduli negli iperspazi, 4. — Lazzarino : I fondamenti della elettrostatica, 4.

Napoli ; *Università.* — Amodeo : Storia delle Scienze matematiche nell' evo medio (1200-1600), 3. — Del Re : Analisi estensiva ad *n* dimensioni con applicazioni alla geometria differenziale ed alla meccanica, 4 $^1/_2$. — Marcolongo : Teoria della relatività, 3. — Montesano : Le superficie razionali ; Le corrispondenze birazionali fra i punti dello spazio, 3. — Pascal : Le funzioni monogene, 3. — Pinto : Ottica geometrica con la teoria degli strumenti ottici, 3.

Padova ; *Università.* — Amaldi : Introduzione alle teorie di integrazione di Lie, 4. — D'Arcais : Funzioni armoniche ; Fondamenti della teoria delle funzioni di variabile complessa ; Serie di Fourier, 4. — Gazzaniga : Teoria dei numeri, 3. — Ricci : Calcolo differenziale assoluto ; Principi e teorie fondamentali della elasticità, 4. — Severi : Geometria algebrica e in particolare delle superficie razionali, 4. — Tonolo : Teoremi di esistenza ; Sistem jacobiani, 4.

Palermo ; *Università.* — Bagnera : Calcolo delle variazioni per le funzioni di una sola variabile indipendente ; Equazioni integrali, 3. — De Franchis : Geometria sulle curve algebriche, 3. — Gebbia : Elettromagnetismo con speciale riguardo alle oscillazioni elettriche, 4 $^1/_2$. — Signorini : Idrodinamica, 3.

Pavia ; *Università.* — Berzolari : Geometria sulla curva algebrica, 3. — Cisotti : Elasticità : distorsioni e deformazioni finite, 3. — Gerbaldi : Teoria delle funzioni di variabile complessa e delle funzioni ellittiche, 3. — Vivanti : Teoria delle equazioni algebriche, 3.

Pisa ; *Università.* — Bertini : Trasformazioni cremoniane nel piano e nello spazio, 3. — Bianchi : Geometria differenziale, 3. — Maggi : Ottica fisica sotto il doppio aspetto della teoria elastica e della teoria elettromagnetica, 4 $^1/_2$. — N. N. : Meccanica superiore, 3.

Roma ; *Università.* — Bisconcini : Applicazioni geometriche del calcolo, 3. — Bompiani : Geometria dell' applicabilità delle superficie e delle varietà, 3. — Cantelli : Calcolo delle probabilità con applicazioni, 3. — Castelnuovo : Geometria non euclidea con interpretazioni fisiche, 3. — Crudelli : Intro-

duzione agli studi superiori di elettricità e di magnetismo, 3. — Levi-Civita : Curve definite da equazioni differenziali-soluzioni periodiche, 3. — Perna : Teorie elementari dell'analisi matematica, 3. — Silberstein : Principio di relatività, 3. — Silla : Equazioni differenziali della dinamica, 3. — Volterra : Equazioni della fisica matematica, 3. — Relatività, 3.

Torino ; *Università.* — Boggio : Meccanica analitica, 3. — Segre : Gruppi d'ordine finito. 3. — Somigliana : Teoria dell'elettricità e del magnetismo, 3. — N. N. : Analisi superiore, 3.

SUISSE

Semestre d'hiver (octobre 1918 à mars 1919).

Bâle ; *Université.* — W. Matthies : Mechanik, 4 ; Uebungen, 1 ; Elastizitätstheorie, 2 ; Math.-Phys. Seminar, 2. — H. Mourmann : Diff.- und Integralrechnung, 4 ; Uebungen, 1 ; Kurven und Flächen, 4 ; Mathem. Seminar. gemeinsam mit Prof. Spiess, 1. — O. Spiess : Integralrechnung, III. Teil (Anwendungen), 3 ; Funktionentheorie. II. Teil (Elliptische Funktionen, lineare Differenzialgleichungen etc.), 3 ; Geschichte der Mathematik im 17. Jahrhundert, 1 ; Mathem. Seminar, gemein mit Prof. Mohrmann, 1. — R. Flatt : Pädagogisches Seminar, math.-naturwiss. Abteilung, 4 ; Repetitorium der Geometrie. 2. — M. Knapp : Astronomie in Babylon, 2 ; Populäre Astronomie. 1 ; Lektüre der Werke Joh. Kepplers, 1.

Berne ; *Université.* — G. Huber : Theorie der algebr. Flächen, 3 ; Fourie'sche Reihen u. Integrale mit Anwendungen auf die Physik, 2 ; Determinantentheorie, 1 ; Mechanik des Himmels, 2 ; Mathem. Seminar, 1. — N. N. : Höhere Analysis. — Crelier : Algebr. Analysis, 2 ; Sphär. Trigonometrie, 2 ; Integralrechnung, 2 ; Analyt. Geometrie, 2 ; Darst. Geometrie, II, 2 ; IV. 2 ; Synth. Geometrie, 2. — Berliner : Zahlentheorie, 2. — Mauderli : Astron. Phänomenologie, II. 2 ; Geogr.-astr. Ortsbestimmung, 2 ; Einführung in die Physik des Himmels, 1. — Moser : Math. Grundlagen der Krankenversicherung, 2 ; die Makeham'sche Funktion, 2 ; Einführung in die Lebensversicherungsrechnung ; Math.-Versicherungswissenschaftliches Seminar. 1-2. — Bohren : Die Sozialversicherung und ihre Grundlagen, 2. — Gruner : Vektor-Analysis u. Potentialtheorie, 2 ; Mechanik deformierbarer Körper, 2. — Kœstler : Einführung in die theoritische Mechanik, 1-2.

Genève ; *Université.* — C. Cailler : Calcul diff. et integr., 3 ; Exercices, 2 ; Mécanique rationnelle, 3 ; Exercices, 2 ; Conférence d'analyse (Fonctions elliptiques). 2 ; Compléments de Mécanique rationnelle, 1. — H. Fehr : Eléments de mathématiques sup., 3 ; Conférence d'Algèbre et de Géométrie, 2 ; Exercices pratiques sur les éléments de mathématiques sup , 2 ; Conférence de Géométrie sup . 2 ; Séminaire de mathém. élémentaires ; Méthodologie math., 1. — R. Gautier : Astronomie math. générale, 2.

Privat-docents : A. Bernoud : Histoire des Sciences : La science Hellène, 1. — D. Mihimanoff : Eléments de la théorie des ensembles, 1. — G. Tiercy : Théorie des différents modes de perspective, 1

Lausanne ; *Université.* — M. Amstein : Théorie des fonctions, 3 ; Complément de calcul intégral, 2. — G. Dumas : Calcul diff. et intégr., 6 ; Exercices, 2 ; Questions div. d'analyse, 2 ; Séminaire math., 1. — Lacombe : Géométrie

descriptive, 4; Epures, 4; Géométrie analyt., 2; Géométrie de position avec exercices, 3. — MAYOR : Mécanique rationnelle, 4 : Exercices, 1 ; Physique mathém, 2. — MAILLARD : Calcul infinitésimal, avec application aux sciences, 4 ; Astronomie sphérique, 3 ; Mécanique rationnelle, 2. — S DUMAS : Calcul des probabilités, 2me partie, 3.

Privat-docents : JACCOTTET : Potentiel et Equation de Laplace, 2. — PASCHOUD : Introduction à la Physique math., 2.

Neuchâtel ; *Université.* — L.-G. DU PASQUIER : Théorie des surfaces, 2 ; Calcul diff. et intégr., 3 ; Exercices, 2 ; Algèbre sup., 1 ; Equations diff., 1 ; Science actuarielle : Calcul des probabilités, 1 ; Développement de la notion d'espace : Quatrième dimension et principe de relativité, 1 ; Séminaire de math., 1. — L. GABEREL : Fonctions analytiques, 2 ; Géométrie descriptive, 2. — E. LEGRANDROY : Astronomie, 2, Astronomie (cours sup.), 1 ; Exercices, 1. — A. JAQUEROD : Mécanique rationnelle, 2. — A. REYMOND : Philosophie des sciences, 1.

Privat-docents : H. STRŒLE : Méthode des moindres carrés, 1. — L. ARNDT : Le principe de relativité, 1.

Zurich ; *Université.* — R FUETER : Einführung in die math. Behandlung der Naturwiss., 4 ; Uebgn., 1 ; Funktionentheorie, 3 ; Math. Seminar, 1. — SPEISER : Diff.- und Integralrechnung I, 4 ; Uebgn., 1 ; Differentialgleichungen der Himmelsmechanik, 3 ; Uebgn. zur Variationsrechnung, 1. — WOLFER : Einleitung i. d. Astronomie, 3 ; Uebgn., 2 ; Bahnbestimmung von Planeten u. Kometen, 2. — *Pr.-Doc. :* GONSETH : Angewandte Math., 4.

Zurich ; *Ecole polytechnique fédérale, section normale.* — HIRSCH : Höh. Mathematik I. 6 ; Repet., 1 ; Uebgn., 2 ; III, 3 ; Uebgn., 1. — FRANEL : Mathématiques supérieures, I, 6 ; Répét., 1 ; Exercices, 2 ; III, 3 ; Exercices, 1. — GROSSMANN : Darstell. Geometrie, 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 4 ; Ebene alg. Kurven, 2. — WEYL : Analyt. Geometrie, 2 ; Uebgn., 1 ; Diff. Gleichungen, 4. — KOLROSS : Géométrie descriptive, 4 ; Répét., 1 ; Exerc., 4. — MEISSNER : Mechanik II, 4 ; Repet., 1 ; Uebgn., 2. — HURWITZ : Alg. Gleichungen, 4 ; Math. Seminar, 2. — BÆSCHLIN : Vermessungskunde ; Höh. Geodäsie, 3 ; Repet., 1. — WOLFER : Einleitung in die Astronomie, 3 ; Uebgn., 2 ; Bahnbestimmungen von Planeten u. Kometen, 2. — AMBERG : Math. Probleme der Sozialversicherung, 2. — N. N. : Einführung in den math. naturw. Unterricht.

Cours libres. — BEYEL : Rechenschieber mit Uebgn., 1 ; Darst. Geometrie, 2 ; Achsonometrie u. Perspektive, 2. — GONSETH : Calcul des variations, 1. — Equations aux dérivées partielles, 2. — KIENAST : Elastizitätstheorie, 2. — KRAFT : Die Grundkräfte der Welt, 1 ; Geometrische Analysis, 3 ; Analytische Mechanik, 3. — PÓLYA : Analytische Mechanik, 2 ; Einführung in die Analysis reeller Grössen, I, 2.

BIBLIOGRAPHIE

G. Bouligand, professeur de mathématiques spéciales au lycée de Rennes. — **Cours de Géométrie analytique.** — 1 vol in-8°, VII-421 pages ; préface de M. le professeur Cartan ; librairie Vuibert, Paris, 1919.

On pourrait s'étonner de la publication d'un nouveau volume sur la Géométrie analytique, à l'époque où nous sommes et après tant d'ouvrages édités, si l'on oubliait que l'enseignement scientifique ne saurait être confiné dans une formule étroite et rigide, mais qu'il évolue, se transforme, progresse, qu'il doit au contraire présenter tous les caractères de la vie.

C'est la pensée qui a évidemment inspiré l'auteur, chez lequel on aperçoit aisément la sollicitude constante qu'il apporte au développement des intelligences qui lui sont confiées. C'est également ce que met en pleine lumière M. Cartan, dans sa remarquable préface, à laquelle je me permets de faire quelques emprunts.

« Il semble possible, dit-il, tout en restant dans les limites du programme, « de dégager pour les élèves l'essentiel de ce qui, dans le courant des « idées géométriques modernes, peut être mis à leur portée. Plus franche- « ment cela se fera, plus ils en tireront profit, moins grand sera l'effort de « mémoire nécessaire pour assimiler les matières du cours...

« Le but qu'a poursuivi l'auteur est de former l'esprit de l'élève et de se « servir des matières à enseigner pour l'aider à acquérir une culture mathé- « matique proprement dite...

« Un autre caractère du présent livre est l'appui que s'y prêtent mutuelle- « ment le raisonnement géométrique et le calcul. L'auteur considère avec « juste raison que la Géométrie pure et la Géométrie analytique ne sont « pas deux sciences rivales dont chacune interdit à l'autre d'empiéter sur « son domaine ; elles gagnent au contraire à s'éclairer l'une par l'autre...

« L'auteur demande beaucoup à la collaboration de l'élève. Cette manière « de faire présente des avantages certains pour les bons élèves, mais elle « en présente aussi pour les élèves moyens qui seraient guidés par le pro- « fesseur ; l'idéal à réaliser est d'ailleurs la collaboration simultanée de « l'élève, du livre et du professeur. »

Ces observations très justes suffisent à caractériser l'œuvre de M. Bouligand, à en montrer la grande utilité et le caractère spécial. Il y a là un effort nouveau, et très intéressant, qui doit être fécond en heureux résultats.

Une autre qualité de l'ouvrage, et qui n'est pas à dédaigner, c'est sa brièveté relative. Faire tenir autant de matières en un seul volume, dont l'étendue n'est pas excessive, et cela sans nuire jamais à la clarté, n'était pas une tâche facile.

Pour qu'on puisse s'en faire une idée, nous reproduisons ici les titres des chapitres composant l'ouvrage.

Introduction. *Rappel de notions fondamentales relatives aux vecteurs, aux segments, aux angles, aux projections.*

Ch. I. *Coordonnées. Représentation analytique des lignes et des surfaces.* — II. *La droite et le plan.* — III. *Eléments de l'Infini. Eléments imaginaires.* — IV. *Propriétés générales des lignes et des surfaces de la Géométrie réelle.* — V. *Courbes et surfaces algébriques.* — VI. *Des lieux géométriques.* — VII. *Etude sommaire de quelques transformations. Notions sur l'homographie.* — VIII. *Corrélations. Tangentes. Enveloppes.* — IX. *Longueur d'un arc. Courbure.* — X. *Les courbes du second ordre.* — XI. *Surfaces du second ordre ou quadriques.* — XII. *Intersection de deux quadriques.* — XIII. *Courbure des lignes tracées sur une surface.*

Compléments. *Application des déterminants; coniques et quadriques. Détermination des figures: notions générales. Détermination des coniques et des quadriques. Invariants.*

Nous avons le ferme espoir que l'ouvrage de M. Bouligand obtiendra le succès qu'il mérite. Il rendra de grands services aux professeurs aussi bien qu'aux élèves, et sera un nouvel instrument de progrès pour la science et pour l'enseignement. C.-A. Laisant.

P. Boutroux. — **Les Principes de l'analyse mathématique.** Exposé historique et critique. *Tome II* (La Géométrie algébrique. Extensions de l'Algèbre et constructions logiques. Développements en séries. La Méthode analytique. Analyse infinitésimale. Analyse des principes. Analyse de la notion de fonction). — 1 vol. gr. in-8° de 512 p. et 109 fig.; 20 fr.; A. Hermann, Paris, 1919.

La guerre a beaucoup retardé la publication de ce second volume dont l'esprit philosophique et scientifique devrait être analysé comme il a déjà été fait ici lors de la publication du tome premier (t. XVI, 1914, p. 151).

On juge encore mieux de l'œuvre maintenant qu'on l'a sous les yeux absolument au complet. Dans son ensemble, elle est essentiellement initiatrice et contient un cours très complet de mathématiques générales, tout en contenant d'ailleurs beaucoup plus avec ses pénétrantes remarques historiques, philosophiques et même littéraires. Et, par delà ce premier programme, elle conduit le lecteur jusqu'au seuil de la moderne théorie des fonctions, jusqu'aux points où le continu a été disséqué par la théorie des ensembles de manière à laisser apercevoir son squelette arithmétique d'une manière aussi simple que possible.

Bien remarquables sont les pages consacrées à la construction logique des mathématiques. Tout en signalant les difficultés probablement insurmontables de la question, l'auteur, en ayant recours à la notion de *classe*, montre qu'on peut, avec elle, concevoir une genèse commune aux principes de l'arithmétique et à ceux de la géométrie; il a ainsi une occasion simple de parler des groupes et de la géométrie non-euclidienne.

L'idée de construction logique conduit aussi à quelques pages fort intéressantes sur les logiques mathématiques dues à Peano, Russell,... logiques qui sont malheureusement d'un mécanisme plus intéressant que fécond.

Après le calcul intégral, les limites, bref après toute l'étude du continu analytique, M. Boutroux place la géométrie différentielle, où l'on s'élève

aux propriétés géométriques finies en partant des propriétés infinitésimales, et il y joint, tout naturellement, la mécanique différentielle qui, en somme, se définit tout comme la géométrie ainsi qualifiée.

Et quant à l'analyse des principes conduisant aux extensions mathématiques modernes, analyse déjà mentionnée tout à l'heure, elle nous fait pressentir toutes les singularités plus ou moins bizarres qui naissent, d'une part, sur les notions mêmes de continuité et d'analyticité, d'autre part, dans les fonctions analytiques elles-mêmes.

Pour celles-ci nous retrouvons les séries fondamentales (Taylor, Laurent,...) et des exemples très explicites empruntés aux fonctions elliptiques.

La conclusion est que la science redevient hellène et le savant contemplatif. Les Grecs avaient raison quant à leur idée mystique et extérieure de la science ; celle-ci n'est pas absolument notre œuvre puisque chaque grande construction scientifique humaine nous révèle des choses que nous n'avons pas su y mettre

Beaux thèmes de discussion pour philosophes assez mathématiciens pour parler vraiment des mathématiques en connaissance de cause ; l'œuvre de M. Pierre Boutroux, tout en étant utile à de nombreuses catégories d'élèves, augmentera certainement le nombre de ces philosophes-là

A. Buhl (Toulouse).

F.-C. Clapier, professeur au Lycée Gassendi (Digne). — **Sur les surfaces minima ou élassoïdes,** thèse présentée à la Faculté des sciences de Paris pour obtenir le grade de docteur ès sciences mathématiques, mai 1919. — Une brochure in-4° de 63 pages ; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Le travail de M. F.-C. Clapier a pour objet d'apporter une contribution à l'étude des surfaces minima ou élassoïdes. L'auteur s'est spécialement placé sous le point de vue de A. Ribaucour. Un premier chapitre est consacré à des généralités sur la géométrie de ces surfaces remarquables et à l'application des formules de A. Ribaucour Dans les trois chapitres suivants, les surfaces minima sont étudiées dans leurs relations avec leur représentation sphérique. Entre autres applications intéressantes, il y a lieu de relever celle de la *détermination des surfaces minima admettant pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure le réseau isotherme qui correspond aux lignes de courbure d'une quadrique.*

M. Clapier montre, en outre, comment diverses méthodes géométriques permettent d'obtenir l'intégration de certaines équations aux dérivées partielles.

Dans un cinquième chapitre, consacré aux trajectoires orthogonales de certains systèmes de surfaces minima, l'auteur revient sur une question qu'il avait précédemment étudiée et qui paraît être le point de départ de ses recherches : *Sur la recherche des surfaces minima*, dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (4), t. XIV, août 1914, p. 359-363.

La méthode indiquée est une application de la formule

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\left(\frac{\partial c}{\partial x} + \frac{\partial c'}{\partial y} + \frac{\partial c''}{\partial z}\right),$$

exprimant la courbure moyenne d'une surface générale en fonction de la divergence d'un vecteur unitaire (c, c', c'') porté par la normale. La surface

minima de Scherk est immédiatement déterminée par application de cette formule.

Cette formule remarquable (ainsi qu'une formule analogue également retrouvée par M. Clapier, pour l'expression générale de la courbure totale d'une surface) a d'ailleurs été donnée depuis déjà longtemps par Borchardt :

C.-W. Borchardt : Sur la quadrature définie des surfaces courbes, *Journal de Mathématiques pures et appliquées* (de Liouville), t. XIX, 1854, p. 369-394.

Deux théorèmes de M. Borchardt sur les fonctions symétriques d'une équation algébrique et sur les rayons de courbure principaux des surfaces, *Nouvelles Annales de Mathématiques*, t. XIV, 1855, p. 26-27.

Cette formule permettrait de rattacher le problème des surfaces minima à un problème de la théorie des tourbillons

Emile Turrière (Montpellier).

G.-H. Halphen. — **Œuvres** publiées par les soins de C. Jordan, H. Poincaré, E. Picard, avec la collaboration de E. Vessiot. *Tome II.* — 1 vol. gr. in-8° de viii-560 p. ; 40 fr. ; Gauthier-Villars, Paris, 1918.

Ce second volume s'ajoute, après un temps fort court, eu égard aux circonstances actuelles, à celui déjà analysé dans cette Revue (1916, p. 365). Il ne semble ni moins riche ni moins intéressant que le premier et contient tout d'abord les deux ultimes Mémoires *Sur les caractéristiques des systèmes de coniques ;* cette question, rappelée et située dans la précédente analyse, considérée comme si décevante par Chasles et toujours emplie d'un malaise de non rigueur que de Jonquières ne fit qu'augmenter, reçut, comme on sait, une solution irréprochable de l'irréprochable algébriste qu'était Halphen. La publication du Tome II de ces *Œuvres*, complète et rassemble ainsi tous les efforts faits pour résoudre un problème, qui mérite une célébrité fort comparable à celle des plus fameuses énigmes éclaircies à la fin du dix-neuvième siècle.

En ne citant que les principaux écrits, nous en trouvons ensuite deux autres beaucoup plus courts mais presque aussi réputés que les précédents. Ils étudient le mouvement d'un point sur une conique et montrent que la loi de Newton est indépendante de considérations focales. Il importe de remarquer qu'il ne s'agit pas là de quelque fantaisie analytique, mais bien d'un problème de Mécanique céleste introduit par Tisserand dans son grand Traité et qui pourrait correspondre, par exemple, à la justification de la loi newtonnienne pour des systèmes stellaires doubles, dont l'observation serait insuffisante à déceler des propriétés focales.

Voici maintenant la profonde proposition d'algèbre sur la possibilité de mettre un polynôme à deux variables sous la forme $A\varphi + B\psi$ où φ et ψ sont donnés. C'est l'un des pivots de la moderne théorie des surfaces algébriques, comme on peut s'en convaincre en ouvrant le tome II des *Fonctions de deux variables* de M. Emile Picard.

Quel mathématicien actuel, choisi parmi les plus savants, pourrait dire, à brûle pourpoint, ce qu'est la « suite de Farey » ? C'est l'ensemble des fractions réduites dont le dénominateur ne surpasse pas un entier donné. Elle a d'élégantes propriétés qu'Halphen généralise et elle aura, de plus, pour beaucoup, l'attrait de la nouveauté.

Abordons les si importantes recherches d'Halphen sur les points singu-

liers des courbes gauches et les lignes singulières des surfaces algébriques. La notion de *cycle*, déjà bien connue pour les courbes planes et dont l'importance n'a fait qu'augmenter par la suite, est étendue avec une grande habileté. Il faut encore remarquer l'emploi du théorème égalant le nombre des zéros et des infinis d'une fonction rationnelle des coordonnées d'une courbe algébrique ; il intervient avec une facilité inattendue dans les relations liant les ordres, les classes, les rangs relatifs à une courbe gauche. Les *covariants différentiels* des courbes gauches naissent en cherchant les points de cette courbe où une certaine équation différentielle est satisfaite ; j'ai déjà signalé le problème correspondant pour les courbes planes en analysant le volume précédent.

Sur les surfaces, les cycles proviennent, en général, de *nappes* et non de *branches ;* les cycles de nappes ont des propriétés dualistiques très simples notamment quant aux contacts. Les lignes asymptotiques jouent ici le rôle de lignes singulières à rôle simplificateur et toutes les belles propriétés ainsi obtenues sont finalement vérifiées sur les surfaces de révolution et les surfaces réglées.

Aux covariants différentiels s'ajoutent les *invariants* différentiels ; c'est d'ailleurs une idée, chère à Halphen, qui reparaît sous des formes multiples. Cette idée a d'ailleurs été quelque peu transformée par la théorie des groupes, mais je crois bien que c'est encore à Halphen qu'il faudra remonter si l'on veut retrouver toute l'élégance géométrique du sujet primitif. L'invariant qui fut d'abord nouveau pour l'auteur provient d'une cubique ayant avec une courbe plane, en M, huit points communs confondus d'où un neuvième point N fixe sur la cubique et qui correspond de manière univoque à M. Les correspondances dues à de telles suroscularions s'étendent même aux courbes gauches et donnent des théorèmes d'intégrabilité pour les équations différentielles.

Les fonctions elliptiques apparaissent, en nombre de pages, pour nous donner sans doute quelque idée de ce que la mort n'a pas permis à Halphen de mettre en son grand Traité.

La relation bien connue, dite « équation à trois termes » pour la fonction σ, s'écrit aussi bien pour la fonction H. Elle peut se vérifier aussi pour des polynômes, ce qui entraîne l'intégration algébrique de

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y(y+1) - 4x}{x(8y-1)}.$$

Certaines extensions aux équations aux dérivées partielles sont possibles.

Pour en revenir aux invariants différentiels des courbes gauches il faut évidemment citer, en tout premier lieu, le travail d'une centaine de pages publié, en 1880, au *Journal de l'Ecole polytechnique*. On y trouve les résultats les plus divers appuyés sur des considérations d'apparence élémentaire telles la recherche des lignes invariantes par transformation homographique ; il y a aussi des transformations qui changent un invariant de courbe plane en un invariant de courbe gauche ; par surcroît, on intègre chemin faisant de nombreuses équations différentielles...

Le dernier tiers du volume renferme de nombreux petits Mémoires qui rappellent beaucoup ceux d'Hermite. Il y a là des polynômes à propriétés curieuses, des équations différentielles élégamment intégrables, des intégrales définies et, tout particulièrement, des études concernant, pour des

séries abéliennes, des questions de validité qui ne furent point traitées par Abel.

Je n'ai cité que les points les plus saillants. Beaucoup de théorèmes d'arithmétique s'imbriquent sur tout l'ensemble. A tous les points de vue, ce second tome peut être un magnifique et puissant instrument de travail.

Des faits récents viennent à l'appui de cette manière de voir ; les surfaces et surtout les courbes gauches algébriques attirent à nouveau l'attention des géomètres. Ces sujets sont actuellement repris, développés, prolongés ainsi que peut en faire foi la *Théorie des courbes gauches algébriques* professée en Sorbonne et récemment publiée par M. R. de Montessus (Paris, Croville-Morant, 1918). Nous aurons l'occasion de revenir prochainement sur cette nouvelle publication qui, en effet, et comme l'indique l'auteur lui-même, s'appuie tout particulièrement sur l'œuvre d'Halphen.

A. Buhl (Toulouse).

A. Lœwy. — **Lehrbuch der Algebra.** Erster Teil : *Grundlagen der Arithmetik.* — 1 vol. in-8°, 398 p., 12 M. ; Veit & Cie, Leipzig.

Ce volume, qui a pour objet les principes de l'arithmétique théorique, forme le tome I d'un Traité d'Algèbre destiné aux étudiants des Universités. Après s'être familiarisés dans l'enseignement secondaire avec la pratique des opérations arithmétiques et algébriques, il est indispensable que les étudiants en mathématiques fassent une étude approfondie des principes modernes de l'arithmétique théorique et de l'algèbre. Ils doivent avoir des connaissances précises sur les théories fondamentales concernant les notions des nombres rationnels, nombres irrationnels, les fractions continues, les puissances, les racines, les logarithmes, les limites, les séries, le développement du binôme, les produits infinis. Tous ces objets, limités au domaine réel, sont étudiés dans ce volume dans leur enchaînement logique avec la précision et la rigueur nécessaires. L'auteur a tenu compte des progrès récents réalisés grâce à l'introduction des notions de groupes et de corps. Son Ouvrage sera consulté avec fruit non seulement par les étudiants mais aussi par les professeurs.

H. F.

R. de Montessus de Ballore. — **Introduction à la Théorie des Courbes gauches algébriques.** Cours libre professé à la Faculté des Sciences de Paris, recueilli et rédigé par M. Vogt. — 1 vol. autographié, gr. in-4° de 112 p., avec figures, 12 fr. ; Croville-Morant, Paris, 1918.

C'est presque une stupéfaction que de parcourir ces pages si intéressantes. Quoi, il y a tant de choses dans les intersections de quadriques dont ne parlent point les traités qui s'étendent tant sur les quadriques elles-mêmes ! Vraiment la lacune était regrettable !

Le point de départ de l'auteur est général. Une courbe gauche algébrique est l'intersection de deux surfaces algébriques ; si, entre les équations de celle-ci, on élimine z puis toutes les puissances de z sauf z, la courbe a pour équations

$$\varphi(x, y) = 0, \qquad z = \frac{\psi(x, y)}{\chi(x, y)}$$

et son étude est celle d'une fraction rationnelle sur la courbe $\varphi = 0$. C'est le point de vue utilisé par Cayley et Halphen. Il suffirait à imposer la géo-

métrie sur une courbe algébrique qui intervient dans les plus hautes parties de la théorie des fonctions, comme il ressort des travaux de M. Emile Picard et de ceux de l'école italienne.

Mais M. de Montessus n'a voulu faire qu'une introduction élémentaire ; il manie d'abord les courbes gauches les plus simples, cubiques et quartiques.

Les cubiques gauches sont unicursales et on peut aisément les considérer comme situées sur des cônes du second degré, d'où une foule d'analogies avec les coniques. La perspective plane de la cubique est une unicursale du troisième ordre, d'où des propriétés d'osculation qui correspondent aux propriétés inflexionnelles des cubiques planes. Il y a aussi des propriétés de polarité permettant de définir des tétraèdres conjugués par rapport à une cubique gauche.

L'étude générale de l'intersection de deux quadriques, S et T, qu'elle donne une cubique ou une quartique, repose sur l'équation en λ qui exprime qu'une quadrique du faisceau $S + \lambda T = 0$ est un cône. Il y a sept cas à distinguer, dont les deux derniers seuls correspondent aux cubiques, mais, d'une manière générale, l'examen détaillé de cette équation en λ constitue un magnifique exercice d'algèbre.

Les quartiques gauches sont de première espèce quand elles sont des intersections de quadriques, de seconde espèce dans le cas contraire.

Parmi les quartiques de première espèce, les plus simples sont unicursales, mais les autres ne sont pas moins intéressantes comme se prêtant à une étude paramétrique uniforme de par l'emploi des fonctions elliptiques ; il est entendu que c'est un résultat bien connu, en bloc, mais M. de Montessus l'a détaillé avec beaucoup d'art pour montrer élémentairement que, de même que l'étude de la fonction $\wp$ de Weierstrass revient à l'étude d'une cubique plane, l'étude des fonctions sn, cn, dn de Jacobi revient à l'étude d'une quartique gauche. Et l'analogie se poursuit avec la géométrie de la quartique, avec, par exemple, quatre points dans un même plan, les plans bitangents, leur rapport anharmonique, les plans osculateurs ou surosculateurs, les polygones gauches inscrits qui, lorsqu'ils se ferment, généralisent manifestement les théorèmes de Poncelet.

Parmi les quartiques de première espèce, citons les ellipses, hyperboles et paraboles logarithmiques, l'ellipse sphérique et plus généralement les cycliques, intersections d'une sphère et d'une quadrique, intimément liées à de merveilleuses surfaces du quatrième ordre : les cyclides.

Les quartiques gauches de seconde espèce sont des courbes unicursales.

Un court chapitre détermine le degré minimum de la surface contenant la courbe gauche la plus générale de degré d et nous reprenons alors les généralités qui préoccupèrent tant Cayley et Halphen.

Les *formules de Cayley* sont, pour les singularités des courbes gauches, ce que sont les formules de Plücker pour les singularités des courbes planes.

Quant à l'étude générale de ces points singuliers, elle s'appuie sur la représentation de la courbe au moyen des surfaces $z\chi(x, y) = \psi(x, y)$ dont il a été question au début, c'est-à-dire des surfaces *monoïdes* de Cayley.

C'est ici notamment que M. de Montessus a fait une exposition fort originale et novatrice. L'obtention des monoïdes repose sur une élimination dont le résultat peut dépendre d'un polynôme arbitraire, d'où diverses formes possibles pour la surface monoïde. La question d'algèbre a été précisée à nouveau par un théorème élégant et très général qui appartient à l'auteur.

Le rédacteur termine par une courte note où il montre que certaines quartiques unicursales se divisent en deux sous-groupes qui s'accomodent symétriquement de la représentation paramétrique, l'un par les fonctions circulaires, l'autre par les fonctions hyperboliques.

C'est ici l'occasion d'attirer l'attention sur ce jeune rédacteur qui montrait une vive intelligence mathématique, à qui l'on avait confié la classe de Mathématiques spéciales du Lycée de Montpellier vers le début de 1919 et qui, hélas, devait mourir peu après. Il était fils du professeur bien connu attaché à la Faculté des Sciences de Nancy. Le fait d'avoir contribué à publier l'œuvre si remarquable de M. de Montessus lui assurera au moins un de ces souvenirs que la Science accorde aux travailleurs désintéressés.

A. Buhl (Toulouse).

Sir J.-J. Thomson. — **La théorie atomique.** Traduction de Ch. Moureu. — 1 petit vol. in-12° de vi-58 p., 4 fr. 80 ; Gauthier-Villars, Paris, 1919.

Le titre de ces pages passionnantes aurait pu donner à penser, il y a quelques dizaines d'années, qu'elles ne s'adressaient point aux mathématiciens. Il en est tout autrement aujourd'hui. Il s'agit des théories relatives à la structure corpusculaire de l'atome et l'on sait que l'étude de la dynamique de tels systèmes corpusculaires force à réexaminer tous les principes de la mécanique et à concevoir, de manière nouvelle, la dynamique ordinaire.

L'atome apparaît comme un système planétaire avec des électrons satellites sur lesquels il est extrêmement difficile d'expérimenter ; pour arracher ces corpuscules si ténus à leurs orbites, il faut, en général, des forces immenses. Heureusement on peut demander ces forces aux atomes qui se désagrègent d'eux-mêmes dans les substances radio-actives, aux bombardements cathodiques,... bref aux agents de désagrégation qui, paraît-il, existent dans tous les milieux et qui, convenablement excités, entraînent à la dissolution les congénères du caractère le plus stable.

Sir J.-J. Thomson est très optimiste quant à sa manière d'envisager l'avenir de la question. Il ne nous annonce pas encore une méthode générale de transformation de l'atome qui serait la transmutation d'un élément quelconque en un autre. Peut-être finira-t-on ainsi, mais il n'est pas indiqué de chercher à commencer par là.

Soyons heureux, pour le moment, de constater que nous savons déjà beaucoup de choses sur l'atome, sur ses couches les plus superficielles et qu'il est fort naturel de connaître d'abord celles-ci.

Nous connaissons aussi beaucoup de choses sur les mouvements corpusculaires et, merveille, ceux-ci ont pu être rendus visibles dans une atmosphère sursaturée de vapeur d'eau, car, lorsque des électrons se produisent dans une telle atmosphère, l'eau se condense exclusivement sur eux. Et l'on a de légers semis de perles qu'on peut étudier à loisir !

Comme le dit M. Charles Moureu, l'éminent traducteur, on ne peut lire quelques lignes sur de tels sujets sans dévorer le volume du coup.

Félicitons-nous donc de cette traduction si forcément compréhensive et exacte de par la personnalité de celui qui l'a entreprise.

Ajoutons qu'un problème moral a été poursuivi parallèlement à l'œuvre de propagande scientifique. Sir J.-J. Thomson voulait laisser le bénéfice matériel produit par la vente de l'œuvre, à la Croix-Rouge française,

M. Charles Moureu voulait l'offrir à la Croix-Rouge anglaise ; on ne put jamais s'entendre jusqu'au moment où l'on convint subitement, de part et d'autre, que ces bénéfices iraient à la Croix-Rouge belge.

Notre Revue, justement parce qu'elle est placée en pays neutre, peut, plus que toute autre, faire des vœux ardents pour que le profit en question soit aussi grand que possible. A. Buhl (Toulouse).

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

American Journal of Mathematics, Volume XL. — J. Eiesland : Flat-Sphere Geometry. — J. Vital De Porte : Irrational Involutions on Algebraic Curves. — J. R. Musselman : The Set of Eight Self-Associated Points in Space. — J. K. Whittemore : Associate Minimal Surfaces. — F. W. Reed : On Integral Invariants. — H. F. Price : Fundamentals Regions for Certain Finite Groups in S. — R. D. Carmichael : On the Representation of Functions in Series of the Form $\Sigma c_n g(x+n)$. — L. P. Eisenhart : Transformation of Planar Nets. — O. D. Kellogg : Orthogonal Function Sets Arising from Integral Equations. — Ch. H. Rawlins : Complete Systems of Concomitants of the Three-Point and the Four-Point in Elementary Geometry. — A. L. Miller : Systems of Pencils of Lines in Ordinary Space. — T. Dantzig : Some Contributions to the Geometry of Plane Transformations. — P. Sperry : Properties of a Certain Projectively Defined Two-Parameter Family of Curves on a General Surface. — O. D. Kellogg : Interpolation Properties of Orthogonal Sets of Solutions of Differential Equations. — H. B. Philipps : Directed Integration. — Lipine Hall Rice : P-way Determinants, with an Application to Transvectants. — W. Harold Wilson : On a Certain General Class of Functional Equations. — R. G. D. Richardson : Contributions to the Study of Oscillation Properties of the Solutions of Linear Differential Equation of the Second Order. — A. B. Coble : Theta Modular Groups Determined by Point Sets. — W. Van N. Garretson : On the Asymptotic Solution of the Non-Homogeneous Linear Differential Equation of the n-th Order. — C. C. Bramble : A Collineation Group Isomorphic with the Group of the Double Tangents of the Plane Quartic. — A. Emch : Proof of Pohlke's Theorem and its Generalizations by Affinity. — D. N. Lehmer : Arithmetical Theory of Certain Hurwitzian Continued Fractions.

American Mathematical Montly (The), Lancaster, P. A. and Urbana, Ill. — Volume XXV. — E. V. Huntington : Bibliographical Notes on the use of the Word « Mass » in current Text Books. — D. E. Smith and J. Ginsburg : Rabbi Ben Ezra and the Hindu-Arabic Problem. — A. Johnson : The Theory of similar Figures. — W. H. Metzler : Note on a certain Class of Determinants. — W. H. Rœver : Descriptive Geometry and its Merits as a Collegiate as well as an Engineering Subject. — E. B. Stouffer : Geometry

for Juniors and Seniors. — F. Cajori : Origin on the Name « Mathematical Induction ». — N. Altshiller : On the I-Centers of a Triangle. — K. P. Williams : Note on continuous Functions. — E. W. Chittenden : Note on Functions which Approach a Limit at every Point of an Interval. — H. N. Wright : The Nine-Point Circle Obtained by Methods of Projective Geometry. — G. A. Miller : Definition of the Discriminant of a rational Integral Function of one Variable. — F. Cajori : What is the Origine of the Name « Rolle's Curve » ? — E. B. Wilson : The Mathematics of Aerodynamics. — W. H. Bussey : Fermat's Method of Infinite Descent. — J. Nyberg : The Exponential and Logarithmic Functions. — Th. Muir : Note on Lagrange's Like-Producing Quadrinomial. — G. A. Miller : Mathematical Encyclopedic Dictionary. — E. L. Dodd : Fundamentals in the Mathematics of Investment. — E. J. Moulton : The Content of a Second Course in Calculus. — G. N. Bauer and H. L. Slobin : A System of Algebraic and Transcendental Equations. — H. T. Burgess : Practical Solution of Linear Equations.

Bulletin of the American Mathematical Society. — Volume XXV, 1918-19, Nos 1 à 5. — W. B. Ford : A Conspectus of the Modern Theory of Divergent Series. — G. A. Bliss : Solutions of Differential Equations as Functions of the Constants of Integration. — R. M. Winger : Involutions on the Rational Cubic. — J. E. Rowe : Related Invariants of two Rational Sextics. — E. R. Hedrick : In Memoriam : Ellery William Davis. — E. W. Chittenden : On the Heine-Borel Property in the Theory of Abstract Sets. — P. J. Daniell : Integrals around General Boundaries. — G. A. Miller : Determinant Groups. — C. L. E. Moore : Translations Surfaces in Hyperspace. — J. H. Weawer : Some Algebraic Curves. — M. F. Curtis : On the Rectifiability of Twisted Cubic. — R. D. Carmichael : General Aspects of the Theory of Summable Series. — Tsukuichi Hayashi : On the Problem of the Resistance Integral — R. C. Archibald : Note on Editions of von-Staudt's Geometrie der Lage. — H. Hancock : On the Evaluation of the Elliptic Transcendants η_2 and η_2'. — A. Emch : On Plane Algebraic Curves with Given System of Foci. — D. M. Y. Sommerville : Quadratic Systems of Circles in Non-Euclidean Geometry. — R. L. Moore : Continuous Sets that have no Continuous Sets of Condensation. — M. B. Porter : Derivatliveless Continuous Functions. — G. D. Birkhoff : The Scientific Work of Maxime Bôcher. — W. F. Osgood : On a Theorem of Oscillation. — Mr. H. S. Vandiver : Proof of a Property of the Norm of a Cyclotomic Integer. — J. K. Whittemore : Trajectories and Flat Points on Ruled Surfaces.

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. — 2e semestre 1918. — *1er juillet.* — J. Andrade : Sur une famille de déplacements et sur une généralisation du dièdre. — P. Humbert : Sur deux polynomes associés aux polynomes de Legendre. — *8 juillet.* — A. Bigourdan : La vie et les travaux de Ch Wolf. — G Humbert : Sur les représentations d'un entier par des formes quadratiques ternaires, indéfinies. — *16 juillet.* — E. Vessiot : Sur les développements trigonométriques de la mécanique céleste. — *29 juillet.* — G. Humbert : Sur les formes quadratiques ternaires indéfinies. — *19 août.* — R. de Montessus de Ballore : Sur les courbes algébriques planes ayant des points multiples communs. — *26 août.* — P. Appell : Sur l'intégration des équations différentielles simultanées que vérifie le poly-

nome $U_{m,n}$ d'Hermite. — M. Plancherel : Sur l'unicité du développement d'une fonction en série de polynomes de Legendre. — *2 septembre.* — E. Cartan : Sur les variétés à trois dimensions. — *9 sept.* — A. Denjoy : Démonstration de la propriété fondamentale des courbes de M. Jordan. — *16 sept.* — Emile Picard : Quelques remarques sur la décomposition des facteurs et le prolongement des fonctions analytiques. — Paul Appell : Sur des équations linéaires simultanées aux dérivées partielles et sur des cas de réduction des fonctions hypergéométriques de deux variables. — E. Cartan : Sur les variétés développables à trois dimensions. — Pierre Humbert : Les fonctions électrosphériques sous forme de déterminants. — *23 sept.* — J. Scorza : Sur les fonctions abéliennes à trois variables indépendantes. — E. Cartan : Sur les variétés de Beltrami à trois dimensions. — P. Appell : Sur une équation différentielle ordinaire liée à certains systèmes d'équations linéaires et homogènes aux dérivées partielles. — *7 octobre.* — J. Kampe de Feriet : Sur les systèmes d'équations aux dérivées partielles vérifiées par les polynomes hypersphériques. — P. Humbert : Sur les équations aux dérivées partielles vérifiées par les polynomes d'Hermite, déduits d'une exponentielle. — *14 oct.* — E. Goursat : Sur le problème de Bäcklund. — E. Cartan : Sur les variétés de Riemann à trois dimensions. — *21 oct.* — P. Appell : Addition à la note : « Sur une équation différentielle ordinaire liée à certains systèmes linéaires et homogènes aux dérivées partielles ». — *28 oct.* — G. Giraud : Sur le rattachement à la théorie des fonctions hyperabéliennes d'une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre, avec généralisation à un nombre quelconque de variables. — A. Angelesco : Sur l'approximation simultanée de plusieurs intégrales définies. — Riquier : Sur une propriété des fonctions analytiques d'un nombre quelconque de variables imaginaires. — *4 novembre.* — E. Gau : Sur les caractéristiques des équations aux dérivées partielles du second ordre. — *18 nov.* — J. Drach : Sur les groupes complexes de rationalité et sur l'intégration par quadratures. — T. Lalesco : Sur les fonctions polygonales périodiques. — R. Garnier : Solution élémentaire du problème de l'inversion des fonctions elliptiques. — R. Goormaghtigh : Généralisation des théorèmes de Jamet sur la courbure des courbes triangulaires, des courbes et des surfaces tétraédrales symétriques. — *25 nov.* — M. Petrovitch : Détermination spectrale des fonctions. — P. Humbert : Sur les surfaces de Poincaré d'ordre 6. — *9 décembre.* — J. Drach : Intégration d'une équation aux dérivées partielles de la dynamique des fluides. — A. Buhl : Sur l'extension aux intégrales multiples, du théorème concernant l'échange de l'amplitude et des paramètres dans les intégrales hyperelliptiques. — A. Lambert : Sur certains polynomes se rattachant aux coefficients de Laplace. — *23 déc.* — C. Guichard : Sur une série de surfaces à courbure totale constante telles que leurs lignes de courbure forment un réseau du type $pA' - qB'$. — P. Fatou : Sur les suites de fonctions analytiques. — G. Julia : Sur les surfaces définies par une propriété cinématique. — *30 déc.* — E. Vessiot : Sur un invariant intégral de l'hydrodynamique et son application à la théorie de la relativité générale.

Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. 27. Band, 1918. L. Heffter : Analyse und Synthese in der Geometrie. — E. Kruppa : Verallgemeinerungen des Pohlkeschen Satzes. — J. v. Sz. Nagy : Ueber algebraische Gleichungen mit lauter reellen Wurzeln. — Id. : Ueber geometrische

Relationen zwischen den Wurzeln einer algebraischen Gleichung und ihrer Derivierten. — J. Horn : Ueber nichtlineare Integralgleichungen von Volterraschen Typus. — G. Kowalewski : Ein funktionentheoretischer Satz Jacobis. — A. Hurwitz : Zu Grassmanns Note : « Lösung der Gleichung $x^3 + y^3 + z^3 + u^3 = 0$ in ganzen Zahlen ». — Fr. Meyer : Ein grundlegender Satz von Poncelet über die Brennpunkte von Kegelschnitten und seine Ausdehnung auf kubische Raumkurven. — R. v. Mises : Ueber Kurven gleichmässigster Krümmung. — L. v. Bortkiewicz : Der mittlere Fehler des zum Quadrat erhobenen Divergenzkoeffizienten. — Robert König : Neue Beiträge zur Charakterisierung der Riemannschen Transzendenten. — P. Stäckel : Grenzübergänge in der Krümmungslehre. — W. Blaschke : Mittelwertsätze der Potentialtheorie. — G. Kowalewski : Bemerkung zu meinem Aufsatz über einen funktionentheoretischen Satz Jacobis. — C. Kostka : Determinanten und symmetrische Funktionen. — R. Sturm : Ausgezeichnete Elemente projektiver Gebilde, die ineinander liegen, und Folgerungen für die Homologien. — Id. : Herstellung von Polaren. — M. Pasch : Die Mehrdeutigkeit von Integralen. — Id. : Ueber die Bedingung der Integrierbarkeit. — L. v. Schrutka : Ueber die Anordnung von vier Punkten einer Geraden. — H. Hahn : Ueber die Vertauschbarkeit der Differentiationsfolge. — A. Loewy : Inwieweit kann Vandermonde als Vorgänger von Gauss bezüglich der algebraischen Auflösung der Kreisteilungsgleichungen $x^n = 1$ angesehen werden? — A. Voss : Gaston Darboux. — F. Klein : Festrede zum 20. Stiftungstage der Göttinger Vereinigung zur Förderung der Angewandten Physik und Mathematik. — M. Pasch : Die Forderung der Entscheidbarkeit. — Id. : Ueber die Erweiterung des Grenzbegriffs. — Wilhelm Blaschke : Ueber Kurven gleichmässigster Krümmung. — R. v. Mises : Bemerkung zu : Ueber Kurven gleichmässigster Krümmung. — Angelegenheiten der Deutschen Mathematiker-Vereinigung. — Mitteilungen und Nachrichten. — Literarisches.

Mathematics Teacher (The). Published Quarterly by the Association of Teachers of Mathematics in the middle States and Maryland. Editor : W. H. Metzler, Syracuse University, Syracuse, N. Y. — Volume X : Editorial. — E. C Moore : Does the Study of Mathematics Train the Mind Specifically or Universally ? — Percey F. Smith : Collegiate Mathematics in Relation to the Changed Proposed in the Secondary School Course. — Elizabeth B. Cowley : Comprehensive Examinations. — J. Malcolm Bird : The Mathematics of Warfare. — W. Betz : The Teaching of Mathematics in the Junior High-School. — C. B. Walsh : A Tentative Program of Junior High-School Mathematics. — H. E. Webb : Conditions Which Have Led to the Establishment of Junior High-Schools. — L. Northwood : Junior High-School Mathematics im Trenton. — E. G. White : A Connection Between Algebra and Life. Suggestions by the Commissioner of Education. — J. H. Shipley : How Can We Minimize the Effect of Examinations on Secondary Education ? — R. E. Bruce : Graphs of Explicit Functions. Are Your Teachers Aids or Hindrances to School Progress ? — Robert R. Goff : An Outline of Plane Geometry as Used in the Durfee High-School. — G G. Chambers : Some Applications of Mathematics to Educational Statistics. — W. Wiener : The Place of Arithmetic in the High-School Curriculum. — D. E. Smith : Vocational Courses in Mathematics for Secondary Schools. — W. H. Dooley ; Practical Mathematics for High Schools. — E. F. Johnson : Is the Present Entrance Requi-

rement in Algebra Excessive in Amount? Does it Expect too Great Maturity of the Student? — D. C. McMurtrie : The Duty of the Employer in the Reconstruction of the Crippled Soldier. — L. M. Webster : Mathematics on Financial Problems.

Nouvelles Annales de Mathématiques. Quatrième série, tome XVIII. 1918. — G. Fontené : Nouvelles identités. — R. Alezais : Sur le système de *n* équations du second degré. — Auric : Contribution à la résolution géométrique de l'équation du troisième degré. — G. Fontené : Conditions de fermeture d'une suite de cercles. — Id. : Sur les cercles de Pappus. Formule de Pappus, Formule de Schubert généralisée. — P. B. Pomey : Intégration de l'équation différentielle linéaire à coefficients constants. — L. G. Du Pasquier : Sur les nombres complexes de deuxième et de troisième espèce. — E. Jablonski : Sur la distribution des nombres premiers absolus. — E. Turrière : Au sujet d'un article de M. A. Gérardin. — T. Hayashi : Le produit de cinq nombres entiers consécutifs n'est pas le carré d'un nombre entier. — E. Maillet : Sur une catégorie d'équations indéterminées n'ayant en nombres entiers qu'un nombre fini de solutions. — J. Bouchary : Analogies entre le triangle et le quadrilatère. — R. Goormaghtigh : Sur l'orthopôle et certains limaçons de Pascal associés au triangle. — Id. : Sur deux points d'un triangle et sur une généralisation des points de Brocard. — V. Thebault : Deux théorèmes de MM. Lemoyne et Fontené sur l'orthopôle. — Id. : Note sur les triangles isologiques. — N. Agronomof : Extension d'un théorème de M. S. Oüe. — F. Balitrand : Sur la condition pour que les tangentes aux pieds des normales issues d'un point à une ellipse touchent un cercle. — J. Lemaire : Démonstration géométrique d'une propriété des coniques. — J. Bouchary : Sur les cercles bitangents à la parabole. — P. Appell : Groupes de points sur l'hyperbole équilatère; exercice proposé. — R. Goormaghtigh : Sur un problème concernant des groupes de points sur l'hyperbole équilatère. — M. Weill : Propriétés des coniques et des quadriques. — R. Goormaghtigh : Sur les faisceaux de coniques. — R. Bricard : Sur une propriété caractéristique des coniques homofocales. — Id. : Sur les systèmes linéaires tangentiels de coniques. — H. Lebesgue : Sur deux théorèmes de Mannheim et de M. R. Bricard concernant les lignes de courbure et les lignes géodésiques des quadriques. — R. Bouvaist : Sur les courbes algébriques planes. — C. H. Sisam : Sur l'ordre des surfaces engendrées par courbes d'un ordre donné. — M. Weill : Théorèmes généraux sur des systèmes de courbes et de points. — R. Goormaghtigh : Sur les troisième et quatrième centres de courbure des courbes de Cesaro. — J. Juhel-Renoy : Sur les foyers des courbes planes. — P. Appell : Sur les foyers rationnels d'une courbe algébrique plane ou gauche. — J. Lemaire : Sur l'hypocycloïde à trois rebroussements. — F. Balitrand : Note sur les cubiques circulaires. — A. Myller : Surfaces parallèles aux surfaces cyclides. — R. Bouvaist : Note de géométrie infinitésimale. — M. Weill : Quelques applications géométriques de la théorie des infiniment petits. — R. Bouvaist : Sur deux propositions de Ribaucour (questions 858, 859). — R. Goormaghtigh : Sur l'affinité imaginaire. — F. Balitrand : Relations entre les rayons de courbure de deux courbes affines. — J. Arnovlievitch : Sur les théorèmes des projections et des moments des quantités de mouvement. — Questions d'examens et de concours. — Correspondance. — Nécrologie. — Bibliographie. — Questions proposées. — Solutions de questions proposées.

La Revue de l'enseignement des sciences, 12e année. Janvier-Octobre 1918. — H. Lebesgue : Sur une question de minimum. — N. B. : Sur le tronc de pyramide triangulaire. — G. Fontené : Sur un problème de la division des arcs par 2. — C. Lapointe : Ligne des points doubles de la projection de l'intersection de deux quadriques. — M. Juhel-Renoy : Sur les polyèdres réguliers. — R. Massard : Des différents systèmes de numération. Propriétés des nombres dans ces divers systèmes. — B. Niewenglowski : Note sur la géométrie du compas. — G. Fontené : Questions de langage. — M. D'ocagne : Sur les éléments fondamentaux de la géométrie descriptive. — J. Lemaire : Sur le mouvement d'une droite. — Ch. Michel : Sur les séries de Bertrand. — J. Juhel-Renoy : Sur la projection d'un vecteur. — B. Niewenglowski : Classement des racines de deux équations du second degré. — Ch. Meinrath : Une nouvelle identité générale. — A. Decerf : L'épreuve écrite de mathématiques à la première partie du baccalauréat. — J. Juhel-Renoy : Sur la géométrie descriptive. — J. Lemaire : Projection orthogonale d'un cercle. — F. Meyer : Sur une transformation de contact. — R. Bérard : Sur la construction du centre de courbure de certaines courbes. — C. A. Laisant : Fractions arithmétiques et triangles héroniens. — J. Lemaire : Sur le mouvement des aiguilles d'une montre. — Ch. Michel : Sur la fonction e^x. — J. Juhel-Renoy : Composition des vecteurs parallèles. — G. Bouligand : Le cas singulier des fonctions implicites et les enveloppes dans le plan. — Ch. Bioche : Sur le dessin géométrique. — G. Lapointe : Sur le deuxième principe fondamental de la méthode infinitésimale. — Ch. Michel : Notes de géométrie analytique.

Zeitschrift für Mathematischen und Naturwissenschaftlichen Unterricht aller Schulgattungen, 49. Jahrgang. — C. Andriessen : Der Taylorsche Lehrsatz im Unterricht. — W. Brunner : Zum Nachweis der Zentrifugalkraft der Erddrehung. — W. Dieck : Die Entwicklung des Satzes vom vollständigen Vierseit und Viereck zu einem Grundpfeiler des natürlichen Systems der Geometrie. — K. Doehlemann : Nochmals die Hessesche Normalform. — H. Dörrie : Eine Ergänzung der Archimedischen Kreismessung. — W. Finke : Ueber Rechenmaschinen und Rechenunterricht (Ein Beitrag zu einer Reform der Methodik und Schematik auf kinematischer Grundlage). — E. Haentzschel : Bemerkungen zu den vorstehenden Zusätzen des Herrn E. Lampe (siehe Lampe). — Id. : Das Bilden von kubischen Gleichungen mit vorgeschriebenen Eigenschaften. — C. Ibrügger : Ueber den Zusammenhang der Heronischen Inhaltsformel mit einigen Gleichungen der Kegelschnitte. — O. Knopf : Das « Petersburger Problem » der Wahrscheinlichkeitsrechnung. — K. Kommerell : Elementargeometrische Behandlung der Dupinschen Zyklide. — E. Lampe : Ergänzende Zusätze zu der Arbeit von Herrn Haentzschel « Eine von Newton gestellte Aufgabe über Sehnenvierecke ». — R. Lohnstein : Die Siebenzehn-Teilung des Kreises in elementargeometrischer Herleitung. — W. Lorey : Ueber isoperimetrische Probleme in der Schule und in der Forschung. — P. Luckey : Schulnomogramme. — R. Mehmke : Ueber Krümmungen verschiedener Ordnung. — H. Pfaff : Ueber harmonische Kegelschnitte. — F. Redl : Eine für Ellipse und Hyperbel gleichlautende Achsenkonstruktion. — C. Schoy : Elementare Theorie der ebenen Sonnenuhren nebst einigen speziellen Bemerkungen zur Gnomonik der Araber. — H. Schumacher : Vermessungskunde im Trigonometrieunterricht. — E. Staiger geb. Klein : Ueber die Anwendung beweglicher

Figuren im geometrischen Unterricht. — R. Sturm : Ueber die Flächenwinkel einer dreiseitigen Ecke. — W. Weber : Zur stetigen Teilung und zum Fünfeck. — H. Wieleitner : Die Anfänge der analytischen Raumgeometrie. — A. Witting : Zur Ortsbestimmung eines Fesselballons. — K. Wolletz : Berechnung der Einmal-Prämie für eine « unterjährige » Leibrente. — H. Wolff : Ueber eine algebraische Behandlungsweise des regulären Siebzehnecks.

2. Livres nouveaux :

W. Ahrens. — **Mathematische Spiele.** (Aus Natur und Geisteswelt). — 1 vol. in-16, cart., 121 p.; 1 M. 60; B.-G. Teubner, Leipzig.

G. Bouligand. — **Cours de Géométrie analytique.** — 1 vol. in-8°, 421 p.; 10 fr.; Vuibert, Paris.

C. Burali-Forti. — **Logica Matematica.** (Manuali Hœpli). — 1 vol. in-16, 483 p.; 9 L. 50; Hœpli, Milan.

M. F.-C. Clapier. — **Sur les surfaces minima ou élassoïdes.** (Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris.) — 1 fasc. in-4°, 62 p.; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

K. Dœhlemann. — **Grundzüge der Perspektive nebst Anwendungen.** (Aus Natur und Geisteswelt). — 1 vol. in-16, cart., 105 p.; 1 M. 60; B.-G. Teubner, Leipzig.

De Calembert. — **Nouvelles méthodes de résolution des Equations du 3e degré.** (Compléments d'Algèbre). — 1 vol. p. in-8°, 22 p.; Vuibert, Paris.

C. Karpinski. — **Four-Place Logarithmic and Trigonometric Tables,** together with Interest Tables. — 1 fasc. in-16, 30 p.; 30 cent.; G. Wahr, Ann Arbor, Michigan.

E. Löffler. — **Ziffern und Ziffernsysteme.** I. Teil : *Die Zahlzeichen der alten Kulturvölker.* II. Teil : *Die Zahlzeichen im Mittelalter und in der Neuzeit.* — 2 vol. in-16, 52 et 59 p., cart.; 1 M. 60 le volume; B.-G. Teubner, Leipzig.

O. Mautz. — **Zur Basisbestimmung der Napierschen und Bürgischen Logarithmen.** — 1 fasc. in-8°, 49 p.; Kreis & Co., Bâle.

Michel Petrovitch. — **Les spectres numériques,** avec une préface de M. Emile Borel. — 1 vol. in-8°, 107 p.; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

A. N. Whitehead. — **The Principles of natural Knowledge.** — 1 vol. in-8°, XII-200 p.; 12 sh. 6; Cambridge University Press, C. F. Clay, Londres.

ERRATA

Tome XX. N° 3. P. 190, 2me ligne, lire : un rayon *double*.
P. 191, 5me ligne, omettre (respectivement A et A).
N° 4. P. 308, supprimer la notice relative à M. Zeuthen. (Voir Chronique, p.).

SUR L'ÉLIMINATION ALGÉBRIQUE

PAR

Ch. Riquier (Caen).

Le présent travail a pour objet la recherche des conditions nécessaires et suffisantes pour que n équations algébriques, à l'inconnue x, admettent quelque racine commune : dans la première partie, on étudie le cas fondamental de deux formes algébriques binaires, et on rappelle à ce sujet la méthode indiquée par Euler; on y ramène ensuite, dans la deuxième partie, le cas général, en exprimant que l'une des n équations données présente quelque racine commune avec toute combinaison linéaire des équations restantes.

Première Partie.

Condition pour que deux formes algébriques binaires admettent quelque racine commune.

1. — On donne le nom de *forme algébrique* à un polynôme entier et homogène dépendant d'un nombre quelconque de variables; le cas d'une seule variable, n'étant d'aucune utilité, est systématiquement exclu, et la forme est dite

binaire, ternaire, quaternaire, ..., suivant qu'elle dépend de 2, 3, 4, ... variables.

L'adoption, pour les équations algébriques entières à une inconnue, de l'écriture homogène, dont nous ferons constamment usage dans cette première partie, repose sur l'observation suivante :

Nous plaçant, comme l'exige essentiellement le sujet de notre étude, dans le monde des quantités imaginaires, considérons tous les couples de valeurs *non simultanément nulles* qu'il est possible d'attribuer aux deux indéterminées x, y : ces divers couples peuvent manifestement se partager (sans omission ni répétition) en une infinité de groupes, comprenant chacun une infinité de couples, et tels que deux couples quelconques pris dans un même groupe forment un déterminant nul, tandis que deux couples respectivement pris dans deux groupes différents forment un déterminant différent de zéro. Dans un même groupe, l'expression générale des couples, si l'on désigne par (x', y') l'un quelconque d'entre eux et par α un facteur arbitraire assujetti à la seule restriction de n'être pas nul, est donnée par les formules

$$x = \alpha x' , \qquad y = \alpha y' \text{ [1]} ;$$

en substituant ces valeurs dans une forme binaire de degré m, $F(x, y)$, on a la relation

$$F(\alpha x', \alpha y') = \alpha^m F(x', y') ,$$

en sorte que, si quelqu'un des couples faisant partie du groupe considéré est une solution de l'équation $F(x, y) = 0$, tous les autres couples du même groupe jouissent de la même propriété : le groupe dont il s'agit est alors un *groupe-racine de l'équation* $F(x, y) = 0$, ou, plus simplement, une *racine* de cette équation, ou bien encore une *racine de la forme binaire* $F(x, y)$.

Une forme de degré nul se réduit à une simple constante.

---

[1] Le groupe se désigne d'habitude, abstraction faite du facteur arbitraire qui figure dans son expression générale, par l'un quelconque des couples dont il se compose.

Si l'on convient de ne pas considérer comme distinctes deux formes ne différant que par un facteur constant non nul, *une forme binaire de degré* m *dont les coefficients ne sont pas tous nuls est décomposable, et d'une seule manière, en un produit de* m *formes binaires du premier degré dont aucune n'a ses deux coefficients nuls à la fois;* les racines de ces dernières fournissent évidemment celles de la forme proposée.

Etant donnée une forme binaire $F(x, y)$, on dit qu'elle admet la racine (x', y') au *degré* p *de multiplicité*, ou bien encore qu'elle admet p *fois* la racine (x', y'), lorsqu'elle est algébriquement divisible par

$$\begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}^{p} \quad \text{sans l'être par} \quad \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix}^{p+1}.$$

Il résulte du théorème précédent qu'*une forme binaire de degré* m *dont les coefficients ne sont pas tous nuls admet un nombre limité de racines*, et que *la somme des degrés de multiplicité de ces racines est exactement égale à* m ; ce qu'on exprime souvent en disant qu'*elle admet exactement* m *racines, distinctes ou non.*

En conséquence, *si une forme binaire de degré* m *admet plus de* m *racines distinctes, elle a nécessairement tous ses coefficients nuls.*

Lorsqu'une forme binaire prend la valeur zéro pour toutes valeurs attribuées à ses deux variables x, y, on dit qu'elle est *identiquement nulle.* Cela étant :

1° *Pour qu'une forme binaire soit identiquement nulle, il faut et il suffit que ses coefficients soient tous nuls.*

La condition posée est évidemment suffisante, et sa nécessité résulte de la remarque formulée en dernier lieu.

2° *Pour qu'un produit de formes binaires soit identiquement nul, il faut et il suffit que quelqu'un des facteurs le soit.*

La condition posée, évidemment suffisante, est d'ailleurs nécessaire.

En effet, si le produit est identiquement nul, il s'annule pour une infinité de couples de valeurs de x, y formant

deux à deux des déterminants différents de zéro, d'où résulte, puisque le nombre des facteurs est limité, que quelqu'un d'entre eux jouit de la même propriété : le facteur en question, admettant, d'après cela, plus de racines distinctes qu'il n'y a d'unités dans son degré, ne peut manquer d'avoir tous ses coefficients nuls, et, par suite, d'être identiquement nul.

Nous terminerons ce bref rappel de propriétés connues par l'observation suivante :

Lorsqu'une forme binaire de degré m a tous ses coefficients nuls, elle est algébriquement divisible par une puissance aussi élevée qu'on le voudra de toute forme binaire du premier degré n'ayant pas ses deux coefficients nuls à la fois; on peut donc dire, en pareil cas, qu'elle admet telle racine que l'on voudra à un degré de multiplicité infini, ou bien encore qu'*elle admet une infinité de fois telle racine que l'on voudra.*

2. — Soient

$$\left.\begin{aligned} A(x, y) &= A_0 x^a + A_1 x^{a-1} y + A_2 x^{a-2} y^2 + \ldots + A_{a-1} x y^{a-1} + A_a y^a, \\ B(x, y) &= B_0 x^b + B_1 x^{b-1} y + B_2 x^{b-2} y^2 + \ldots + B_{b-1} x y^{b-1} + B_b y^b, \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

deux formes binaires, dont les degrés respectifs, a, b, sont tous deux *supérieurs à zéro*, et dont *aucune n'est identiquement nulle :* on observera que, dans les notations adoptées pour ces formes, l'indice dont se trouve affecté le coefficient de chaque terme est égal à l'exposant de la variable y dans le terme considéré ; cette convention, à laquelle nous nous conformerons constamment dans l'exposé de la première partie, permet de formuler commodément une importante propriété qui sera établie plus loin (N° 4).

Proposons-nous actuellement de déterminer deux formes inconnues, de degrés respectifs $a - 1$, $b - 1$,

$$\left.\begin{aligned} F_A(x, y) &= \alpha_0 x^{a-1} + \alpha_1 x^{a-2} y + \ldots + \alpha_{a-1} y^{a-1}, \\ F_B(x, y) &= \beta_0 x^{b-1} + \beta_1 x^{b-2} y + \ldots + \beta_{b-1} y^{b-1}, \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

par la double condition *de n'être pas toutes deux identique-*

ment nulles, et de rendre identiquement nulle la forme composée

$$A(x, y)F_B(x, y) + B(x, y)F_A(x, y) , \qquad (3)$$

de degré $a + b - 1$.

Cela étant, *pour que les formes* (1) *admettent quelque racine commune, il faut et il suffit que le problème posé sur l'expression* (3) *soit possible.*

I. *La condition posée est nécessaire.*

Effectivement, si les formes (1) admettent quelque facteur linéaire commun, elles satisfont aux identités

$$A(x, y) = (H_0 x + H_1 y)Q_A(x, y) ,$$
$$B(x, y) = (H_0 x + H_1 y)Q_B(x, y) ,$$

où H_0, H_1 désignent deux constantes non à la fois nulles, et $Q_A(x, y)$, $Q_B(x, y)$ deux formes de degrés respectifs $a - 1$, $b - 1$, dont aucune n'est identiquement nulle. L'identité qu'il s'agit de vérifier prend donc la forme

$$(H_0 x + H_1 y)Q_A(x, y)F_B(x, y) + (H_0 x + H_1 y)Q_B(x, y)F_A(x, y) = 0 ,$$

et l'on y satisfera évidemment en prenant

$$F_A(x, y) = Q_A(x, y) , \qquad F_B(x, y) = -Q_B(x, y) .$$

II. *La condition posée est suffisante.*

Tout d'abord, aucune des deux formes (2), non à la fois identiquement nulles, qui, en raison de la possibilité supposée du problème, rendent l'expression (3) identiquement nulle, ne peut, si on l'envisage séparément, être identiquement nulle : car si $F_A(x, y)$, par exemple, l'était, le produit $A(x, y)F_B(x, y)$ le serait aussi, et par suite (N° 1), puisque $A(x, y)$ ne l'est pas, $F_B(x, y)$. Cela étant, l'identité

$$A(x, y)F_B(x, y) = -B(x, y)F_A(x, y)$$

montre que $A(x, y)$ divise le produit $B(x, y)F_A(x, y)$; il en résulte, puisque $A(x, y)$ est d'un degré supérieur à $F_A(x, y)$, qu'il a quelque facteur linéaire commun avec $B(x, y)$.

3. — En écrivant les relations auxquelles doivent satisfaire les $a + b$ coefficients inconnus

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{a-1},$$
$$\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{b-1}$$

pour que l'expression (3), de degré $a + b - 1$, soit identiquement nulle, on est conduit à poser, entre ces $a + b$ inconnues, un système, Σ, de $a + b$ équations linéaires et homogènes. Ainsi qu'il est facile de le constater, le déterminant, d'ordre $a + b$, qui a pour éléments les coefficients de ce système ne contient, dans a de ses colonnes, que des coefficients B et des zéros, et, dans les b colonnes restantes, que des coefficients A et des zéros ; il est donc homogène et de degré a par rapport aux B, homogène et de degré b par rapport aux A, et par suite, si l'on suppose $a > 0$, $b > 0$, homogène et de degré *supérieur à zéro* par rapport aux coefficients de l'une quelconque des deux formes (1) : on lui a donné le nom de *résultant*.

Cela étant, et *en supposant qu'aucune des deux formes* (1) *ne soit de degré zéro, il faut et il suffit, pour que ces deux formes admettent quelque racine commune, que leur résultant soit nul.*

I. Supposons d'abord qu'aucune des deux formes (1) ne soit identiquement nulle.

Pour qu'elles admettent quelque racine commune, il est, en pareil cas, nécessaire et suffisant que le problème posé plus haut (N° 2) sur l'expression (3) soit possible, c'est-à-dire que le système Σ admette quelque solution où ses inconnues ne soient pas toutes nulles : il est donc nécessaire et suffisant que le résultant des deux formes (1) soit nul.

II. Affranchissons-nous maintenant de toute restriction relative à la nullité identique éventuelle des formes (1).

Pour qu'elles admettent quelque racine commune, il est évidemment nécessaire et suffisant :

Ou bien que l'une au moins d'entre elles soit identiquement nulle ;

Ou bien que, aucune d'elles ne l'étant, leur résultant soit nul.

Or, ce résultant, étant, d'après une observation faite au début, homogène et de degré *supérieur à zéro* tant par rapport aux A que par rapport aux B, ne peut manquer de s'évanouir si quelqu'une des formes (1) est identiquement nulle.

La condition nécessaire et suffisante pour l'existence de quelque racine commune est donc bien celle que formule notre énoncé.

4. — Le résultant des deux formes (1), homogène et de degré b par rapport aux A, homogène et de degré a par rapport aux B, jouit en outre, par rapport à l'ensemble des coefficients A et et B, d'une intéressante propriété que nous allons établir : l'énoncé, ci-après formulé, de cette propriété suppose que l'on ait adopté, pour l'écriture des deux formes, la convention spécifiée au N° 2, c'est-à-dire que l'indice dont se trouve affecté le coefficient de chaque terme soit égal à l'exposant de la variable y dans le terme dont il s'agit.

Considérons, dans le développement du résultant, un terme quelconque

$$\varpi \times A_0^{u_0} A_1^{u_1} A_2^{u_2} \ldots A_a^{u_a} \times B_0^{v_0} B_1^{v_1} B_2^{v_2} \ldots B_b^{v_b}$$

$$(u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_a = b\,, \quad v_0 + v_1 + v_2 + \ldots + v_b = a) :$$

abstraction y étant faite du facteur numérique ϖ, nous nommerons *poids* de ce terme l'entier

$$(0.u_0 + 1.u_1 + 2.u_2 + \ldots + a.u_a) + (0.v_0 + 1.v_1 + 2.v_2 + \ldots + b.v_b)\,,$$

obtenu en effectuant, pour chacun des facteurs A, B qui concourent à sa formation, le produit de l'indice par l'exposant, et ajoutant ces divers produits.

Cela étant, la propriété annoncée consiste en ce que tous les termes du résultant ont le même poids ; on l'exprime en disant que *le résultant des deux formes* (1) *est isobare par rapport à l'ensemble de leurs coefficients.*

I. Le système Σ, dont la considération conduit au résultant des deux formes (1), s'obtient, comme nous l'avons vu (N° 3),

en écrivant que l'expression (3),

$$A(x, y)F_B(x, y) + B(x, y)F_A(x, y),$$

est identiquement nulle. Or, le développement et l'ordination des deux produits

$$\left.\begin{aligned}
A(x, y)F_B(x, y) &= (A_0 x^a + A_1 x^{a-1} y + A_2 x^{a-2} y^2 + \dots \\
&\qquad + A_{a-1} x y^{a-1} + A_a y^a) \\
&\quad \times (\beta_0 x^{b-1} + \beta_1 x^{b-2} y + \dots + \beta_{b-1} y^{b-1}), \\
B(x, y)F_A(x, y) &= (B_0 x^b + B_1 x^{b-1} y + B_2 x^{b-2} y^2 + \dots \\
&\qquad + B_{b-1} x y^{b-1} + B_b y^b) \\
&\quad \times (\alpha_0 x^{a-1} + \alpha_1 x^{a-2} y + \dots + \alpha_{a-1} y^{a-1}),
\end{aligned}\right\} \quad (4)$$

de degré $a + b - 1$, donne respectivement

$$\left.\begin{aligned}
& x^{a+b-1} (A_0 \beta_0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) \\
+ & x^{a+b-2} y (A_1 \beta_0 + A_0 \beta_1 \qquad\qquad\qquad\qquad) \\
+ & x^{a+b-3} y^2 (A_2 \beta_0 + A_1 \beta_1 + A_0 \beta_2 \qquad\qquad) \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ & x^{b-1} y^a (A_a \beta_0 + A_{a-1} \beta_1 + A_{a-2} \beta_2 + \dots \qquad) \\
+ & x^{b-2} y^{a+1} (\qquad A_a \beta_1 + A_{a-1} \beta_2 + \dots \qquad) \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ & y^{a+b-1} (\qquad\qquad\qquad\qquad A_a \beta_{b-1})
\end{aligned}\right\}$$

et

$$\left.\begin{aligned}
& x^{b+a-1} (B_0 \alpha_0 \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad) \\
+ & x^{b+a-2} y (B_1 \alpha_0 + B_0 \alpha_1 \qquad\qquad\qquad\qquad) \\
+ & x^{b+a-3} y^2 (B_2 \alpha_0 + B_1 \alpha_1 + B_0 \alpha_2 \qquad\qquad) \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ & x^{a-1} y^b (B_b \alpha_0 + B_{b-1} \alpha_1 + B_{b-2} \alpha_2 + \dots \qquad) \\
+ & x^{a-2} y^{b+1} (\qquad B_b \alpha_1 + B_{b-1} \alpha_2 + \dots \qquad) \\
& \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
+ & y^{b+a-1} (\qquad\qquad\qquad\qquad B_b \alpha_{a-1});
\end{aligned}\right\}$$

on en déduit respectivement les deux tableaux de coefficients

$$\left.\begin{array}{llll}
A_0 & & & \\
A_1 & A_0 & & \\
A_2 & A_1 & A_0 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
A_a & A_{a-1} & A_{a-2} & \cdots \\
 & A_a & A_{a-1} & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & A_a
\end{array}\right\} \qquad (5)$$

et

$$\left.\begin{array}{llll}
B_0 & & & \\
B_1 & B_0 & & \\
B_2 & B_1 & B_0 & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
B_b & B_{b-1} & B_{b-2} & \cdots \\
 & B_b & B_{b-1} & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & B_b\,.
\end{array}\right\} \qquad (6)$$

où les zéros n'ont pas été mis en évidence, et dont la simple juxtaposition (l'un à droite, l'autre à gauche) donne le résultant. Chacun des tableaux (5), (6) contient $a + b$ lignes, puisque les produits (4) sont de degré $a + b - 1$; le premier, celui des A, contient b colonnes, puisque les indéterminées β sont en nombre b ; le second, celui des B, contient a colonnes, puisque les indéterminées α sont en nombre a. Si l'on considère l'un d'eux, par exemple le tableau des A, à b colonnes, on voit immédiatement que, dans une colonne quelconque, deux éléments A ne contiennent entre eux aucun zéro, et que, lorsqu'on parcourt la colonne de haut en bas, le poids ou indice de ces éléments augmente progressivement de 1, d'une ligne à la suivante ; puis, de même, que, dans une ligne quelconque, deux éléments A ne contiennent entre eux aucun zéro, et que, lorsqu'on parcourt la ligne de gauche à droite, le poids ou indice de ces éléments décroît

l'indice des éléments A aille en croissant, au lieu de décroître, quand on suit, sur une ligne quelconque, le sens habituel de l'écriture, nous conviendrons désormais de renverser l'ordre des colonnes en conservant l'ordre des lignes. Nous conviendrons en outre, ce qui ne changera évidemment en rien les poids respectifs des divers termes du résultant, d'affecter chaque zéro d'un indice positif ou négatif choisi de telle sorte que, dans toute colonne parcourue de haut en bas sans y faire abstraction des zéros, l'indice des éléments successifs augmente progressivement de 1, d'une ligne à la suivante, et que, dans toute ligne parcourue de gauche à droite sans y faire non plus abstraction des zéros, la même propriété ait lieu, d'une colonne à la suivante. Ces diverses conventions étant adoptées et appliquées, si l'on remplace ensuite chaque élément du tableau par son indice, le tableau d'entiers algébriques qui en résulte,

$$\left.\begin{array}{llll}
-b+1 & -b+2 & \ldots -1 & 0 \\
-b+2 & -b+3 & \ldots\ 0 & 1 \\
-b+3 & -b+4 & \ldots\ 1 & 2 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
-b+a+1 & -b+a+2 & \ldots\ a-1 & a \\
-b+a+2 & -b+a+3 & \ldots\ a & a+1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a & a+1 & \ldots\ a+b-2 & a+b-1
\end{array}\right\},$$

présente une structure telle, que, dans toute colonne parcourue de haut en bas, comme aussi dans toute ligne parcourue de gauche à droite, les entiers croissent progressivement de 1. Et il va sans dire que si aux divers éléments entiers qui le constituent on ajoute, comme nous allons être conduit à le faire, un même entier algébrique, cette propriété subsistera.

Tout ce qui vient d'être dit au sujet du tableau des A [tableau (5)] est d'ailleurs entièrement applicable au tableau des B [tableau (6)].

II. Pour faire apparaître la nature isobare du résultant, lequel s'obtient, comme nous l'avons fait observer, par la

juxtaposition, schématiquement figurée ci-dessous, des deux tableaux partiels (5) et (6),

	a colonnes	b colonnes	
$a+b$ lignes	Tableau d'éléments B (et de zéros)	Tableau d'éléments A (et de zéros)	(7)

substituons respectivement aux deux tableaux partiels de (7) ceux que forment les indices de leurs éléments : nous aurons ainsi (I)

$$\left.\begin{array}{cccc|cccc}
-a+1 & -a+2 & \dots & 0 & -b+1 & -b+2 & \dots & 0 \\
-a+2 & -a+3 & \dots & 1 & -b+2 & -b+3 & \dots & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
b & b+1 & \dots & b+a-1 & a & a+1 & \dots & a+b-1
\end{array}\right\} \quad (8)$$

En augmentant alors de b unités chacun des entiers du tableau partiel de droite extrait de (8), nous aurons le nouveau tableau

$$\left.\begin{array}{cccc|cccc}
-a+1 & -a+2 & \dots & 0 & 1 & 2 & \dots & b \\
-a+2 & -a+3 & \dots & 1 & 2 & 3 & \dots & b+1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
b & b+1 & \dots & b+a-1 & a+b & a+b+1 & \dots & a+2b-1 \; ;
\end{array}\right\}$$

progressivement de 1, d'une colonne à la suivante : afin que ce dernier, dans son ensemble, présente la structure spéciale que présentait séparément chacun des deux tableaux partiels de (8), c'est-à-dire que, dans toute colonne parcourue de haut en bas, comme aussi dans toute ligne parcourue de gauche à droite, les entiers augmentent progressivement de 1. Il jouit donc manifestement de la propriété que $a + b$ de ses éléments, arbitrairement choisis sous la seule condition d'appartenir à $a + b$ lignes distinctes en même temps qu'à $a + b$ colonnes distinctes, ont pour somme

$$\begin{aligned} &(a + b)(-a + 1) \\ &+ 0 + 1 + 2 + \ldots + (a + b - 1) \\ &+ 0 + 1 + 2 + \ldots + (a + b - 1) , \end{aligned}$$

ou

$$(a + b)(-a + 1) + (a + b)(a + b - 1) ,$$

ou enfin

$$b(a + b) ;$$

il en résulte que, dans le tableau (8), la somme de $a + b$ éléments arbitrairement choisis sous la même condition a pour valeur $b(a + b) - b^2$, ou ab. En conséquence, dans le résultant (7), le poids de chaque terme a pour valeur ab ; ce résultant est donc bien, comme nous voulions l'établir, isobare par rapport à l'ensemble des coefficients A et B.

5. — L'énoncé de la propriété isobarique, qui fait l'objet du numéro précédent, suppose, comme nous l'avons dit, que l'on ait adopté, pour l'écriture des deux formes (1), la convention spécifiée au N° 2, c'est-à-dire que l'indice dont se trouve affecté le coefficient de chaque terme soit égal à l'exposant de y dans le terme dont il s'agit ; il va sans dire toutefois que *cette propriété peut se formuler de la même façon si l'on augmente d'un même entier* (algébrique) p *les indices respectifs des divers coefficients* A, *et d'un même entier* (algébrique) q *les indices respectifs des divers coefficients* B : car le poids de chaque terme du résultant se trouve alors augmenté de l'entier constant $bp + aq$.

6. — Exemples de la formation du résultant de deux formes binaires.

I. Résultant des deux formes

$$\left.\begin{array}{l} A_0 x + A_1 y \,, \\ B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2 \,. \end{array}\right\}$$

En écrivant que l'expression

$$(A_0 x + A_1 y)(\beta_0 x + \beta_1 y) + (B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2)\alpha_0$$

est identiquement nulle, on a les relations

$$\begin{aligned} A_0 \beta_0 \qquad\qquad + B_0 \alpha_0 &= 0 \,, \\ A_1 \beta_0 + A_0 \beta_1 + B_1 \alpha_0 &= 0 \,, \\ A_1 \beta_1 + B_2 \alpha_0 &= 0 \,, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour le résultant,

$$\begin{vmatrix} A_0 & 0 & B_0 \\ A_1 & A_0 & B_1 \\ 0 & A_1 & B_2 \end{vmatrix} \,,$$

ou

$$B_2 A_0^2 - A_1 (A_0 B_1 - B_0 A_1) \,.$$

II. Résultant des deux formes

$$\left.\begin{array}{l} A_0 x^2 + A_1 xy + A_2 y^2 \,, \\ B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2 \,. \end{array}\right\} \qquad (9)$$

En écrivant que l'expression

$$\begin{aligned} &(A_0 x^2 + A_1 xy + A_2 y^2)(\beta_0 x + \beta_1 y) \\ &+ (B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2)(\alpha_0 x + \alpha_1 y) \end{aligned}$$

est identiquement nulle, on a les relations

$$\begin{aligned} A_0 \beta_0 \qquad\qquad + B_0 \alpha_0 \qquad\qquad &= 0 \,, \\ A_1 \beta_0 + A_0 \beta_1 + B_1 \alpha_0 + B_0 \alpha_1 &= 0 \,, \\ A_2 \beta_0 + A_1 \beta_1 + B_2 \alpha_0 + B_1 \alpha_1 &= 0 \,, \\ A_2 \beta_1 \qquad\qquad + B_2 \alpha_1 &= 0 \,, \end{aligned}$$

ce qui donne, pour le résultant,

$$\begin{vmatrix} A_0 & 0 & B_0 & 0 \\ A_1 & A_0 & B_1 & B_0 \\ A_2 & A_1 & B_2 & B_1 \\ 0 & A_2 & 0 & B_2 \end{vmatrix} .$$

On peut, comme il est facile de s'en assurer en effectuant les calculs, le mettre sous les deux formes suivantes, très fréquemment usitées :

$$(A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - (A_0 B_1 - B_0 A_1)(A_1 B_2 - B_1 A_2) , \qquad (10)$$

et

$$[2(A_0 B_2 + B_0 A_2) - A_1 B_1]^2 - (A_1^2 - 4A_0 A_2)(B_1^2 - 4B_0 B_2)^{1} . \qquad (11)$$

III. Résultant des deux formes

$$\left.\begin{array}{l} A_0 x + A_1 y , \\ B_0 x^3 + 3B_1 x^2 y + 3B_2 xy^2 + B_3 y^3 . \end{array}\right\}$$

---

[1] L'une et l'autre se retrouvent très aisément à l'aide des calculs mnémotechniques que nous allons indiquer.

Calcul mnemotechnique de la formule (10).

Posant

$$A_0 x^2 + A_1 xy + A_2 y^2 = A(x, y) ,$$
$$B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2 = B(x, y) ,$$

on remplace le système des deux équations

$$A(x, y) = 0 , \qquad B(x, y) = 0$$

par le système des deux équations

$$A(x, y) = 0 , \quad \frac{B_0 A(x, y) - A_0 B(x, y)}{y} = 0 ,$$

dont la deuxième, linéaire en x et y, peut s'écrire

$$(A_0 B_1 - B_0 A_1) x + (A_0 B_2 - B_0 A_2) y = 0 ,$$

ou

$$\frac{x}{A_0 B_2 - B_0 A_2} = \frac{y}{-(A_0 B_1 - B_0 A_1)} :$$

en remplaçant, dans la première, x et y par les quantités proportionnelles que fournit la seconde, il vient, comme premier membre,

$$A_0 (A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - A_1 (A_0 B_2 - B_0 A_2)(A_0 B_1 - B_0 A_1) + A_2 (A_0 B_1 - B_0 A_1)^2 ,$$

ou

$$A_0 (A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - (A_0 B_1 - B_0 A_1)[A_1 (A_0 B_2 - B_0 A_2) - A_2 (A_0 B_1 - B_0 A_1)] .$$

ou

$$A_0 (A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - (A_0 B_1 - B_0 A_1) A_0 (A_1 B_2 - B_1 A_2) ,$$

ou enfin, après suppression du facteur A_0

$$(A_0 B_2 - B_0 A_2)^2 - (A_0 B_1 - B_0 A_1)(A_1 B_2 - B_1 A_2) .$$

Calcul mnémotechnique de la formule (11).

On résout chacune des équations quadratiques

$$A_0 x^2 + A_1 xy + A_2 y^2 = 0 ,$$
$$B_0 x^2 + B_1 xy + B_2 y^2 = 0$$

En écrivant que l'expression

$$(A_0 x + A_1 y)(\beta_0 x^2 + \beta_1 xy + \beta_2 y^2)$$
$$+ (B_0 x^3 + 3B_1 x^2 y + 3B_2 xy^2 + B_3 y^3)\alpha_0$$

est identiquement nulle, on a les relations

$$\begin{aligned} A_0\beta_0 \qquad\qquad\qquad\qquad &+ B_0\alpha_0 = 0 , \\ A_1\beta_0 + A_0\beta_1 \qquad\qquad &+ 3B_1\alpha_0 = 0 , \\ A_1\beta_1 + A_0\beta_2 &+ 3B_2\alpha_0 = 0 , \\ A_1\beta_2 &+ B_3\alpha_0 = 0 , \end{aligned}$$

ce qui donne, pour le résultant,

$$\begin{vmatrix} A_0 & 0 & 0 & B_0 \\ A_1 & A_0 & 0 & 3B_1 \\ 0 & A_1 & A_0 & 3B_2 \\ 0 & 0 & A_1 & B_3 \end{vmatrix} ,$$

ou

$$3A_0 A_1 (A_1 B_1 - A_0 B_2) + A_0^3 B_3 - A_1^3 B_0 .$$

---

par la formule élémentaire connue, on égale entre elles les deux expressions irrationnelles qui en résultent pour le rapport $\frac{x}{y}$, et on rend la relation rationnelle.

Si l'on pose $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$, cette suite d'opérations donnera d'abord (sans correspondance de signes)

$$\frac{-A_1 - \varepsilon\sqrt{A_1^2 - 4A_0 A_2}}{A_0} = \frac{-B_1 + \varepsilon'\sqrt{B_1^2 - 4B_0 B_2}}{B_0} ,$$

puis, en isolant la partie irrationnelle,

$$A_0 B_1 - B_0 A_1 = \varepsilon B_0\sqrt{A_1^2 - 4A_0 A_2} + \varepsilon' A_0\sqrt{B_1^2 - 4B_0 B_2} ,$$

puis, en élevant au carré,

$$(A_0 B_1 - B_0 A_1)^2 = B_0^2(A_1^2 - 4A_0 A_2) + A_0^2(B_1^2 - 4B_0 B_2)$$
$$+ 2\varepsilon\varepsilon' A_0 B_0\sqrt{A_1^2 - 4A_0 A_2}\sqrt{B_1^2 - 4B_0 B_2} ,$$

puis, en isolant de nouveau la partie irrationnelle, et réduisant,

$$2A_0 B_0 [2(A_0 B_2 + B_0 A_2) - A_1 B_1] = 2\varepsilon\varepsilon' A_0 B_0\sqrt{A_1^2 - 4A_0 A_2}\sqrt{B_1^2 - 4B_0 B_2} ,$$

puis, après suppression du facteur $2A_0 B_0$,

$$2(A_0 B_2 + B_0 A_2) - A_1 B_1 = \varepsilon\varepsilon'\sqrt{A_1^2 - 4A_0 A_2}\sqrt{B_1^2 - 4B_0 B_2} ,$$

puis enfin, par une nouvelle élévation au carré,

$$[2(A_0 B_2 + B_0 A_2) - A_1 B_1]^2 - (A_1^2 - 4A_0 A_2)(B_1^2 - 4B_0 B_2) = 0 ,$$

relation dont le premier membre est précisément l'expression (11).

IV. Résultant des deux formes

$$\left.\begin{array}{l} A_0 x^2 + 2A_1 xy + A_2 y^2 \,, \\ B_0 x^3 + 3B_1 x^2 y + 3B_2 xy^2 + B_3 y^3 \,. \end{array}\right\} \qquad (12)$$

En écrivant que l'expression

$$\begin{aligned} &(A_0 x^2 + 2A_1 xy + A_2 y^2)(\beta_0 x^2 + \beta_1 xy + \beta_2 y^2) \\ &+ (B_0 x^3 + 3B_1 x^2 y + 3B_2 xy^2 + B_3 y^3)(\alpha_0 x + \alpha_1 y) \end{aligned}$$

est identiquement nulle, on a les relations

$$\begin{array}{rrrrrl} A_0\beta_0 & & & & + B_0\alpha_0 & = 0 \,, \\ 2A_1\beta_0 & + A_0\beta_1 & & + 3B_1\alpha_0 & + B_0\alpha_1 & = 0 \,, \\ A_2\beta_0 & + 2A_1\beta_1 & + A_0\beta_2 & + 3B_2\alpha_0 & + 3B_1\alpha_1 & = 0 \,, \\ & A_2\beta_1 & + 2A_1\beta_2 & + B_3\alpha_0 & + 3B_2\alpha_1 & = 0 \,, \\ & & A_2\beta_2 & & + B_3\alpha_1 & = 0 \,, \end{array}$$

ce qui donne, pour le résultant, R, des deux formes (12),

$$\begin{vmatrix} A_0 & 0 & 0 & B_0 & 0 \\ 2A_1 & A_0 & 0 & 3B_1 & B_0 \\ A_2 & 2A_1 & A_0 & 3B_2 & 3B_1 \\ 0 & A_2 & 2A_1 & B_3 & 3B_2 \\ 0 & 0 & A_2 & 0 & B_3 \end{vmatrix}$$

Le produit $a_0 R$ peut, comme on le vérifiera en effectuant les calculs, se mettre sous la forme suivante, avantageuse dans certaines questions :

$$\left.\begin{array}{l} \left[A_0^2 B_3 + A_2(3A_0B_1 - 2B_0A_1) - A_1(3A_0B_2 - B_0A_2)\right]^2 \\ - (A_1^2 - A_0A_2)\left[(3A_0B_2 - B_0A_2)^2 - 4A_0B_3(3A_0B_1 - 2B_0A_1)\right]^{1} \end{array}\right\} \qquad (13)$$

---

[1] *Calcul mnémotechnique de la formule* (13).

Posant

$$\begin{aligned} A_0 x^2 + 2A_1 xy + A_2 y^2 &= A(x, y) \,, \\ B_0 x^3 + 3B_1 x^2 y + 3B_2 xy^2 + B_3 y^3 &= B(x, y) \,, \end{aligned}$$

on remplace le système des deux équations

$$A(x, y) = 0 \,, \qquad B(x, y) = 0$$

par le système des deux équations

$$A(x, y) = 0 \,, \qquad \frac{A_0 B(x, y) - B_0 x A(x, y)}{y} = 0 \,,$$

ou

$$\begin{aligned} A_0 x^2 + 2A_1 xy + A_2 y^2 &= 0 \,, \\ (3A_0B_1 - 2B_0A_1)x^2 + (3A_0B_2 - B_0A_2)xy + A_0B_3 y^2 &= 0 \,. \end{aligned}$$

Si, pour former le résultant des premiers membres de ces deux équations quadratiques, on applique la formule (11), on tombe immédiatement sur l'expression (13).

6bis. — La première partie de notre travail, dont nous venons d'achever l'exposé, avait pour but d'établir la condition nécessaire et suffisante pour que deux formes algébriques binaires, aux indéterminées x, y, admettent, conformément à la définition posée au n° 1, quelque racine commune : dans la deuxième partie, qui suivra prochainement, nous établirons, en nous appuyant sur ce résultat fondamental, les conditions nécessaires et suffisantes pour que, n équations algébriques entières, à l'inconnue x, étant données, il existe quelque valeur de cette inconnue les vérifiant toutes.

NOUVEAUX THÉORÈMES SUR LE VIRIEL DE FORCES ET LEURS APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES ET MÉCANIQUES

PAR

Farid BOULAD (au Caire).

CLAUSIUS a appelé *viriel de forces*, l'expression suivante : $V = Xx + Yy + Zz$ dans laquelle X, Y, Z désignent les projections d'une force AP liée[1] à un point A sur trois axes $Oxyz$ rectangulaires en un point O dit *pôle*, et x, y, z les coordonnées du point d'application de cette force par rapport à ces axes.

D'après cette expression, le viriel d'une force liée AP relativement à un pôle O, n'est autre que le travail effectué par cette force agissant toujours parallèlement à elle-même, si son point d'origine était déplacé du pôle O au point d'application A de cette force.

Cette même expression a été utilisée d'abord par CLAUSIUS

[1] M. APPELL a donné le nom d'une *force liée à un point*, à une force AP appliquée à un point A déterminé de l'espace. Nous adopterons cette dénomination dans tout ce qui suit.

et Yvon Villarceau dans leurs théorèmes sur la force vive d'un système matériel, et ensuite introduite sous une autre forme par M. F. Lucas, dans la théorie du mouvement vibratoire d'un système élastique.

A notre connaissance, on n'a encore étendu la notion du viriel ni à l'étude des conditions d'équilibre des forces, ni à celle du travail virtuel du système matériel.

Mais des recherches sur cette question, qui nous a tout particulièrement intéressé, nous ont conduit à de nouveaux théorèmes sur le viriel, dans le genre de ceux qui ont trait aux moments des forces par rapport à un point. Nous avons cru utile de les exposer dans cette note avec des applications géométriques[1] et mécaniques qui montreront que la notion du viriel jouit de propriétés remarquables.

Ces propriétés résultent d'ailleurs des points suivants : Le viriel d'un couple lié a une valeur constante quelle que soit la position du pôle correspondant. Le travail virtuel effectué par un système quelconque de forces et de couples liés pour des déplacements virtuels quelconques imprimés à leurs points d'application, est égal à la variation correspondante ou à la différentielle de ce système par rapport à un pôle quelconque. En outre, le travail virtuel d'un système quelconque de forces (F) appliquées à un point A, pour un déplacement virtuel quelconque AA′ donné à ce point, se ramène également au viriel du système de couples liés formé par l'ensemble des deux systèmes suivants de forces : Du système de forces (F) déplacé en A′, parallèlement à lui-même et de celui qu'on obtient en changeant le sens de toutes les forces primitives (F) appliquées en A. Enfin voici, en résumé, les principaux résultats des susdites applications :

1° Une nouvelle propriété métrique des polygones réciproques quelconques de Cremona qui s'énonce comme suit : *Dans deux polygones réciproques, la somme algébrique des produits qu'on obtient en multipliant chaque côté de l'une de*

[1] Qu'il nous soit permis de remercier ici M. d'Ocagne d'avoir bien voulu nous donner des renseignements sur les applications géométriques exposées dans cette note. Nous devons à son obligeance l'étude de ces applications.

ces deux figures par son homologue dans l'autre figure, est égale à zéro.

Le signe des termes de cette somme sera défini plus loin dans la démonstration de cette propriété. Nous montrerons également que cette propriété générale offre l'utilité de s'appliquer, par une simple différentiation, au calcul des tensions dans les barres d'un système articulé statiquement indéterminé. En particulier, si les deux polygones ci-dessus sont deux quadrilatères réciproques, on a le théorème suivant : *La somme des produits, en valeur absolue, qu'on obtient en multipliant chaque diagonale par son homologue, est égale à la somme des produits de chaque côté par son homologue.*

2° Le viriel peut servir à la démonstration d'un grand nombre de théorèmes géométriques et à établir des relations trigonométriques. Nous nous bornerons, d'après le conseil de M. d'Ocagne, à démontrer, à titre d'exemple, les deux théorèmes suivants :

Théorème de Carnot. — *Dans tout tétraèdre la somme des carrés des deux arêtes opposées égale la somme des carrés des deux autres arêtes opposées, plus deux fois le produit des arêtes restantes par le cosinus de leur angle.*

Théorème de Mascheroni. — *Dans tout polygone plan ou gauche, le carré d'un côté égale la somme des carrés de tous les autres côtés augmentée de deux fois la somme de tous les produits qu'on obtient en multipliant de toutes les manières possibles deux côtés par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

La démonstration que nous donnerons plus loin pour ces théorèmes montrera que le viriel offre l'interprétation mécanique énoncée ci-après des relations algébriques du second degré entre les éléments linéaires des figures polygonales ou polyédriques.

Toute relation algébrique du second degré entre les longueurs et directions des côtés ou arêtes de ces figures, est la somme algébrique des viriels d'un système de couples liés formé par l'ensemble d'un certain nombre de systèmes de

forces en équilibre appliquées aux sommets de ces figures et ayant mêmes directions et valeurs que celles des côtés ou arêtes de ces figures.

3° La valeur du travail virtuel total des forces extérieures et intérieures dans un système de points matériels assujettis à des liaisons sans frottement, peut être fourni au moyen du viriel de la manière suivante : On ramène les forces à des couples en considérant l'ensemble des deux systèmes suivants de forces : 1° Le système de forces obtenu en changeant le sens de toutes les forces extérieures et intérieures appliquées aux divers points du système matériel avant la déformation virtuelle. 2° Le même système primitif de forces appliqué parallèlement à lui-même en ces mêmes points dans leurs nouvelles positions après la déformation. Il en résulte que le viriel total du système de couples liés formés ainsi par l'ensemble de ces deux derniers systèmes de forces, est égal au travail virtuel effectué par les forces extérieures et intérieures du système matériel ci-dessus.

4° Le viriel permet d'établir aussi directement l'expression ayant pour différentielle, le travail virtuel total ci-dessus des forces dans un système matériel.

Avant d'exposer les théorèmes annoncés ci-dessus, rappelons d'abord en quelques mots les expressions usuelles du viriel des forces de ces couples.

Définition et convention du viriel des forces et des couples liés.

Désignons par P la valeur absolue d'une force liée AP et par θ l'angle que forme cette force avec le prolongement du rayon polaire OA joignant son point d'application A au pôle O. Le viriel de cette force, défini ci-dessus, relativement à ce pôle, a pour expression :

$$V = Xx + Yy + Zz = P.OA \cos\theta \,. \qquad (1)$$

Ce viriel sera considéré + ou — selon que l'angle θ est aigu ou obtus.

De même, considérons dans l'espace un couple formé par

deux forces AP et BQ égales, parallèles et de sens contraire, liées à deux points A et B.

Désignons par P la valeur commune de ces deux forces, par ω l'angle que forme l'une quelconque de ces deux forces avec le prolongement de la distance AB de leurs points d'application, et par l la projection de cette distance AB sur la direction de ces forces. Appelons *longueur de liaison* de ce couple, la longueur représentant la distance AB estimée suivant la direction de ces forces.

Relativement à un pôle quelconque, le viriel de ce couple lié est constant. Il a pour valeur

$$V = P.AB \cos \omega = \pm Pl \,. \qquad (2)$$

Il est + ou — selon que l'angle ω est aigu ou obtus.

Si $\omega = 0$ ou 2π, le couple lié sera formé par deux forces directement opposées. Dans ce cas particulier, il sera dit *rectiligne*. Son viriel est égal à P.AB en considérant P comme + ou — selon que les deux forces se repoussent ou s'attirent.

Enoncé des nouveaux théorèmes sur le viriel.

Théorème I. — *Relativement à un même pôle* O, *le viriel de la projection d'une force liée* AP *sur un plan quelconque passant par le rayon polaire* OA, *est égal au viriel de cette même force* AP.

Soit AP′ la projection de cette force sur le plan considéré passant par OA, et soit R la projection commune des extrémités P et P′ sur le rayon OA, les viriels de ces deux forces AP et AP′ par rapport à O, ont la même valeur $V = \pm OA.OR$.

Théorème II. — *Le viriel d'une force liée* AP *relativement à un pôle* O *est égal au viriel de cette même force relativement à la projection de ce pôle sur un plan quelconque passant par cette force.*

Ce dernier théorème résulte de ce que le viriel est symétrique par rapport au pôle O et à l'extrémité P.

Théorème III. — *Pour qu'un système quelconque de forces liées dans l'espace ait une résultante nulle, il faut et il suffit que le viriel total de ces forces relativement à un pôle* O *soit constant quelle que soit la position du pôle.*

En effet, soient x, y, z les coordonnées du pôle considéré C par rapport à trois axes rectangulaires $Oxyz$ fixes dans l'espace, a_k, b_k, c_k celles du point d'application d'une quelconque de ces forces et X_k, Y_k, Z_k la projection de cette force sur ces trois axes.

Si V_c et V_0 représentent respectivement les viriels totaux de ce système de forces par rapport aux pôles C et O, on a :

$$V_c = V_0 - (\Sigma X_k x + \Sigma Y_k y + \Sigma Z_k z) ,$$

quel que soit le pôle C, cette relation donne $V_c = V_0$. Mais comme V_0 est constant, il faut que V_c le soit aussi. S'il en est ainsi, la relation ci-dessus donne, quel que soit C, la condition suivante :

$$\Sigma X_k = \Sigma Y_k = \Sigma Z_k = 0 .$$

Corollaire I. — *Si les points d'application d'un système quelconque de forces liées de résultante nulle, sont les pieds des perpendiculaires abaissées d'un point* M *de l'espace sur ces forces, le viriel total de ces forces est nul, quel que soit le pôle considéré, et réciproquement pour un système de forces liées dont les points d'application sont définis comme ci-dessus.*

Remarque. — Dans le cas particulier où les points d'application de ces forces se confondent avec le point M, on obtient le théorème suivant bien connu et son réciproque. *La somme algébrique des viriels d'un nombre quelconque de forces concourantes de résultante nulle, est nulle.*

Théorème IV. — *Si un système de points libres, dont chacun est sollicité par un nombre quelconque de forces en équilibre, est tel que l'ensemble de toutes les forces tant extérieures qu'intérieures (suivant la direction des lignes de jonction de ces points) appliquées aux divers points de ce système, forment un système de couples liés, la somme algébrique des*

viriels de ces divers couples est nulle quelle que soit le pôle considéré.

Ce théorème se démontre au moyen du précédent.

THÉORÈME V. — *Lorsqu'on imprime des déplacements virtuels quelconques aux points d'application d'un nombre quelconque de forces liées et à ceux des forces d'un système quelconque de couples liés dans l'espace, le travail virtuel total effectué par ces forces et ces couples pour ces déplacements virtuels, est égal à la valiation correspondante ou à la différentielle du viriel total de ces forces et couples liés relativement à un pôle quelconque fixe.*

En effet, désignons respectivement par $\mathfrak{T}$ et V, le travail virtuel total et le viriel total de ces forces et couples; par δ_x, δ_y, δ_z les projections du déplacement virtuel donné au point d'application d'une des forces sur trois axes rectangulaires $Oxyz$, par P la valeur algébrique commune des forces d'un de ces couples et par δl, la variation de la projection *(longueur de liaison)* de la distance des deux points d'application des forces de ce couple sur la direction commune. Les deux relations (1) et (2) donnent par différentiation l'équation suivante :

$$\delta V = \Sigma X \delta x + \Sigma Y \delta y + \Sigma Z \delta z + \Sigma P \delta l = \mathfrak{T} ,$$

dans laquelle l sera + ou — selon que l'angle ω du couple correspondant à P est aigu ou obtus.

Applications.

1. — *Aux figures réciproques planes ou gauches de* CREMONA. On sait, d'après une propriété statique de ces figures[1], que, si a et b sont les longueurs des deux côtés homologues de deux figures polygonales réciproques CREMONA (A) et (B), et si, aux extrémités d'un côté a de la première (A), on applique deux forces égales et directement opposées *(couple lié rectiligne)* ayant pour valeur commune la longueur b et pour sens celui du polygone fermé dans la figure (B) corres-

[1] *Cours de Géométrie de l'Ecole polytechnique*, par M. d'OCAGNE, t. II, p. 159.

pondant à l'une des deux extrémités du côté a, chaque nœud de la figure (A) sera sollicité par un système de forces en équilibre tel que l'ensemble de toutes les forces appliquées aux divers nœuds de cette figure forme un système de couples liés.

D'où, en écrivant en vertu du théorème IV, que le viriel total de ces deux couples est nul, on a la relation suivante :

$$\Sigma(\pm ab) = 0 ,$$

dans laquelle le signe de chacun de ses termes sera celui des deux forces opposées appliquées aux extrémités de l'un quelconque des deux côtés a, b figurés dans le terme considéré.

Application de cette propriété au calcul d'un système articulé intérieurement hyperstatique. Considérons un système articulé extérieurement isostatique à lignes surabondantes; concevons qu'on supprime toutes les barres surabondantes de ce système et qu'on applique aux extrémités A et B d'une de ces barres supprimées deux forces répulsives égales de valeur commune F. Désignons par (S) ce système articulé sans lignes surabondantes librement dilatable, par f la longueur de la barre AB et par t_k celle d'une barre quelconque du système (S). Soit T_k la tension produite dans la barre t_k sous l'action des forces répulsives F.

Cela étant, comme on sait que le polygone des forces de Cremona correspondant aux forces F et aux tensions T_k est un polygone réciproque de la partie du système articulé (S) seul influencé par les forces F, on a, en vertu de la propriété ci-dessus,

$$Ff - \Sigma T_k t_k = 0 .$$

A présent, si l'on fait subir aux longueurs f et t_k des variations ou dilatations virtuelles δf et δt_k, on obtient, par une différentiation de la relation ci-dessus, la formule suivante :

$$T\delta f - \Sigma T_k \delta t_k = 0$$

qu'on applique fréquemment au calcul du système articulé hyperstatique ci-dessus.

2. — *Démonstration mécanique des théorèmes géométriques de* Carnot *et de* Mascheroni. Soit un tétraèdre quelconque SABC (fig. 1); désignons les arêtes du trièdre S par a, b, c

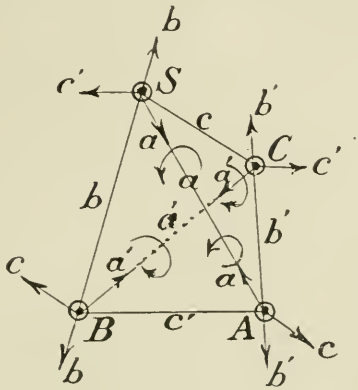


Fig. 1

et les arêtes qui leur sont respectivement opposées par a', b', c', et par la notation (c, c') l'angle formé par les arêtes c et c'. Démontrons au moyen du viriel la relation suivante de Carnot :

$$a^2 + a'^2 - b^2 - b'^2 - 2cc' \cos(c, c') = 0 .$$

En effet, il est aisé de voir que cette relation n'est autre que celle qu'on obtient en égalant à zéro, d'après le théorème IV, la somme algébrique des viriels de divers couples liés formés par l'ensemble du système de trois forces concourantes en équilibre, appliquées dans la figure aux sommets de ce tétraèdre et ayant pour sens celui indiqué par des flèches sur la figure, et pour valeurs et directions les mêmes que celles des arêtes désignées par les mêmes lettres que ces forces.

On vérifie que les trois forces appliquées à chaque sommet sont en équilibre, en remarquant que les arêtes désignées par les mêmes lettres que ces trois forces forment dans la figure un triangle fermé (considéré comme polygone des forces) ayant pour sens celui des forces.

Il convient de rappeler que les forces d'un couple lié rec-

tiligne sont + ou — selon qu'elles se repoussent ou elles s'attirent.

A présent, passons à la démonstration de la relation suivante de MASCHERONI

$$a^2 - b^2 - c^2 - d^2 - \ldots - 2bc \cos(b, c) - 2bd \cos(b, d)$$
$$- 2be \cos(b, e) - \ldots = 0 ,$$

dans laquelle a, b, c, d, e, ... désignent respectivement les côtés AB, BC, CD, ... (fig. 2) d'un polygone quelconque

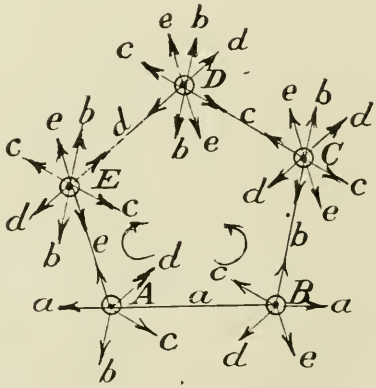


Fig.2

ABCD. En effet, appliquons aux sommets de ce polygone les systèmes de forces en équilibre suivants : Au sommet A le système de forces a, b, c, d, ... ayant pour polygone fermé de forces le polygone ABCD. Au sommet B, même système de forces changé de sens. Quant à chacun des sommets C, D, E, ..., nous appliquerons un même système de forces formé par l'ensemble de couples de deux forces égales et directement opposées ayant mêmes directions et valeurs que celles de tous les côtés de ce polygone, sauf le côté a.

En remarquant que le système de forces appliquées à chaque sommet est en équilibre et que leur ensemble forme un système de couples liés, il suffit d'écrire, en vertu du

théorème IV, que la somme algébrique des viriels de ce couple est nulle, pour avoir la relation ci-dessus.

Remarque. Un angle quelconque, par exemple tel que (b, d), figurant dans la relation ci-dessus, est l'angle formé par le côté d avec le prolongement de b.

3. — *Détermination directe du travail virtuel total des forces extérieures et intérieures dans un système de points matériels.*

Considérons un système quelconque de points matériels A, B, C, ... M, N, ... (fig. 3) assujettis à des liaisons sans frottement et dont chacun est en équilibre sous l'action des forces extérieures et intérieures qui les sollicitent.

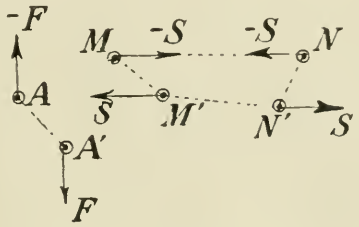


Fig. 3

Désignons par F la valeur de la force extérieure appliquée à un point quelconque A de ce système et par S la valeur commune des deux forces intérieures (actions mutuelles) égales et directement opposées qui se développent par deux points quelconques M et N de ce système (S sera considéré + ou — selon qu'il s'agit des forces répulsives ou attractives) et par s la valeur absolue de la distance MN entre ces deux points.

Faisons subir aux points de ce système des déplacements virtuels quelconques. Soient AA', MM', NN' les déplacements imprimés aux points A, M, N. Supposons que toutes les forces F et S se soient déplacées en même temps que leurs points d'applications aux nouveaux points A', M', N'.

Enfin, appliquons à tous les points primitifs A, M, N, les forces primitives F et S changées de sens.

Il en résulte que l'ensemble de toutes les forces ainsi obtenues (— F en A), (F en A′), (— S en M et N) et (S en M′ et N′) forment les trois systèmes de couples liés suivants : F(A, A′), — S(M, N) et + S(M′, N′). Le premier de ces couples a pour viriel :

$$+ F . AA' \cos \omega = X \delta x + Y \delta y + Z \delta z ,$$

et les deux autres couples ont aussi pour viriels

$$- Ss \qquad \text{et} \qquad + S(s + \delta s) .$$

En totalisant ces viriels et en égalant à zéro leur somme, on aura :

$$T = \Sigma X \delta x + \Sigma Y \delta y + \Sigma Z \delta z + \Sigma S \delta s = 0 . \qquad (3)$$

4. — *Etablissement de l'expression ayant pour différentielle totale celle du travail virtuel.* Considérons le même système ci-dessus de points matériels. Comme toutes les forces concourantes extérieures et intérieures appliquées à chacun de ces points sont en équilibre, leur viriel total est nul, en vertu de la remarque du corollaire I, d'où l'expression suivante cherchée du viriel :

$$V = \Sigma X x + \Sigma Y y + \Sigma Z z + \Sigma S s = 0$$

ayant pour différentielle totale l'équation (3) du travail virtuel.

SUR LES FOYERS RATIONNELS D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE

PAR

Émile TURRIÈRE (Montpellier).

Dans une lettre adressée à M. C.-A. LAISANT et publiée dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques*[1], M. P. APPELL a récemment appelé l'attention sur une question qui se rattache à mes recherches d'arithmogéométrie : à certaines courbes algébriques du plan ou de l'espace, peuvent être associés des points qui jouissent d'une propriété focale des coniques ; *la distance d'un point quelconque d'une telle courbe à un tel point est une fonction rationnelle des coordonnées cartésiennes du point courant de la courbe.*

C'est précisément l'objet du paragraphe 19 de mon premier article sur les *Notions d'arithmogéométrie* de mars 1916[2].

Etant donnée, par exemple, une courbe plane dont le point courant M a pour coordonnées cartésiennes x et y, le *problème des arithmodistances* pour cette courbe et pour un point fixe F de coordonnées x_0 et y_0 consiste à déterminer ceux des points de la courbe tels que la distance MF soit un nombre rationnel. J'ai indiqué la solution

$$x = x_0 + (1 - t^2) f(t), \qquad y = y_0 + 2t f(t),$$

dépendant d'une fonction rationnelle arbitraire $f(t)$ du para-

---

[1] P. APPELL. — Sur les foyers rationnels d'une courbe algébrique plane ou gauche, *Nouvelles Annales de Mathématiques* [4], t. XVIII, novembre 1918, p. 401-402.

[2] Notions d'arithmogéométrie, *L'Enseignement mathématique*, 18e année, 15 mars 1916, p. 81-110, et 15 novembre 1916, p. 397-428 ; 19e année : 15 mai 1917, p. 159-191, et juillet-septembre-novembre 1917, p. 233-272 ; 20e année : janvier 1919, p. 161-174.

mètre t. Ces deux équations paramétriques représentent une arithmocourbe plane jouissant de la propriété indiquée :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \left[(1 + t^2) f(t)\right]^2 .$$

L'équation polaire de cette courbe, lorsque le point F imposé est pris pour pôle, est :

$$r = f\left(\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}\right) ,$$

f étant une fonction rationnelle arbitraire de $\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}$.

Dans cette catégorie de courbes planes, rentrent comme courbes particulières les coniques rapportées à un foyer, la strophoïde...

De même pour les courbes gauches, il suffit de prendre

$$x = x_0 + af(t) , \qquad y = y_0 + bf(t) , \qquad z = z_0 + cf(t) ,$$

a, b, c étant les coordonnées d'un arithmopoint de l'arithmosphère d'équation :

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 .$$

Ces coordonnées a, b, c sont des fonctions rationnelles de deux paramètres λ et μ :

$$a = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + \mu^2 + 1} , \qquad b = \frac{2\mu}{\lambda^2 + \mu^2 + 1} , \qquad c = \frac{\lambda^2 + \mu^2 - 1}{\lambda^2 + \mu^2 + 1} ;$$

il suffit de supposer que ces paramètres λ et μ sont deux fonctions arbitraires d'un même troisième paramètre t.

Les coniques sphériques sont un des cas particuliers les plus remarquables.

Une observation analogue peut être présentée au sujet des surfaces que représentent les équations paramétriques

$$x = x_0 + \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1} f(u, v) ,$$

$$y = y_0 + \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1} f(u, v) ,$$

$$z = z_0 + \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1} f(u, v) ,$$

avec une fonction rationnelle arbitraire $f(u, v)$ des deux paramètres u et v de la représentation.

Cette notion de foyers rationnels est susceptible de diverses généralisations.

Le foyer rationnel peut être, par exemple, remplacé par une courbe de direction quelconque.

Soit t le paramètre de représentation de la courbe de direction ; si, sur la tangente au point M correspondant de cette courbe, on porte un vecteur $M\mu$ dont la mesure est une fonction rationnelle quelconque du paramètre t, l'extrémité μ du vecteur décrit une courbe pour laquelle la courbe de direction joue un rôle analogue à celui d'un foyer rationnel.

Une autre extension de cette même notion de foyer rationnel est fournie par la considération d'une des plus importantes congruences de droites : la congruence de Minding, formée par les normales d'une famille de cyclides.

Cette congruence, qui est la seule congruence de normales dont les nappes focales dégénèrent en deux courbes, a été primitivement étudiée par F. Minding en 1835, dans d'importantes recherches de statique[1]. Elle joue un rôle tout spécial dans l'étude générale des systèmes de rayons lumineux. Elle a été l'objet de recherches de J.-C. Maxwell[2].

Soient

$$\text{(E)}\quad x_1 = a\cos\varphi\,,\qquad y_1 = b\sin\varphi\,,\qquad z_1 = 0\,,$$

$$\text{(H)}\quad x_2 = c\,\mathrm{ch}\,\omega\,,\qquad y_2 = 0\,,\qquad z_2 = b\,\mathrm{ch}\,\omega\,,$$

les équations paramétriques d'une ellipse (E) et d'une hyperbole (H) focales.

La congruence des rayons joignant un point quelconque de paramètre φ sur l'ellipse et un point quelconque de paramètre ω sur l'hyperbole est précisément la congruence de Minding.

F. Minding. — Untersuchung betreffend die Frage nach einem Mittelpunkte nicht paralleler Kräfte ; *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (Journal de Crelle), Bd XIV, 1835. S. 289-315.

Ueber den Ort sämtlichen Resultanten eines der Drehung unterworfenen Systemes von Kräften, *ebenda*, Bd XV, 1836, S. 27-38.

Einige Sätze über die Veränderungen, welche ein System von Kräften durch Drehung derselben erleidet ; nebst einer Anwendung auf das Seilpolygon, *ebenda*, Bd XV, 1836, S. 313-316.

[2] J.-C. Maxwell. — On the cyclide, *The quartely journal of pure and applied mathematics*, vol. IX, 1868, p. 111-128 ; *Collected papers*, t. II, p. 144-159.

La distance des deux points focaux de chaque rayon de la congruence est

$$a \operatorname{ch} \omega - c \cos \varphi = \frac{a}{c} x_2 - \frac{c}{a} x_1 \; ;$$

cette distance est donc une fonction rationnelle des coordonnées de ces points focaux.

Si, d'autre part, λ représente la distance comptée à partir de l'un des points focaux, le point de l'ellipse (E) par exemple, jusqu'à l'une des cyclides orthogonales aux droites de la congruence, cette distance λ est égale à

$$\lambda = - c \cos \varphi + \text{const} = - \frac{c}{a} x_1 + \text{const} \; ;$$

elle est donc une fonction rationnelle des coordonnées de l'un ou l'autre des deux points focaux.

CHRONIQUE

Société mathématique suisse.

Lugano, 8 septembre 1919.

La Société mathématique suisse a tenu sa neuvième réunion ordinaire à Lugano, le 8 septembre 1919, sous la présidence de M. le Prof. Michel Plancherel (Fribourg), à l'occasion de la centième assemblée annuelle de la Société helvétique des sciences naturelles. Le programme de la partie scientifique comprenait onze communications ; en voici les résumés :

1. — Dr Ed. Guillaume (Berne). — *Un nouvel algorithme : les « dérivées homogènes » et une nouvelle opération spatiale : l'« aberration »*. — La Théorie de la Relativité restreinte (c'est-à-dire sans champ de gravitation), qui a été l'objet d'innombrables travaux, n'avait pas donné naissance jusqu'ici à la création d'êtres mathématiques nouveaux, malgré la haute originalité des conceptions sur lesquelles elle repose, et contrairement aux traditions de la Physique, qui a toujours été l'inspiratrice de la Mathématique.

Il faut en chercher la raison dans le fait que la Théorie faisait intervenir la notion fondamentale de *temps* d'une façon fort étrange, déconcertant complètement l'intuition. Nous avons

montré ailleurs[1] qu'il était possible d'introduire un paramètre unique t pour représenter le temps dans la Théorie de la Relativité. Voici, très brièvement, les résultats auxquels on parvient, résultats qui introduisent des notions mathématiques nouvelles :

Dans la Théorie de la Relativité, on rapporte tous les déplacements à des systèmes de référence qui sont des trirectangles euclidiens $S(x, y, z)$. Mais un changement de système se fait à l'aide de la *transformation de Lorentz* qui contient, outre les 3 coordonnées habituelles x, y, z de tout point P, un certain paramètre u. Pour deux systèmes S_1 et S_2, animés d'une certaine translation relative, que nous préciserons plus loin, cette transformation est la suivante :

$$x_1 = \beta(x_2 + \alpha u_2) \; ; \quad y_1 = y_2 \; ; \quad z_1 = z_2 \; ; \quad u_1 = \beta(u_2 + \alpha x_2) \qquad (1)$$

où $\beta^2 = 1 : (1 - \alpha^2)$ est une constante. Or, les 4 quantités x, y, z, u ne peuvent être considérées comme les coordonnées homogènes d'un point P ; nous voulons dire que si on leur attribuait arbitrairement cette signification, on ne serait nullement conduit aux résultats de la Théorie de la Relativité. Si, par contre, on considère ces quantités comme des fonctions du temps t, on tombe immédiatement sur la célèbre règle d'addition des vitesses d'Einstein, qui est à la base de la Théorie, en formant les quotients :

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{u}_1}, \quad \frac{\dot{y}_1}{\dot{u}_1}, \quad \frac{\dot{z}_1}{\dot{u}_1} \; ; \qquad \frac{\dot{x}_2}{\dot{u}_2}, \quad \frac{\dot{y}_2}{\dot{u}_2}, \quad \frac{\dot{z}_2}{\dot{u}_2},$$

où les dérivées par rapport à t : $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ sont les composantes des vitesses de P. La dérivée $\dot{u}$ est alors le scalaire d'une vitesse caractéristique de S, qui n'est autre que la vitesse de la lumière dans ce système. Nous nous trouvons donc en présence d'un nouvel algorithme qu'on peut appeler « vitesses » ou « dérivées *homogènes* ».

Pour en voir la signification spatiale, nous nous placerons dans le cas très simple où les deux systèmes S_1 et S_2 se réduisent aux axes O_1x_1 et O_2x_2, glissant l'un contre l'autre avec la vitesse α ; P est un point en mouvement sur ces axes, et nous le supposerons — ce qu'on peut toujours faire — lié à un troisième axe O_3x_3 glissant également relativement aux premiers. On a alors, puisque $y_1 = y_2 = z_1 = z_2 = 0$:

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{u}_1} = \frac{\dfrac{\dot{x}_2}{\dot{u}_2} + \alpha}{1 + \alpha \dfrac{\dot{x}_2}{\dot{u}_2}},$$

[1] Voir *Archives des sciences phys. et nat.*, Genève, décembre 1918 et juin 1919.

expression qui ne dépend plus que des rapports $\frac{\dot{x}}{\dot{u}}$, ce qui nous permet, en changeant d'échelle, de les prendre pour vitesses. Posons :

$$\frac{\dot{x}_1}{\dot{u}_1} = v_{13} \; ; \qquad \frac{\dot{x}_2}{\dot{u}_2} = v_{23} \; ; \qquad \alpha = v_{12} \; ,$$

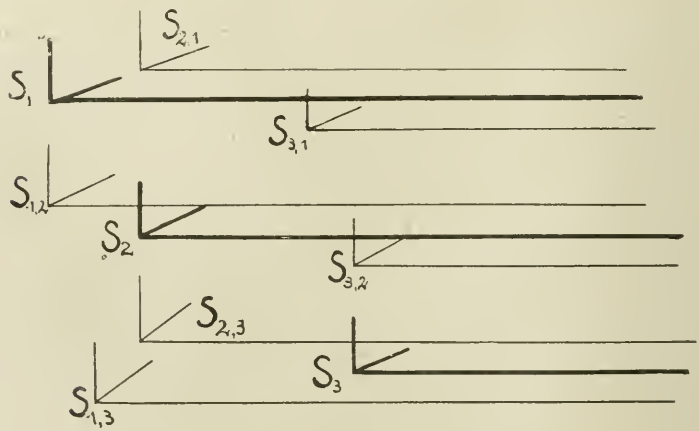
nous obtenons :

$$v_{13} = \frac{v_{12} + v_{23}}{1 + v_{12} v_{23}} \; . \tag{2}$$

Comparons cette expression à celle que donne la Cinématique classique pour 3 droites glissant les unes par rapport aux autres avec des vitesses relatives V_{12}, V_{23}, V_{13} :

$$V_{13} = V_{12} + V_{23} \; .$$

Tandis que cette dernière relation conduit, à tout instant t, à une configuration *unique* pour l'ensemble des trois droites, la relation (2) donne, à chaque valeur de t, trois figures *distinctes* selon le système où l'on se place pour envisager les deux autres. Si, par exemple, on se met sur S_1, S_2 et S_3 sembleront avoir les positions *apparentes* $S_{2.1}$ et $S_{3.1}$ (voir la figure). Nous dirons qu'il y a « *aberration* ». Cette désignation se justifie par le fait que l'expression (2) contient en particulier l'aberration astronomique.



La Théorie ne faisant connaître que les positions apparentes, on se demandera quelles sont les positions *vraies*. Dans toutes les Géométries, euclidiennes ou non-euclidiennes, la composition des vecteurs s'effectue suivant un polygone *fermé*. La règle (2),

par contre, conduit à une figure *ouverte*, ce qui produit l'« aberration ». Pour connaître les vitesses vraies, il faudrait trouver des fonctions des vitesses apparentes, qui s'additionnent suivant une figure fermée. Il y a deux possibilités : 1° privilégier un système et lui attribuer le repos absolu ; 2° prendre pour vitesses vraies les arguments des tangentes hyperboliques représentant les vitesses apparentes. Les trajectoires vraies seraient alors les géodésiques de surfaces à courbure négative. La vitesse vraie de la lumière aurait une valeur limite infinie.

En terminant, disons que l'introduction d'un paramètre unique t pour représenter le temps dans la Théorie de la Relativité, permet d'éliminer immédiatement la célèbre « contraction » de Lorentz, qui apparaît ainsi comme une entité purement fictive.

2. — Dr Giov. Ferri (Lugano). — *Sur la courbe des points brillants de sphères concentriques.* — Soit A le point lumineux, A_1 le point de vue, O le centre des sphères, M un point brillant (par réflexion), situé dans le plan AA_1O. Prenons un système d'axes rectangulaires, O comme origine et l'axe Ox passant par le milieu de AA_1. Soient alors $p, q ; p_1, -q ; x, y$ les coordonnées respectives de A, A_1 et M. Les coefficients angulaires des droites AM, A_1M et OM sont alors respectivement $a = \frac{y-q}{x-p}$, $a_1 = \frac{y+q}{x-p_1}$, $\frac{y}{x}$. Le coefficient angulaire de la bissectrice de l'angle AMA_1 égalé à celui de OM donne

$$\frac{a\sqrt{1+a_1^2} - a_1\sqrt{1+a^2}}{\sqrt{1+a_1^2} - \sqrt{1+a^2}} = \frac{y}{x}.$$

Remplaçons a et a_1 par leurs valeurs, nous obtenons pour le lieu des points de réflexion sur les sphères de centre O

$$(p+p_1)(x^2+y^2)y - (p-p_1)(x^2-y^2)q - 2(q^2+pp_1)xy = 0. \quad (1)$$

Ce lieu passe par A et par A_1, il a un point double en O. Il y a pour toute valeur de x 3 valeurs de y ; l'une d'elles est toujours réelle et positive. Pour $x = \pm\infty$, on a asymptotiquement $y = \frac{p-p_1}{p+p_1}q$ parallèle à Ox. Pour toute valeur de y il y a deux valeurs de x qui ne sont réelles que lorsque $y \leqq \frac{\sqrt{(p^2+q^2)(p_1^2+q^2)}}{p+p_1}$.

Lorsque A et A_1 sont équidistants de O, $p = p_1$ et l'équation se réduit à

$$[p(x^2+y^2) - (p^2+q^2)x]y = 0.$$

Le lieu est alors formé de l'axe des x et de la circonférence $x^2+y^2-\frac{p_2+q_2}{p}x = 0$ dont le centre est sur l'axe des x et qui

passe par O. Quand A est à l'infini : $p = \infty$, l'équation du lieu se réduit à $(y - q)x^2 - 2p_1xy + q + y\,y^2 = 0$, qui a $y = q$ comme asymptote.

La *construction graphique de la courbe* peut se faire point par point au moyen des tangentes menées par A et A_1 aux circonférences de centre O. On obtient pour chaque circonférence deux couples de tangentes ayant 4 points d'intersection qui sont des points de la courbe.

Les *points brillants d'une sphère* s'obtiennent par l'intersection du lieu des points brillants avec le grand cercle situé dans le plan AA_1O, donc par résolution du système simultané formé par (1) et par $x^2 + y^2 = r^2$. On obtient pour déterminer x et y deux équations du 4e degré, par conséquent 4 points qui peuvent être tous réels ou dont 2 peuvent être imaginaires. Notons cependant que dans chaque cas deux points seulement sont des points de réflexion de rayons physiques, l'un sur la partie convexe, l'autre sur la partie concave de la sphère. Les 2 autres points répondent seulement à la condition géométrique de la bisection de l'angle supplémentaire des 2 droites passant par A et A_1.

3. — Dr K. Merz (Coire). — *Métrique dans les ovales des courbes algébriques.* — Considérons l'intérieur d'un ovale comme l'image du plan illimité dans une transformation quadratique. Admettons dans ce plan la métrique euclidienne et faisons correspondre aux segments et aux angles de ce plan leurs images dans l'ovale en les affectant des mêmes nombres comme mesure. Nous définissons de cette manière à l'intérieur de l'ovale une métrique générale non euclidienne, ayant sa réalisation dans le plan.

1er exemple[1]. $f \equiv (x^2 - a^2)(x - b) - y^2 = 0$ possède lorsque $a < b$ un ovale compris dans $-a \leqq x \leqq +a$. La transformation $\xi^2 = \frac{x^2}{f}$, $\eta^2 = \frac{y^2}{f}$ fait correspondre aux points $P(x, y)$ de l'intérieur de l'ovale les points $P'(\xi, \eta)$ du plan illimité. Aux coordonnées x, y de P envisagées comme distances aux axes correspondent dans le plan (ξ, η) un arc u d'une courbe du 3me ordre et un arc d'hyperbole v donnés par

$$u = \int \sqrt{\frac{4f(f - xf_1) + (x^2 + y^2)f_1^2}{4f^3}}\,dx\,,$$

$$v = \int \sqrt{\frac{4f(f - yf_2) + (x^2 + y^2)f_2^2}{4f^3}}\,dy\,,$$

[1] Voir l'exemple des *Verhandlungen d. Schweiz. Naturforsch. Gesell.*, 1917, II, p. 135

où $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$. L'élément d'arc est donné par $ds^2 = du^2 + dv^2 - 2du\,dv \cos\varphi$ et $\operatorname{tg}\varphi = \frac{2f[2f - xf_1 - yf_2]}{2f[xf_2 + yf_1] - (x^2 + y^2) f_1 f_2}$. Les géodésiques à l'intérieur de l'ovale sont des arcs de courbes du 3me ordre.

2me *exemple.* $f \equiv (x^2 - a^2)(x^2 - b^2) - y^2 = 0$; $a < b$. On ne considère que les valeurs de x, y qui sont à l'intérieur de l'ovale $-a < x < +a$. On obtient

$$u = \int \sqrt{\frac{(a^2 b^2 - x^4 - y^2)^2 + x^2 y^2 (2x^2 - a^2 - b^2)^2}{[(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) - y^2]^3}}\, dx\,,$$

$$v = \int \sqrt{\frac{x^2 y^2 + (x^2 - a^2)^2 (x^2 - b^2)^2}{[(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) - y^2]^3}}\, dy\,.$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{[(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) - y^2](a^2 b^2 - x^4)}{xy[x^4 + y^2 - a^2 b^2 + (x^2 - a^2)(x^2 - b^2)(2x^2 - a^2 - b^2)]}\,.$$

Les géodésiques de l'ovale sont ici les arcs de courbes du 4me ordre, images des droites $\alpha\xi + \beta\eta = \gamma$. La distance dans l'ovale se détermine par des arcs de courbes du 4me ordre.

4. — Prof. Dr W.-H. Young, F. R. S. (Lausanne et Aberytstwyth). — *Sur la notion de l'aire.* — Plusieurs mathématiciens de notre temps ont essayé de préciser la notion de l'aire d'une surface courbe, mais avec peu de succès. L'auteur a construit une théorie qui s'applique, non seulement aux surfaces, mais aux variétés de n'importe quelles dimensions. La théorie est fondée sur l'idée de l'*aire d'une courbe gauche*. L'aire d'un polygone est la somme des moments de forces, représentées par les côtés du polygone. Inscrivons dans une courbe un polygone ayant tous ses côtés inférieurs en longueur à δ : si, en faisant tendre δ vers zéro, l'aire du polygone tend vers une limite unique, celle-ci est l'*aire de la courbe*. Avec cette définition, par exemple, chaque courbe rectifiable plane possède une aire donnée par la formule

$$A = \frac{1}{2} \int \left\{ x(u)\, dy(u) - y(u)\, dx(u) \right\}.$$

Si la courbe est l'image du périmètre du rectangle $(a, b; a', b')$ dans une correspondance continue

$$x = x(u, v)\,, \quad y = z(u, v)\,, \quad (a \leq x \leq a')\,, \quad b \leq y \leq b')\,,$$

le problème se pose de transformer l'expression obtenue dans l'intégrale double bien connue

$$A = \int_a^{a'} \int_b^{b'} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\, du\, dv\,.$$

Prenons maintenant une correspondance continue et biunivoque

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

et divisons le rectangle fondamental en rectangles partiels, dont les côtés, parallèles à $u = 0$, $v = 0$, ne dépassent pas δ en longueur. Ayant formé la somme Σ_δ des aires des courbes images de ces rectangles partiels, nous faisons tendre δ vers zéro. Si Σ_δ a une limite unique Σ, celle-ci est l'aire de la partie de la surface, image biunivoque du rectangle fondamental. Le théorème principal est le suivant : *Si* $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ *sont des intégrales par rapport à* u, *ayant des dérivées partielles par rapport à* u, *qui sont, sauf pour un ensemble de valeurs de* u *de mesure nulle, toutes inférieures à une fonction sommable de* u, *et si la même chose est vraie quand nous changeons* u *en* v, *et* v *en* u, *la surface image du rectangle fondamental a une aire* A *donnée par la formule*

$$A = \int_a^{a'} \int_b^{b'} \sqrt{\left(\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right)^2} \, du \, dv,$$

Sous certaines conditions l'auteur arrive au même but par une méthode de triangulation. Il faut cependant introduire explicitement l'ordre double de la surface, de même que, dans l'approximation de la longueur d'une courbe, il est nécessaire de tenir compte du sens de cette courbe. La triangulation est obtenue en joignant convenablement par des lignes droites les points de la surface, images des sommets des rectangles partiels de longueur $\leqq h$ et de hauteur $\leqq k$ dans le plan des (u, v). Pour calculer l'aire nous laissons d'abord k et puis h tendre vers zéro, et nous obtiendrons le résultat voulu dans certains cas intéressants. Sans donner les conditions les plus générales, nous remarquons que, si $x(u, v)$, $y(u, v)$ et $z(u, v)$ sont des intégrales doubles, cette méthode est valable, d'autant plus que la limite obtenue est dans ce cas indépendante de la manière avec laquelle k et h tendent vers zéro.

5. — Prof. Dr L.-Gustave Du Pasquier (Neuchâtel). — *Sur un problème de cinématique.* — Une barre rigide AB de longueur l_1 peut tourner librement, avec la vitesse v_1, autour de son extrémité A supposée fixe. Une seconde barre BC également rigide, mais de longueur $l_2 \neq l_1$, peut tourner, avec la vitesse v_2, librement autour de l'extrémité B de la première. Dans ces circonstances, le point C, extrémité libre de la seconde barre, décrit une « courbe *gp* » dont la forme et les propriétés dépendent :

1° des longueurs l_1 et l_2 ;

2° du rapport des vitesses v_1 et v_2 ;

3° du sens des rotations autour de A et de B, en particulier (lorsqu'elles s'effectuent dans un même plan), si elles ont lieu dans le même sens, ou non.

Il est remarquable que ces mêmes courbes *gp* puissent être engendrées cinématiquement d'une manière simple par les dispositifs suivants : Un point mobile P est animé d'un mouvement donné sur un segment XY d'une droite *d*. En même temps, *d* tourne autour de l'un de ses points, F, supposé fixe en dehors du dit segment. La trajectoire du mobile P est encore une courbe *gp*. — Un point mobile P parcourt une certaine ellipse, avec la vitesse v_1 (mouvement de circulation) : simultanément, cette ellipse tourne avec la vitesse v_2 autour d'un pôle fixe, F, qui coïncide à chaque instant avec l'un de ses foyers. La trajectoire *s* qui résulte pour P de la combinaison de ce mouvement de rotation avec celui de circulation est de nouveau une courbe *gp*. — Le conférencier déduit les équations de ces courbes dans le cas où elles sont planes, en coordonnées cartésiennes et polaires, puis en énumère une série de propriétés et indique une généralisation du problème à l'espace.

La communication se termine par d'intéressantes applications des courbes *gp* à quelques mécanismes, à l'astronomie et à la mécanique de la relativité.

6. — Prof. Dr A. Speiser (Zurich). — *Sur les lignes géodésiques des surfaces convexes.* — Considérons les lignes géodésiques d'une surface convexe fermée, issues d'un point $\mathfrak{P}$, à partir de $\mathfrak{P}$ jusqu'au premier foyer. Elles engendrent une surface recouvrant la surface convexe partout au moins une fois. La continuation de ces lignes à partir du premier foyer jusqu'au deuxième engendre de nouveau une surface de recouvrement qui, quand certaines conditions sont remplies, couvre toute la surface convexe. Par chaque point $\mathfrak{P}$ il passe donc au moins une géodésique qui, après avoir touché l'enveloppe une seule fois rentre au point $\mathfrak{P}$. On démontre que la plus courte est une géodésique fermée, ce qui donne une démonstration nouvelle d'un théorème de Poincaré (*American transactions*, t. 6, p. 237), à savoir que sur chaque surface convexe fermée il existe au moins une géodésique fermée.

7. — Prof. Dr M. Plancherel (Fribourg). — *Sur la méthode d'intégration de Rayleigh-Ritz.* — Le procédé de Rayleigh-Ritz (Rayleigh : Phil. Mag. (5), 47 (1899), p. 566-72 et (6), 22 (1911), p. 225-229 ; Ritz : Gött. Nachr., 1908, p. 236-40. J. reine angew. Math., 135 (1908), p. 1-61. Ann. d. Phys. (4), 28 (1909), p. 737-786.

(Œuvres, p. 192-316) pour l'intégration des équations linéaires aux dérivées partielles du type elliptique qui résultent d'un problème du calcul des variations (prenons pour fixer les idées l'équation $\Delta\Delta u - \lambda u = 0$) exprime la solution sous forme d'une série $u = \Sigma x_i \varphi_i$ procédant suivant un système de fonctions données φ_i que nous supposerons orthogonal, fermé et normé et calcule les coefficients x_i comme solutions, au sens de la méthode des réduites, d'un système

$$\sum_k a_{ik} x_k - \lambda x_i = f_i \qquad (1)$$

d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues. La méthode de Ritz ne démontre la légitimité du procédé que dans le cas où $\lambda \leqq 0$. En supposant connues l'existence et les propriétés des fonctions fondamentales de $\Delta\Delta u - \lambda u = 0$, il est cependant possible de prouver que le procédé de Ritz est applicable pour toute valeur de λ qui n'est pas une valeur fondamentale et qu'il permet de calculer valeurs et fonctions fondamentales par la résolution, au sens de la méthode des réduites, du système homogène correspondant à (1). La démonstration se base sur l'étude de la forme quadratique (non bornée) $\Sigma a_{ik} x_i x_k$ et sur le fait que cette forme possède cependant une résolvante unique $K(\mu; x)$ qui, elle, est une forme bornée sauf pour les valeurs de μ qui sont les inverses des valeurs fondamentales. Ainsi se trouve justifiée l'application qu'a faite Ritz de son procédé au calcul des vibrations fondamentales d'une plaque élastique à bords libres (figures de Chladni).

8. — Dr G. Pólya (Zurich). — *Quelques problèmes de probabilité se rapportant à la « promenade au hasard »*. — Imaginons un réseau régulier de points dans l'espace à d dimensions ; relions tous ces points (nœuds) par des droites parallèles aux axes de coordonnées. Un promeneur errant sur les droites de ce réseau se décide au hasard, en chaque nœud, pour une des $2d$ directions possibles, le choix de chaque direction ayant la probabilité $\frac{1}{2d}$. Pour $d = 1$, nous avons simplement une droite indéfinie divisée en segments égaux et le problème est une représentation géométrique du jeu de « pile ou face ». Pour $d = 2$, le problème représente la promenade au hasard d'un piéton dans un réseau de rues et pour $d = 3$ le chemin d'une molécule d'un gaz en diffusion à travers un cristal du système régulier.

Les applications principales du calcul des probabilités peuvent être rattachées au schéma de la promenade au hasard ou à des modifications de ce schéma, qui s'introduisent d'elles-mêmes. Des problèmes nouveaux et curieux se rapportant à la promenade

au hasard, nous ne citerons ici qu'un seul. Deux promeneurs errant dans le réseau, partant d'un même nœud, allant toujours avec la même vitesse, prennent leurs décisions aléatoires à chaque nœud, indépendamment l'un de l'autre. La probabilité pour qu'ils se rencontrent pendant une durée t déterminée croît avec t. Cette probabilité tend-elle vers l'unité lorsque t tend vers l'infini? *Oui*, si $d = 1, 2$; *non*, si $d = 3, 4, 5, \ldots$.

9. — Prof. Dr R. Fueter (Zurich). — *Sur quelques théorèmes de la théorie des idéaux et sur leur démonstration.* — Soit K un corps de Galois quelconque. Hilbert à étudié la décomposition dans K de chaque nombre premier en idéaux premiers. On peut compléter ses recherches en considérant l'ensemble des nombres premiers au lieu de les considérer isolément. En effet, K est cyclique relativement au corps de décomposition des nombres premiers qui n'ont pas de diviseur commun avec son discriminant: on peut, par suite, utiliser la théorie que j'ai donnée des équations abéliennes dans un domaine fondamental. Les résultats suivants entrent en considération. Soit k un corps fondamental, K le corps supérieur cyclique relatif; soit f un idéal de k contenant tout idéal premier du discriminant relatif de K par rapport à k, à la première puissance quand il est premier avec le degré relatif, à une certaine puissance lorsqu'il est contenu dans le degré relatif. Formons le rayon de k ayant f comme guide. On a alors les théorèmes :

I. *Tous les idéaux premiers d'une classe de rayons* (mod. f) *de* k *se décomposent de la même manière dans* K. Deux idéaux de k sont dits équivalents (mod. f) lorsque leur quotient, multiplié convenablement par des unités de k, est égal à un nombre α *totalement positif* et vérifiant la congruence $\alpha \equiv 1$ (mod. f).

II. *Tous les idéaux de la classe principale de rayons* (mod. f) *de* k *se décomposent dans* K *en un nombre d'idéaux premiers égal au degré relatif.*

Considérons tous les nombres premiers du corps de Galois donné K et formons avec eux, comme plus haut, le guide f. Le corps d'inertie de tous les idéaux premiers non contenus dans f est encore le corps K. Ce dernier est cyclique de degré n relativement au corps de décomposition d'un idéal premier $\mathfrak{p}$ (c'est-à-dire sa norme est p^n). Soit $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$ le groupe relatif de décomposition. Parmi les conséquences des théorèmes I et II je noterai les suivantes :

Le groupe de décomposition $1, z, z^2, \ldots z^{n-1}$ est un sous-groupe du groupe de décomposition de tout idéal premier du corps de décomposition, lorsque cet idéal est équivalent (mod. f) dans ce corps à l'idéal premier $\mathfrak{p}$. Si $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$ n'est pas sous-

groupe d'un sous-groupe cyclique du groupe de Galois, tous les idéaux premiers du corps de décomposition, qui sont équivalents à $\mathfrak{p}$ (mod. f), ont ce corps comme corps de décomposition. Si $n > 1$, $\mathfrak{p}$ n'est jamais un idéal principal (mod. f) dans le corps de décomposition.

Si donc, inversement, on prend un sous-groupe quelconque $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$ du groupe de Galois du corps, et si ce sous-groupe est « le plus grand », c'est-à-dire s'il n'est pas sous-groupe d'un autre sous-groupe cyclique, formons le sous-corps k appartenant à $1, z, z^2, \ldots, z^{n-1}$; alors, tous les idéaux premiers de k qui ne sont pas du premier degré se décomposent dans K en n idéaux premiers. *Tous les idéaux premiers de la même classe de rayons (mod. f) de k ont le même corps de décomposition.*

Les démonstrations des théorèmes I et II n'ont, jusqu'à présent, pas été entièrement publiées. Trois méthodes peuvent conduire au but : celle de Furtwängler basée sur les lois de réciprocité, ma méthode des classes de rayons et de la répartition en genres, enfin la méthode analytique de Hecke basée sur son équation fonctionnelle.

10. — Dr S. Bays (Fribourg). — *Une question de Cayley relative au problème des triples de Steiner*[1]. — Cayley a soulevé, relativement au problème des *triples* ou *triades* de Steiner, une question intéressante et difficile, jusqu'ici neuve encore de toute recherche : *Est-il possible de répartir les* $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$ *triples de* N *éléments en* N — 2 *systèmes de Steiner ?*

Pour 7 éléments, cette répartition n'est pas possible ; on peut écrire deux systèmes de Steiner de 7 éléments, n'ayant pas de triples communs, mais pas davantage. Cayley s'est demandé si par exemple les 455 triples de 15 éléments pourraient être disposés en 13 systèmes de Steiner. Il a cru donner une démonstration très simple que, si les 13 systèmes existent (et Cayley dit en terminant qu'il ne le pense pas), ils ne peuvent pas se déduire de l'un d'entre eux par une permutation cyclique de 13 de ces éléments. Mais sa démonstration repose sur une prétention qui se trouve être entièrement fausse. Cayley prétend que dans le rectangle des couples des 13 éléments 0, 1, 2, ..., 9, 0′, 1′, 2′, disposés de la manière suivante :

---

[1] Cayley, *Mathem. Papers*, I, p. 481, ou Philosoph. Magazine, 37 (1850), p. 50. — Voir aussi Netto, *Combinatorik*, 1901, p. 202 à 235 et particulièrement p. 228. — Dans *L'Enseignement mathématique* (N° 1-2), 1917, j'ai établi que pour 9 éléments le problème de Cayley est possible et qu'il a 2 solutions différentes. Je donnais en commençant la démonstration de Cayley relative au cas de 15 éléments, parce que intéressante et simple, sans songer à douter de la prétention sur laquelle elle repose.

01	12	23	34	45	56	67	78	89	90′	0′1′	1′2′	2′0
02	13	24	35	46	57	68	79	80′	91′	0′2′	1′0	2′1
03	14	25	36	47	58	69	70′	81′	92′	0′0	1′1	2′2
04	15	26	37	48	59	60′	71′	82′	90	0′1	1′2	2′3
05	16	27	38	49	50′	61′	72′	80	91	0′2	1′3	2′4
06	17	28	39	40′	51′	62′	70	81	92	0′3	1′4	2′5

il n'existe qu'un seul système de 6 couples, ayant un couple dans chaque ligne et renfermant les 12 éléments 1, 2, ..., 1′, 2′, à savoir le système suivant : 67, 2′1, 58, 1′2, 49, 0′3. Or il en existe 144 autres, remplissant les mêmes conditions ; ces systèmes vont par *couples* de systèmes que j'appellerai *conjugués*, déductibles l'un de l'autre par la substitution $(x, N - x)$. Le système 1, N . 1 ; 2, N . 2 ; ... ; $\frac{N-1}{2}$, $\frac{N+1}{2}$, donné par Cayley, est le seul identique à son conjugué ou self-conjugué. Pour $6n + 3$ éléments, lorsque $6n + 1$ est un nombre premier (cas de 15 éléments de la démonstration de Cayley), et pour $6n + 1$ éléments, lorsque $6n - 1$ est un nombre premier de la forme $4x - 1$, je peux donner un système général de couples, remplissant les conditions demandées par Cayley, différent de son conjugué et donc autre que le système self-conjugué, au moyen d'une racine primitive α de $6n + 1$, resp. de $6n - 1$[1]. Pour 9 éléments, ce système avec son conjugué et son self-conjugué, permettent de construire immédiatement le système de Steiner suivant :

780 713 726 745 815 823 846 016 025 034 124 356

que la substitution cyclique (0123456) transforme successivement en 6 autres systèmes de Steiner différents par tous les triples, et renfermant donc avec le premier les 84 triples de 9 éléments.

Le manque de place ne me permet pas de développer davantage la question : mais le problème de Cayley : *Répartir les* $\frac{N(N-1)(N-2)}{6}$ *triples de* N *éléments en* N — 2 *systèmes de Steiner*, ou en d'autres termes : *trouver* N — 2 *systèmes de Steiner de* N *éléments différents par tous les triples*, me paraît se poser au contraire d'une manière positive, pour $N = 6n + 1$ et pour $N = 6n + 3$ éléments, $N = 7$ étant probablement le seul cas pour lequel il manque de solutions.

---

[1] Ces deux systèmes sont respectivement

Pour $6n + 3$: $\alpha^0 \alpha^n$, $\alpha^1 \alpha^{n+1}$, ..., $\alpha^{n-1} \alpha^{2n-1}$, $\alpha^{2n} \alpha^{3n}$, $\alpha^{2n+1} \alpha^{3n+1}$, ..., $\alpha^{3n-1} \alpha^{4n-1}$, $\alpha^{4n} \alpha^{5n}$, ..., $\alpha^{5n-1} \alpha^{6n-1}$.

Pour $6n + 1$: $\alpha^0 \alpha^1$, $\alpha^2 \alpha^3$, ..., $\alpha^{6n-4} \alpha^{6n-3}$, en entendant naturellement par l'élément α^x, le plus petit reste positif de ce nombre (mod. $6n + 1$ resp. $6n - 1$).

11. — Prof. Dr L. Crelier. — *Interprétation géométrique rationnelle des quantités imaginaires.* — I. Toutes les opérations de la géométrie analytique à deux dimensions supposent que nous travaillons sur *l'endroit* du plan fondamental.

Si nous introduisons le concept de *l'envers* du plan, nous aurons, avec un axe commun, celui des x par exemple, de nouvelles ordonnées *qui correspondent aux valeurs* $+\sqrt{-1}$ *et* $-\sqrt{-1}$ ou $+i$ et $-i$.

II. Considérons maintenant une équation algébrique, par exemple $x^2 + y^2 = 16$. A toutes les valeurs de x correspondent des valeurs de y ; entre -4 et $+4$ elles viennent sur l'endroit et forment un cercle ; entre $-\infty$ et -4, puis entre $+4$ et $+\infty$ elles viennent sur l'envers et forment une hyperbole équilatère également comprise dans la formule.

III. Recherchons les points de coupe de la droite $x = 5$ avec la courbe $x^2 + y^2 = 16$. Nous trouvons $(5, +3i)$ et $(5, -3i)$. Comme la droite est également représentable sur l'envers, *les points de coupe sont sur l'envers, sur l'hyperbole.*

IV. Passons aux points de coupe de la même courbe avec la droite $y = 2x - 16$. Nous trouvons

$$x = \frac{32}{5} \pm \frac{4}{5}\sqrt{11}\, i \quad \text{et} \quad y = -\frac{16}{5} \pm \frac{8}{5}\sqrt{11}\, i\,.$$

Pour trouver les images de ces points, nous avons deux moyens :

a) Nous prenons comme nouvel axe des x le diamètre perpendiculaire à la droite ; l'équation de la courbe ne change pas ; celle de la droite devient $x = \frac{16}{5}\sqrt{5}$. D'après le raisonnement précédent nous trouvons les deux points de coupe sur l'envers du plan et sur l'hyperbole correspondante.

b) Ou bien nous déplaçons les axes jusqu'en $\left(\frac{32}{5}, -\frac{16}{5}\right)$ comme nouvelle origine et sur l'envers, à cause du déplacement des 2 axes, nous avons les coordonnées $\pm\frac{4}{5}\sqrt{11}i$ et $\pm\frac{8}{5}\sqrt{11}i$ ou les points $\left(\frac{4}{5}\sqrt{11}i, \frac{8}{5}\sqrt{11}i\right)$ et $\left(-\frac{4}{5}\sqrt{11}i, -\frac{8}{5}\sqrt{11}i\right)$.

V. On peut opérer de la même manière avec une conique quelconque et nous arrivons aux conclusions suivantes :

a) *Les points de coupe d'une conique avec une droite extérieure sont les intersections de la droite sur l'envers du plan avec la conique associée qui admet la direction de la droite comme diamètre conjugué secondaire. Le diamètre principal sert d'axe réel commun aux deux faces du plan.*

b) *Les valeurs analytiques* $x = a \pm bi$ *et* $y = c \pm di$ *trouvées comme solutions, correspondent aux mêmes points;* a *et* c *sont les coordonnées de la nouvelle origine, sur le centre du segment de droite entre les points de coupe;* b *et* $-b$ *sont les abscisses, tandis que* c *et* $-c$ *sont les ordonnées de ces points sur l'envers du plan fondamental.*

12. — Dans sa *séance administrative*, la Société a procédé au renouvellement de son comité pour 1920 et 1921. M. le prof. L. Crelier (Berne) a été élu président, M. le prof. O. Spiess (Bâle), vice-président, et M. le prof. Gustave Dumas (Lausanne) secrétaire-trésorier.

La prochaine réunion ordinaire aura lieu à *Neuchâtel*.

Nouvelles diverses. — Nominations et distinctions.

Angleterre. — M. G. H. Hardy, F. R. S., du Trinity College de Cambridge, a été nommé professeur de mathématiques pures à l'Université d'Oxford.

Belgique. — La Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique a élu, membre titulaire, M. Cl. Servais (Gand), et membre correspondant M. Th. Dedonder (Bruxelles).

Questions mises au concours. — La Classe des Sciences de l'Académie royale de Belgique a mis au concours les questions suivantes (séance du 7 mars 1914) :

On demande une contribution importante à la géométrie infinitésimale des surfaces courbes. — (Prix : huit cents francs.)

Résumer les travaux sur les systèmes de coniques dans l'espace et faire de nouvelles recherches sur ces systèmes. — (Prix : huit cents francs.)

Le délai, fixé primitivement au 1er août 1915, a été prorogé au 1er août 1920.

France. — *Collège de France.* Cours publics du 1er semestre à partir du 1er décembre 1919. — Nous relevons les cours suivants concernant les sciences mathématiques et physiques :

M. Humbert : Quelques applications des fonctions elliptiques. — M. Hadamard : L'œuvre de Poincaré : théorie des fonctions. — M. Brillouin : Propriétés générales des couches superficielles : en particulier des couches moléculaires liquides et solides. — M. Langevin : Les aspects successifs et les confirmations expérimentales du principe de relativité.

Académie des Sciences. — L'Académie a décerné le *Prix Bordin* à M. S. Lefschetz, ingénieur des Arts et Manufactures, professeur à l'Université de Kansas.

Italie. — M. L. Berzolari, professeur à l'Université de Pavie, et M. le colonel A. Crocco, de l'Institut aéronautique de Rome, ont été nommés membres correspondants de l'Académie Royale dei Lincei.

M. E. Daniele, professeur de mécanique rationnelle à l'Université de Catane, a été nommé à la même chaire de l'Université de Modène.

Yougoslavie. — Le Gouvernement du Royaume des Serbes, Croates et Slovènes vient de créer l'université de Lioubliana (anciennement Laibach), qui comprendra aussi une faculté technique.

M. J. Plemelj, professeur ordinaire à l'Université de Czernowitz (Roumanie), a été nommé professeur ordinaire de Mathématiques à l'Université de Lioubliana.

M. R. Zoupantchitch[1], docent honoraire de l'Ecole polytechnique de Vienne (Autriche), a été nommé professeur ordinaire de Mathématiques à l'Université de Lioubliana.

Nécrologie.

Gustave Demartres (18 mai 1848-11 juillet 1919). — La Faculté des Sciences de Lille a ses pertes de guerre[2]. Jean Claimix, professeur de mathématiques générales, a été tué le 26 août 1914 à Thun-Lévêque (Nord), comme adjudant au 26me régiment d'infanterie territoriale, après une carrière universitaire courte et féconde. Gustave Demartres, professeur de calcul différentiel et intégral, est décédé à Lille le 11 juillet 1919, des suites des souffrances physiques et morales qu'il endura pendant l'occupation allemande.

Demartres était, à proprement parler, le fils de ses œuvres : professeur de collège, déplacé d'un bout de la France à l'autre, seul et sans autre maître que les livres, il est reçu à la licence de mathématiques. Il demande un congé, vient suivre à Paris les cours de la Sorbonne, où il a comme condisciples Paul Appell et Émile Picard. Les cours de Darboux développent chez Demartres le goût de la géométrie; une fois reçu à l'agrégation, professeur au lycée de Rennes et chargé de conférences à la Faculté des

---

[1] M. R. Suppantschitch nous prie de mettre désormais l'orthographe française de son nom en accord avec les habitudes de ses collègues serbes et de l'écrire : Zoupantchitch.

[2] Parmi les professeurs non mathématiciens, la Faculté des Sciences de Lille a perdu aussi pendant la guerre : Gosselet, doyen honoraire, professeur honoraire de géologie et de minéralogie, membre de l'Académie des Sciences de Paris, décédé à Lille le 20 mars 1916 ; Lemoult, professeur de chimie générale, tué le 1er mai 1916 dans l'explosion de la poudrerie de La Pallice (Charente-Inférieure) ; Bertrand, professeur de botanique, décédé à Lille le 10 août 1917 ; Buisine, professeur de chimie appliquée, décédé le 19 mars 1918 à Milygany (Russie), où il avait été emmené comme otage.

Sciences, il fait une thèse remarquée de géométrie infinitésimale. Il est un an chargé du cours de mécanique rationnelle à la Faculté des Sciences de Montpellier, et le 1er novembre 1886 arrive à la Faculté des Sciences de Lille comme chargé du cours de calcul différentiel et intégral. Il remplaça M. Boussinesq dans la chaire de calcul différentiel et intégral le 1er mars 1888 : il vient d'y mourir, après avoir enseigné presque jusqu'à son dernier jour.

Par son labeur solitaire et acharné, il avait acquis une profonde érudition, il l'a entretenue constamment : il mettait une certaine coquetterie à se tenir au courant des publications les plus récentes, des nouvelles richesses du domaine mathématique, dont il augmentait lui-même le patrimoine. Il apportait à ses études et à ses travaux un esprit fin et délicat, un souci continuel de la beauté et de l'élégance, qu'il recherchait toujours dans l'expression de ses pensées, amoureux des belles phrases et du bon français.

Professeur éminent, « il a formé des élèves nombreux et enthousiastes », a dit M. Appell. Son érudition, sa remarquable mémoire lui permettaient de faire des leçons sans notes, dans une langue châtiée et harmonieuse. A sa suite, ses auditeurs apprenaient à admirer et à aimer les mathématiques. Il avait écrit pour eux un « Cours d'analyse » qui resta un temps le seul cours complet de cet ordre, et fut répandu dans toute la France parmi les étudiants de la licence mathématique. On n'en trouve plus maintenant de polycopies : par excès de modestie, il n'avait pas voulu le laisser imprimer. Puis, pendant de longues années, il avait apporté tous ses soins à écrire avec amour, à retoucher jusqu'au dernier moment son « Cours de Géométrie infinitésimale », qui a paru quelque temps avant la guerre, et dont le succès est déjà grand.

Demartres avait l'amour et la fierté de son métier. Il fut quelques années doyen de la Faculté des Sciences de Lille. Mêlé intimement à la vie de notre Université, il a contribué pour beaucoup à son développement. Il a été en France l'un des partisans les plus ardents et l'un des créateurs des cours de Mathématiques générales, dont l'utilité n'est plus à démontrer maintenant. Il payait de sa personne sans compter : resté à Lille pendant l'occupation, soumis à des vexations continuelles, torturé dans son patriotisme et dans son amour familial, il abandonne à soixante-huit ans son enseignement habituel, qui aurait rendu service à trop peu d'étudiants. Il organise un cours de Mathématiques générales et de Mathématiques spéciales. En permettant ainsi aux jeunes reclus d'aborder, après la délivrance, la carrière rêvée, il leur a donné un magnifique exemple de dévouement qu'ils ne pourront jamais oublier.

Quant à son patriotisme, l'ardeur en demeurera légendaire. Pendant l'occupation de Lille, sa foi dans la victoire française n'admettait nulle réserve. La fortune des armes, avec ses inévita-

bles vicissitudes, n'exerça jamais la plus légère influence sur sa conviction. La victoire du droit se déduisait pour lui de considérations inébranlables. Elle lui apparaissait — et il aimait à employer ce mot — comme une certitude mathématique. Cette magnifique confiance rayonnait de sa parole, gagnait autour de lui tous les cœurs et prévenait les défaillances. En dépit d'un deuil cruel et glorieux, il aura eu du moins la suprême joie de connaître le triomphe de cette patrie qu'il a si profondément aimée. *Ses collègues.*

A. Hurwitz. — M. Adolf Hurwitz, né à Hildesheim en 1859, professeur à l'Ecole polytechnique fédérale depuis 1892, vient de s'éteindre après une longue et cruelle maladie supportée avec le courage d'un stoïcien.

Précoce comme tous les mathématiciens de génie, il s'imposa à l'attention de ses confrères par la publication de sa thèse sur les fondements d'une théorie indépendante des fonctions modulaires elliptiques qui restera un de ses plus beaux titres de gloire. Ses nombreux travaux sur la théorie des nombres, l'algèbre et la théorie des fonctions ont tous un cachet de suprême distinction. Le souci de l'élégance et de la perfection y est poussé à un degré qu'on peut rêver d'égaler mais non de surpasser.

Ses recherches sur les séries de Fourier et l'application qu'il en a faite au problème des isopérimètres sont, en particulier, un véritable joyau dans l'écrin des vérités mathématiques.

Ces qualités de Hurwitz n'étaient dans l'ordre scientifique que le reflet du caractère de l'homme, fait de droiture et d'urbanité, d'un sentiment très élevé du devoir et d'un amour ardent de l'harmonie sous toutes ses formes.

Ses nombreux élèves et ses collègues garderont de leur cher maître et ami un souvenir ému et reconnaissant.

Zurich, novembre 1919. J. Franel.

H.-G. Zeuthen. — Le savant mathématicien danois M. H.-G. Zeuthen, professeur émérite à l'Université et à l'Ecole polytechnique de Copenhague, est décédé subitement le 6 janvier 1920, dans sa 81me année. A ceux qui, par suite d'une erreur, avaient annoncé sa mort au printemps 1919, il répondit par l'envoi de sa récente Note *sur l'origine de l'Algèbre*, publiée par la Société royale danoise des Sciences (1919, fasc. de 70 pages). (Voir l'*Ens. math.*, t. XX, p. 308 et 382.)

BIBLIOGRAPHIE

C. Caratheodory. — **Vorlesungen über reelle Funktionen.** — 1 vol. de 704 pages ; prix : Marks 30 ; Leipzig et Berlin, B. G. Teubner, 1918.

Alors que les compatriotes de Georges Cantor étaient attirés par les études sur le transfini, sur la suite des alephs et sur les questions relatives aux ensembles ordonnés ou bien ordonnés, Borel montrait le parti que l'on pouvait tirer de la théorie des ensembles dans l'étude des fonctions de variables réelles, Lebesgue créait l'intégrale qui porte son nom et par ses recherches, auxquelles il faut adjoindre celles de W. H. Young et de Ch. de la Vallée Poussin, il donnait un essor inattendu à la théorie des fonctions de variables réelles et à celle des développements en séries trigonométriques. Aussi s'explique-t-on, dans une certaine mesure, que jusqu'à présent aucun livre ne traite, en langue allemande, de la théorie moderne des fonctions de variables réelles. Le livre de M. Caratheodory comble cette lacune. Il contient dans ses 704 pages un exposé didactique et systématique complet de la théorie ; plusieurs chapitres intéresseront aussi le lecteur déjà familier avec la théorie de Lebesgue (chapitres V et X en particulier). L'ouvrage ne contient pas les applications de la théorie aux développements en séries trigonométriques ; il se contente d'exposer, avec une grande clarté, la théorie proprement dite des fonctions de variables réelles ; il rendra de grands services aux étudiants qui voudront s'initier à cette théorie. Table des matières. Introduction (1-18). — 1. Ensembles de points (19-71). — 2. La notion de limite (71-120). — 3. Fonctions (120-191). — 4. Distance et connexion (191-229). — 5. Aire et mesure (229-307). — 6. Multiplicités linéaires (307-369). — 7. Fonctions mesurables (369-413). — 8. L'intégrale définie (414-469). — 9. L'intégrale indéfinie et les fonctions d'ensembles, additives et absolument continues (469-510). — 10. Fonctions d'une variable (510-620). — 11. Fonctions de plusieurs variables (621-688). — Bibliographie (689-692). — Table des exemples (693-694). — Index (695-704).

M. Plancherel (Fribourg).

R. W. Wood. — **Researches in Physical Optics.** — Part II. Resonance Radiation and Resonance Spectra. (Publication Number Eight of the Ernest Kempton Adams Fund for Physical Research.) — 1 fasc. in-4°, 184 pages, 10 planches ; Columbia University Press, New-York, 1919.

Ce nouveau recueil de mémoires désormais classiques du célèbre physicien n'aura certainement pas moins de succès que la première partie de ses recherches sur l'optique physique formant le N° 6, actuellement épuisé, de la même collection. Le physicien y trouvera les méthodes les plus récentes de l'optique expérimentale moderne et le théoricien étudiera avec intérêt les résultats de ces belles recherches qui ont contribué à élargir nos connaissances sur la structure des atomes. Les sujets traités appartiennent sans exception au domaine de la spectroscopie et se rapportent plus spé-

cialement à l'étude des phénomènes de la résonance optique, de la fluorescence, de l'absorption et des effets magnéto-optiques. Un certain nombre de chapitres sont consacrés à la description des appareils perfectionnés et aux procédés techniques ingénieux qui ont permis d'obtenir un si grand nombre de résultats remarquables.

Il est impossible de donner en quelques lignes un aperçu de l'étendue et de l'importance de ces travaux, effectués en partie avec le concours de collaborateurs distingués tels que MM. Kimura, Speas, Ribaud, Hemsalech, C. F. Meyer, L. Dunoyer et Mohler.

Le texte est accompagné d'un grand nombre de figures explicatives, et les merveilleuses planches jointes à l'ouvrage, contenant des reproductions extrêmement réussies de clichés spectrographiques, forment des documents d'une valeur inestimable. A. Schidlof (Genève).

Universitatum & eminentium scholarum, Index generalis : Annuaire général des Universités, The Yearbook of the Universities, publié sous la direction de R. de Montessus de Ballore. — 1 vol. in-16 de 768 p. ; relié fr. 21, majoration temporaire 50 % ; Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Cet *Annuaire général des Universités* est destiné à remplacer le recueil publié jusqu'en 1914 par les Allemands sous le nom de *Minerva*. En entreprenant cette publication, M. R. de Montessus de Ballore et la Librairie Gauthier-Villars & Cie se sont imposés une tâche considérable. Leurs efforts ne manqueront pas d'être couronnés de succès. Nombreux sont en effet ceux qui auront recours à cet annuaire ; autorités scolaires et sociétés savantes, professeurs et étudiants, éditeurs et libraires, y trouveront des renseignements utiles concernant les Universités.

Ce nouveau recueil présente une innovation très heureuse. Tandis que dans *Minerva* les renseignements étaient classés par ordre alphabétique de noms de villes, l'*Index Generalis* groupe en seul chapitre les Hautes Ecoles d'un même pays. On y trouve, pour chaque établissement, la liste des chaires et de leurs titulaires. Pour les grands pays, ces indications sont précédées d'une *Introduction* consacrée à un aperçu de l'organisation scolaire (conditions d'immatriculation, liste des grades et des diplômes délivrés, droits à acquitter, etc.).

Signalons encore une autre innovation, la *liste d'échanges*, où peuvent se faire inscrire gracieusement les savants, professeurs ou non, qui désirent échanger avec leurs confrères les Mémoires originaux qu'ils ont publiés. La désignation des sujets qui les intéresse précède leurs noms ; l'inscription est limitée pour chacun à trois catégories. Cette liste qui s'allongera chaque année, fait de l'annuaire une œuvre vivante ; elle ne manquera pas de contribuer au développement des relations scientifiques internationales entre les savants qui poursuivent des recherches dans un même domaine.

H. F.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

1. Publications périodiques :

Académie Royale de Belgique, Bulletin de la Classe des Sciences. 1919. Nos 1 à 7. — Hayez, Bruxelles.

Annales de l'Université de Grenoble, tome XXX. 1918 — Gauthier-Villars, Paris ; Allier frères, Grenoble.

Annaes scientificos da Academia polytechnica do Porto, directeur F. Gomes Teixeira. — Vol. 12. Imprensa da Universidade, Coimbra.

Bollettino di Matematica. Giornale scientifico-didattico per l'incremento degli Studi matematici nelle scuole medie. Diretto dal Dott. Alb. Conti. Anno XVI. 1919, Roma.

Contribucion al Estudio de las Ciencias fisicas y matematicas. — Serie Matematico-fisica. Vol. II, Nos 3 et 4, 1918. — Serie Tecnica, Vol. I, No 6, 1918, La Plata.

Intermédiaire des Mathématiciens, dirigé par C.-A. Laisant, Ed. Maillet, A. Malusky, A. Boulanger. — Tome XXVI, 1919. — Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Isis, Revue Internationale consacrée à l'Histoire de la Science et de la Civilisation, publiée par G. Sarton. — No 6, tome II (fasc. 2 et dernier), Bruxelles. — G. R. Kaye : Indian Mathematics.

Jahrbuch über die Fórtschritte der Mathematik, Band 44, Jahrgang 1913 (in 3 Heften), Heft 3. — G. Reimer, Berlin.

Journal de Mathématiques élémentaires, publié par H. Vuibert, 44me année, 1919-1920. — Librairie Vuibert, Paris.

Mathesis. Quatrième série, tome IV, septembre-décembre 1914. — Hoste, Gand, Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Mathematical Gazette (The), publié par G. Greenstreet. Vol. IX, 1919. — G. Bell & Sons, Londres.

Nieuw Archief voor Wiskunde, publié sous les auspices de la Société des Sciences d'Amsterdam, par J.-C. Kluyver, D.-J. Korteweg et F. Schuh, 2me série, tome XIII, No 1. — Delsman en Nolthenius, Amsterdam, 1919.

Nyt Tidsskrift for Matematik. Revue dirigée par P. Heegaard, série A, 29me année ; série B, 29me année ; 1918. — Copenhague.

Rendiconti del Circolo matematico di Palermo. Tome XLII, fasc. II et III. — G. Marietta : Delle superficie algebriche d'ordine 6 con un fascio di cubiche ellitiche. — G. Prasad : On the Newtonian potential due to a sur-

face distribution having a discontinuity of the second kind. — E. J. Wilczynski : Integral invariants in projective Geometry. — Brusotti : Curve generatrici e curve aggregate nella costruzione di curve piane d'ordine assegnato dotate del massimo numero di circuiti. — Eisenhart : Certain surfaces of Voss and surfaces associated with them. — N. Lusin et W. Sierpinski : Démonstration élémentaire du théorème fondamental sur la densité des ensembles. — T. Levi-Civita : Nozione di parallelismo in una varietà qualunque e conseguente specificazione geometrica della curvatura riemanniana. — P. Nalli : Sopra una relazione fra la teoria della composizione di prima specie et lo studio delle serie divergenti. — F. Severi : Sulla curvatura delle superficie et varietà. — J. L. Coolidge : The characteristic numbers of a real algebraic plane curve. — G. Valiron : Remarques sur la sommation des séries divergentes par les méthodes de M. Borel. — A. Vergerio : Sulle equazioni integrale di prima specie a nucleo non simmetrico. — G. Sannia : Nuovo metodo di sommazione delle serie : estensione del metodo di Borel. — E. Ciani : Sopra alcuno gruppi notevoli di trasformazioni quadratiche piane. — V. Amato : Sulla risoluzione apiristica, in un corpo quadratico, della congruenza binomia quadratica e di una classe di congruenze binomie il cui modulo è un ideale primo 2° grado.

Revista Matematica Hispano-Americana, dirigée par J. Rey-Pastor. Tome I. — Madrid, 1919.

Revue scientifique. Directeur : Ch. Moureu. — 57me année, 1919. — 55, rue de Châteaudun, Paris.

Revue semestrielle des Publications mathématiques. Tome XXVII, 1re partie, 1918, avril-octobre. — 2me partie, octobre 1918-avril 1919. — Delsman en Nolthenius, Amsterdam.

School Science and Mathematics. — A Journal for all Science and Mathematics Teachers. Vol. XVIII, 1918. — Smith and Turton, Chicago.

Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften, herausgegeben von K. Schwab und A. Maurer. — XXV. Jahrgang, 1919. Otto Salle, Berlin.

Wiskundige Opgaven met de Oplossingen. Tome XIII, Delsman en Nolthenius, Amsterdam.

Zeitschrift für das Realschulwesen, Wien, XLIII Jahrgang. — J. Radakovits : Bestimmung des Restes bei der Teilung einer Zahl durch 7. — A. Haltmeyer : Eine einfache Ableitung der Zentralkraftsformel. — F. Dietrich : Ueber Cartesische Kurven. — E. Vogel : Die Probe zur « nicht aufgehenden Division ». — F. Dietrich : Cartesische Kurven als Normalrisse von Raumkurven. — E. Czuber : Sterblichkeit, Tontine und Lebensversicherung. — A. Lechner : Ueber die Einführung von Trägheitsfaktoren in die Mechanik. — R. Seelig : Ueber doppelt berührende Kegelschnitte. — J. Opl : Darstellung der Parabel aus ihren Bestimmungsstücken. — W. Hofmann : Kleiner Beitrag zur Behandlung der Gleichungen in den Oberklassen der Mittelschulen. — J. Pollak : Geometrische Ableitung und Erweiterung der Newtonschen Näherungsmethode für die Bestimmung irrationaler Wurzeln einer Gleichung höheren Grades. — H. Beran . Zur Teilbarkeit der Zahlen. — W. Bock : Ueber die Erzeugung von Flächen 2.

Grades durch Drehung von Geraden und Kegelschnitten. — J. Radakovits : Das Umkehrungs- oder Reversionspendel. — M. Zdelar : Ueber die Bestimmung der Schnittlinie zweier Ebenen, deren Spurenschnittpunkte unzugänglich sind. — F. Redl : Eine neue Achsenkonstruktion für die Ellipse. — J. Opl : Ein fünfter merkwürdiger Punkt des Dreieckes. — Popper-Lynkeus : Erweiterung eines Dreiecksatzes. — P. v. Schaewen : Ueber pythagoreische Dreiecke.

Annals of Mathematics published under the auspices of the Princeton University N. J. — 2me série, vol. 20. — G. P. Horton : Functions of limited Variation and Lebesgue Integrals. — N. Altshiller : On the Teixeira Construction of the Unicursal Cubic. — G. A. Pfeiffer : The Functional $f[f(x)] = g(x)$. — M. F. Curtis : The Existence of the Functions of the elliptic Cylinder. — T. H. Gronwall : The Gamma Function in the Integral Calculus. — O. E. Glenn : Invariants which are Functions of Parameters of the Transformation. — H. Blumberg : A Theorem on Exhaustible Sets Connected with Developments of Positive Real Numbers. — A. Pell : Solution of the Differential Equation $dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2$ and its Application to some Geometrical Problems. — L. L. Smail : A General Method of Summation of Divergent Series. — L. E. Dickson : On Quaternions and their Generalization and the History of the Eight Square Theorem. — C. E. Seely : Non-Symmetric Kernels of Positive Type. — H. E. Bray : Elementary Properties of the Stieltjes Integral. — J. K. Whittemore : A Kinematical Property of Ruled Surfaces. — L. L. Dines : Systems of Linear Inequalities. — T. H. Gronwall : On the Shortest Line Between two Points in Non Euclidean Geometry. — E. L. Post : The Generalized Gamma Functions. — R. L. Moore and J. R. Kline : On the Most General Plane Closed Point-Set through which it is Possible to pass a Simple Continuous Arc. — D. C. Gilles-Pie : Repeated Integrals. — G.-A. Miller : Relations between Abstract Group Properties and Substitution Groups. — G. W. Clawson : The Complete Quadrilateral. — L. P. Eisenhart : Triply Conjugate Systems with Equal Point Invariants. — T. H. Gronwall : On a System of Linear Partial Differential Equations of the Hyperbolic Type. — J. H. Weaver : Some Properties of Circles and Related Conics. — P. J. Daniell : Integrals in an Infinite Number of Dimensions. — J. F. Ritt : On the Differentiability of the Solution of a Differential Equation with Respect to a Parameter. — T. H. Gronwall : Note on the Derivatives with Respect to a Paramater of the Solutions of a System of Differential Equations. — L. E. Dickson : On Quaternions and their Generalization and the History of the Eight-Square Theorem. Addenda.

Bulletin des Sciences mathématiques, rédigé par MM. E. Picard et P. Appell. 2me série, tome XLII. Paris 1918. — Bertrand de Fontviolant : Les méthodes modernes de la résistance des matériaux. — G. D. Birkhoff : Sur la démonstration directe du dernier théorème de Henri Poincaré, par M. Dantzig. — M. Bottasso : Quelques remarques sur le système vectoriel de MM. Burali-Forti et Marcolongo. — M. Brillouin : Sources électromagnétiques dans les milieux uniaxes. — A. Buhl : Sur les sommes abéliennes de volume cylindroconiques. — M. Fréchet : Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits. — F. Gonseth : Un théorème relatif à deux ellipsoïdes confocaux. — G. Julia : Sur les valeurs limites de l intégrale de Poisson relative à la sphère en un point de discontinuité des

données. — Th. Lalesco : Sur l'addition des noyaux non-orthogonaux. — M. Petrovitch : L'aire des surfaces de révolution. — H. Vergne : Théorie élémentaire du mouvement de précession et de la déviation des projectiles. — H. Villat : Quelques récents progrès des théories hydrodynamiques. — C. de Waard : Un écrit de Beaugrand sur la méthode des tangentes de Fermat à propos de celles de Descartes.

Bulletin of the American Mathematical Society. — Volume XXV, Nos 6-10. — C. N. Moore : Applications of the Theory of Summability to Developments in Orthogonal Functions. — L. E. Dickson : Mathematics in War Perspective Presidential Address. — E. T. Bell : A Partial Isomorph of Trigonometry. — L. D. Cummings : The Trains for the 36 Groupless Triad Systems on 15 Elements. — Hayashi : A Theorem on Areas. — G. H. Hallett : Concerning the Definition of a Simple Continuous Arc. — J. E. Mc Atee : The Transformation of a Regular Group into its Conjoint. — W. F. Osgood : The Life and Services of Maxime Böcher. — H. Blumberg : A Theorem on Linear Point Sets. -- P. J. Daniell : A General Form of Green's Theorem. — H. Bateman : Rotating Cylinders and Rectilinear Vortices. — A. Emch : On a Certain Generation of Rational Circular and Isotropic Curves. — L. E. Wear : The Self-Dual Plane Rational Quintic. — G. A. Miller : Groups Containing a Relatively Large Number of Operators of Order Two. — P. J. Daniell : The Derivative of a Functional. — H. F. Blichfeldt : Report on the Theory of the Geometry of Numbers. — L. E. Dickson : Applications of the Geometry of Numbers to Algebraic Numbers. — A. A. Bennett : Product of Skew-Symmetric Matrices. — H. S. Vandiver : On the First Factor of the Class Number of a Cyclotomic Field.

Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris. — 1er semestre 1919. — *6 janvier.* — C. Guichard : Sur une série de surfaces à courbure totale constante telles que leurs lignes de courbure forment un réseau du type $pA' - (p+1)B'$. — J. Drach : Détermination des cas de réduction de l'équation différentielle $d^2y/dx^2 = [\varphi(x) + h]y$. — H. Duport : Sur les équations aux dérivées partielles. — *13 janvier.* — J. Chazy : Remarque sur les problèmes des deux corps et de trois corps. — H. Bourget : Développement algébrique de la partie principale de la fonction perturbatrice suivant la méthode de Cauchy. — *20 janvier.* — R. Garnier : Sur les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires. — Riquier : Sur le prolongement analytique des intégrales de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles linéaires. — G. Julia : Sur quelques problèmes relatifs à l'itération des fractions rationnelles. — P. Levy : Sur les fonctions de lignes implicites. — A. Guldberg : Sur les erreurs de situation d'un point. — *27 janvier.* — C. Guichard : Sur la déformation des quadriques. — J. Drach : Sur les solutions algébriques des équations différentielles du premier ordre. — P. Montel : Sur les polynomes d'approximation et l'existence des dérivées. — E. Maillet : Détermination des points entiers des courbes algébriques universales à coefficients entiers. — *3 février.* — A. Angelesco : Sur les deux extensions des fractions continues algébriques. — Edm. Maillet : Sur le mouvement graduellement varié et la propagation des crues. — *17 février.* — J. Drach : Sur l'intégration par quadrature de l'équation $d^2y/dx^2 = F(x, y)$. — *24 février.* — Arm. Denjoy : Sur une propriété des fonctions de variable complexe. — *3 mars.* — R. Garnier : Sur

les singularités irrégulières des équations différentielles linéaires. — *10 mars.* — P. Fatou : Sur les lignes singulières des fonctions analytiques. — G. Julia : Une propriété générale des fonctions entières liée au théorème de M. Picard. — A. Buhl : Sur l'échange du paramètre et de l'argument ; analogie avec la réduction des intégrales doubles de seconde espèce. — L. Lecornu : Sur l'écoulement des fluides. — M. Hamy : Sur l'étude des perturbations de l'axe optique d'une méridienne en direction. — *17 mars.* — R. Gambier : Surfaces applicables l'une sur l'autre. — J. Hadamard : Remarque sur l'intégrale résiduelle. — Harald Cramer : Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$. — M. Petrovitch : Fonctions entières se rattachant aux nombres premiers. — V. Brun : Le crible d'Eratosthène et le théorème de Goldbach. — Emile Cotton : Sur la formule de Bernoulli. — C. Raveau : Comment Carnot a calculé l'équivalent mécanique de la chaleur. Un document inédit. — *24 mars.* — G. Julia : Quelques propriétés générales des fonctions entières liées au théorème de M. Picard. — A. Petot : Sur la théorie analytique des turbines hydrauliques. — *31 mars.* — S. Lefschetz : Sur l'analyse situs des variétés algébriques. — B. Gambier : Surfaces applicables sur le paraboloïde de révolution. — L. E. J. Brouwer : Enumération des surfaces de Riemann régulières de genre un. — *7 avril.* — G. Julia : Quelques propriétés des fonctions méromorphes générales. — N. Kryloff : Sur quelques formules d'approximation, fondées sur la généralisation des quadratures, dites mécaniques. — *14 avril.* — P. Levy : Sur la généralisation de l'équation de Laplace dans le domaine fonctionnel. — E. Bompiani : Sur les courbes quasi-asymptotiques des surfaces dans un espace quelconque. — S. Lefschetz : Sur les variétés abéliennes. — *22 avril.* — G. Julia : Quelques propriétés des fonctions entières ou méromorphes. — A. Guldberg : Sur la loi des erreurs de Bravais. — *28 avril.* — Carleman : Sur la représentation conforme des domaines multiplement connexes. — A. Denjoy. — Sur la vraie valeur des intégrales définies. — L. E. J. Brouwer : Enumération des groupes finis de transformations topologiques du tore. — *5 mai.* — Defourneaux : Sur quelques propriétés des polynomes électro-sphériques. — G. Julia : Sur les fonctions uniformes à point singulier essentiel isolé. — *12 mai.* — G. Humbert : Sur la mesure des classes de formes quadratiques, ternaires et positives. — L. Lecornu : Sur les tourbillons d'une veine fluide. — E. Belot : Sur les orbites spirales à gravitation équilibrée. — *19 mai.* — G. Julia : Sur les fonctions entières ou méromorphes. — E. Kogbetliantz : Sur les développements de Jacobi. — C. Guichard : Sur un mode de génération des surfaces isothermiques à lignes de courbure planes dans un système. — G. Humbert : Sur la mesure des classes de formes quadratiques, ternaires et positives, de déterminant donné. — *26 mai.* — L. E. J. Brouwer : Sur les points invariants des transformations topologiques des surfaces — *2 juin.* — G. Julia : Les fonctions entières et la croissance. — E. Kogbetliantz : Sur la sommation des séries divergentes. — *10 juin.* — E. Borel : La théorie des ensembles et les nombres décimaux. — P. Boutroux : Sur un mode de définition d'une classe de fonctions multiformes dans tout le domaine d'existence de ces fonctions. — H. Cramer : Sur la distribution des nombres premiers. — *16 juin.* — C. Guichard : Sur les surfaces isothermiques. — E. Kogbetliantz : Sur les séries trigonométriques. — *23 juin.* — A. Egnell : Champs vectoriels à directions asymptotiques indéterminées. — G. Remoundos : Les singularités des équations différentielles et les séries sommables. — G. Humbert : Sur les formes

quadratiques positives d'Hermite. — *30 juin.* — Pierre Boutroux : Sur une famille de fonctions multiformes, intégrales d'une équation différentielle du premier ordre.

Mathematische Annalen, Band 79. B. G. Teubner, Leipzig. — S. Bernstein : Quelques remarques sur l'interpolation. — H. Berliner : Ueber zwei neue projektive natürliche Geometrien. — H. Dingler : Ueber wohlgeordnete Mengen. — W. Schmeidler : Zur Theorie der primären Punktmoduln. — R. König : Die Reduktions- und Reziprozitätstheoreme bei den Riemannschen Transzendenten. — H. Bohr : Zur Theorie der allgemeinen Dirichletschen Reihen. — F. Hausdorff : Dimension und äusseres Mass. — H. Mohrmann : Ueber die Grassmannschen Doppelverhältnisse von vier geraden Linien im Raum. — Th. Reye : Die Symmetrieachsen des Nullraums und seines linearen Strahlenkomplexes. — W. Gross : Eine ganze Funktion, für die jede komplexe Zahl Konvergenzwert ist. — J. Brouwer : Ueber die Erweiterung des Definitionsbereichs einer stetigen Funktion. — (Id.) : Lebesguesches Mass und Analysis Situs. — L. Lowenheim : Gebietsdeterminanten. — F. Carlson : Ueber Potenzreihen mit endlich vielen verschiedenen Koeffizienten — E. Trefftz : Eine neue Methode zur Lösung der Randwertaufgabe partieller Differentialgleichungen. — Felix Bernstein : Ueber das Fourier integral $\int_0^\infty e^{-x^4} \cos tx$. — J. Nielsen : Ueber die Isomorphismen unendlicher Gruppen ohne Relation. — V. Geilen : Beitrag zur Kleinschen Theorie der Ikosaeders. — O. Haupt : Ueber lineare homogene Differentialgleichungen 2. Ordnung mit periodischen Koeffizienten. — A. Ostrowski : Neuer Beweis des Hölderschen Satzes, dass die Gammafunktion keiner algebraischen Differentialgleichung genügt. — H. Vermeil : Bestimmung einer quadratischen Differentialform aus der Riemannschen und den Christoffelschen Differential in varianten mit Hilfe von Normalkoordinaten. — A. Hurwitz : Ueber die algebraische Darstellung der Normgebilde. — M. Bauer : Bemerkungen über die Differente des algebraischen Zahlkörpers. — G. Szego : Ueber trigonometrische und harmonische Polynome. — H. Rademacher : Ueber partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln und über die Transformation der Doppelintegrale. — A. Ostrowski : Ueber eine neue Eigenschaft der Diskriminanten und Resultanten binärer Formen. — E. Landau : Ueber die Wurzeln der Zetafunktion eines algebraischen Zahlkörpers. — C. Caratheodory : Ueber die Studysche Rundungschranke. — L. E. Brouwer : Nachträgliche Bemerkung über die Erweiterung des Definitionsbereichs einer stetigen Funktion.

The Mathematics Teacher. Volume XI, 1918-1919. — F. F. Decker : The New-York State Regents Syllabus in Intermediate Algebra. — E. D. Roe : A Geometric Representation. — G. W. Evans : The Reconstruction of the Mathematical Requirement. — C. E. Stromquist : A Geometric Illustration of Limits. — J. L. Green : Character-Building Content of Arithmetic. — H. A. Merrill : Why Students Fail in Mathematics. — R. C. Colwell : A Solution of Equations by Standard Curves. — W. E. Breckenridge : War Problems in Mathematics. — J. H. Minnick : Arithmetical Errors made by High School Pupils. — W. H. Metzler : Some Relations Connecting the Sums of the Coaxial Minors of a Circulant. — D. E. Smith : Intro-

ductory Course in Mathematics. — R. R. Goff : First-Year Algebra, as Developed in the Academic High School, New-Britain, Conn — M. O. Tripp : Indeterminate Forms in Trigonometry. — Ph. A. Boyer : The Courtis Tests in Arithmetic. — Report of the Committee to Recommend a Suitable Program in Mathematics for the Junior High School. — Test of Mathematical Ability. — Their Scope and Significance. — Some Suggestions for Courses in Mathematics for Non-College Preparatory Students. — N. L. Ingels : A Statistical Study in Correlation of Efficiency in Secondary Mathematics and Efficiency in Other High School Branches. — A Mathematical Recreation. — A. L. Booth : Some Angles of the Right Triangle. — W. P. Webber : A Psychological Basis for a System of Education with Applications to Mathematics. — F. A. Foraker : Philosophy and Non-Euclidean Geometry. — J. H. Minnick : Mathematical Tests : Their Relation to the Mathematics Teacher.

Proceedings of the London Mathematical Society. — Séries 2, vol. 17, 1918. — W. H. and Grace Ch. Young : On the Inherently Crystalline Structure of a Function of any Number of Variables. — J. Hodgkinson : An Application of Conformal Representation of certain Hypergeometric Series. — P. A. Mac Mahon : Combinations derived from m identical Sets of n different Letters and their Connexion with General Magic Squares. — W. Burnside : On the Efficiency of a Surface of Pressure Discontinuity regarded as a Propeller. — D. Buchanan : Orbits asymptotic to an Isosceles-Triangle Solution of the Problem of Three Bodies. — G. H. Hardy and S. Ramanujan : Asymptotic Formulæ in Combinatory Analysis. — G. N. Watson : The Harmonic Functions associated with the Parabolic Cylinder. — M. J. M. Hill : On the Singular Solutions of Ordinary Differential Equations of the First Order with Transcendental Coefficients. — A. E. Jolliffe : A Property of the Pencil formed by the Tangents from any Points to a Nodal Cubic, and some Properties of the Quadrangle formed by their Points of Contact. — W. H. Young : On the Convergence of the Derived Series of Fourier Series. — W. P. Milne : A Symmetrical Condition for Co-Apolar Triads on a Cubic Curve. — G. N. Watson : The Integral Formula for Generalized Legendre Functions. — J. H. Grace : The Classification of Rational Approximations. — Id. : Tetrahedra in relation to Spheres and Quadrics. — Hanumanta Rao : On the Curves which lie on the Quartic Surface in Space of four Dimensions and the corresponding Curves on the Cubic Surface and the Quartic with a Double Conic. — E. B. Elliott : Examples of the Formal Analysis of Solutions of Differential Equations of certain Classes. — J. H. Grace : Note on Diophantine Approximation. — J. M. Hill : On the Continuation of the Hypergeometric Series. — K. Anandarau : A Note on a Theorem of Mr. Hardy's. — E. B. Stouffer : On Invariants and Covariants of Linear Homogeneous Equations. — W. H. Young : On Restricted Fourier Series and the Convergence of Power Series. — Index of Proceedings.

2. Livres nouveaux :

Universitatum & eminentium scholarum, Index generalis; Annuaire général des Universités, The Yearbook of the Universities, publié sous la direction de R. de Montessus de Ballore. — 1 vol. in-16 double couronne de 768 p. ; relié fr. 21, majoration temporaire 50 %: Gauthier-Villars & Cie, Paris.

P. Bachmann. — **Das Fermatproblem** in seiner bisherigen Entwicklung. — 1 vol. in-8°. 160 p. ; broché 12 Marks ; Vereinigung wissenschaftlicher Verleger, Walter de Gruyter & C°, Berlin.

R. Bonola. — **Die nichteuklidische Geometrie.** Historisch-kritische Darstellung ihrer Entwicklung. Deutsche Ausgabe von Liebmann ; 2. Aufl. (Wissenschaft u. Hypothese, Band IV) — 1 vol. in-8°, 207 p., ; broché 6 M. 40 ; B. G. Teubner, Leipzig.

H. Brocard et T. Lemoyne. — **Courbes géometriques remarquables.** Tome I. — 1 vol. gr. in-8° de vii-452 p. ; 18 fr. ; Vuibert, Paris.

G. Cerf. — **Sur les transformations des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque à deux variables indépendantes**; thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris. — 1 vol. in-4°, 104 p. : Gauthier-Villars & Cie, Paris.

Axibal Scipiao Gomez de Carvalho. — **A Teoria das Tangentes** antes da Invenção do Cálculo Diferencial (thèse). — 1 vol. in-8°. 98 p. ; Imprensa da Universidade, Coimbra.

Karpinski. Benedict and Calhoun. — **Unified Mathematics.** — 1 vol. in-8°, 522 p. ; sh. 10/6 ; George G. Harrap & C°, Londres, W. C.

W. Lietzmann. — **Riesen und Zwerge im Zahlenreich,** 2. Aufl. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, Band 25). — 1 vol. in-16, 58 p. ; cart. 1 M. ; B. G. Teubner, Leipzig.

P. Luckey. — **Einführung in die Nomographie,** 2. Teil : Die Zeichnung als Rechenmaschine (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, Band 37). — 1 vol. in-16, 63 p. ; cart. 1 M. 40 ; B. G. Teubner, Leipzig.

A. Rohrberg. — **Theorie und Praxis des logarithmischen Rechenschiebers,** 2. Aufl. (Mathematisch-Physikalische Bibliothek, Band 23). — 1 vol. in-16, 51 p. ; cart. 1 M. 40 ; B. G. Teubner, Leipzig.

C. Runge. — **Graphische Methoden,** 2. Aufl. (Sammlung math.-phys. Lehrbücher, 18). — 1 vol. in-8°, 130 p. ; cart. 4 M. 80 ; B. G. Teubner, Leipzig.

Th. Schmid. — **Darstellende Geometrie** (Sammlung Schubert LXV). 2. Auflage. — 1 vol. in-8°, 278 p. ; relié 15 M. 40 ; Vereinigung wissenschaftlicher Verleger, Walter de Gruyter & C°, Berlin.

A. Sourek. — **Cours de Géométrie descriptive** (en bulgare). — 1 vol. gr. in-8°, relié, XXIV-616 p. ; Sofia, 1914.

Opere di Evangelista Torricelli, edite in occasione del III centenario della nascita col concorso del Comune di Faenza, da G. Loria et G. Vassura. — 3 vol. in-4° ; fr. 60. — Volume I, 1 : *Geometria,* 407 p., 373 fig. — Volume I, 2 : *Geometria,* 482 p., 567 fig., 2 tables lithogr. — Volume II : *Lezioni Accademiche ; Meccanica ; Scritti vari,* 320 p., 250 fig., 4 tables lithogr. — Volume III : *Racconto d'alcuni problemi, Carteggio scientifico,* 521 p., 260 fig., quelques fac-simile et autographes. — Amministrazione degli Istituti Riuniti Educativi, Faenza.

G. Vivanti — **Lezioni di Analisi infinitesimale,** seconda edizione, riveduta ed ampliata. — 1 vol. in-8°, 326 p. ; L. 50 ; S. Lattes & C°, Turin.

H. G. Zeuthen. — **Sur l'origine de l'Algèbre.** — 1 fasc. in-8°, 70 p. ; Fr. Host & Son, Copenhague.

Nomenclature des Journaux, Revues, Périodiques français paraissant en France et en langue française à l'étranger, publiée par l'*Argus de la Presse.* 1 vol. in-8°, 329 p. ; Argus, 37, rue Bergère, Paris.

TABLE DES MATIÈRES

ARTICLES GÉNÉRAUX

Méthodologie et Notes diverses.

Pages

L'approximation des fonctions d'une variable réelle. Par C. de la Vallée-Poussin 5

Deux récents ouvrages de Géométrie. Par A. Buhl 30

Remarques sur la construction des courbes gauches avec application à la parabole cubique (avec 2 figures). Par G. Loria 43

Théorie élémentaire de la toupie gyroscopique (avec 1 figure). Par M. Zack 47

Sur les congruences linéaires de cubiques gauches douées d'une seule courbe singulière. Par L. Godeaux 81

Sur la gerbe de cubiques gauches passant par cinq points. Par F. Gonseth 90

Sur les trajectoires d'un mobile soumis à une force centrale et à une résistance du milieu. Par C. Cailler 93

Sur certaines identités vectorielles et leur interprétation dans la géométrie sphérique et plane (avec 3 figures). Par M. Fr. Daniels . . 97

Notions d'Arithmogéométrie (5me et dernier article). Par E. Turrière. 161

Sur la « variété moyenne » de deux variétés convexes (avec 9 figures). Par G. Tiercy. 175

Contribution à la construction des éléments doubles d'une involution hyperbolique (avec 3 figures). Par F. Redl 190

Extraction de la racine n^{me} d'un nombre réel par approximations successives. Par M. T. Beritch 194

Note sur les permutations (avec 2 figures). Par A. Aubry 199

Sur la rectification approchée d'un arc de cercle (avec 4 figures). Par A. Pleskot 215

Les noms et les choses. Remarques sur la nomenclature mathématique. Par G. Loria 237

Remarques sur l'intégrale $\int uvdx$. Par M. Petrovitch 268

Combinaisons déterminantes. Par J. Helmis 271

Sur la détermination et quelques propriétés des lignes élastiques (avec 4 figures). Par M. Zack. 276

Sur les équations transcendantes qui se présentent dans la théorie des tiges élastiques. Par M. Paschoud 286

Pages

Sur une transformation élémentaire et sur quelques intégrales définies et indéfinies. Par C. Cailler 317
Sur une intégrale. Par F. Vaney et M. Paschoud 338
Extension de la notion de Jacobien. Par M. Stuyvaert 347
Sur la représentation proportionnelle en matière électorale (avec 2 figures). Par G. Pólya 355
Sur l'élimination algébrique ; première partie. Par Ch. Riquier . . 405
Nouveaux théorèmes sur le viriel de forces et leurs applications géométriques et mécaniques (avec 3 figures). Par Farid Boulad . . 421
Sur les foyers rationnels d'une courbe algébrique. Par Emile Turrière 433

Histoire et Philosophie.

Pensée axiomatique. Par D. Hilbert 122
Les origines d'un problème inédit de E. Toricelli. Par E. Turrière . 245

MÉLANGES ET CORRESPONDANCE

A propos d'un problème de Lagrange sur la construction des cartes géographiques. Par L. Ballif 219
A propos d'un article sur la rectification approchée des arcs de cercle. Par M. d'Ocagne 292
A propos d'un article de M. C. de la Vallée-Poussin sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Par H. Brocard 293
A propos d'une Note sur les permutations. Par H. Brocard . . . 293
A propos d'un problème inédit de E. Toricelli. Par E. Turrière . . 379
A propos d'une Note de M. Paschoud. Par E. Jahnke 379

CHRONIQUE

Articles divers.

La collaboration scientifique internationale. Déclaration et résolutions votées par la Conférence interalliée des Académies scientifiques . 294
Allemagne : Nominations et distinctions 302, 380
Société Mathématique allemande 302
Angleterre : Médailles de la Société Royale de Londres 223
British Association for the advancement of Science 303
Nominations et distinctions 381, 449
Prix Adams 303
Autriche. — Nominations et distinctions 381
Belgique : Académie Royale de Belgique 223, 303, 449
Nominations et distinctions. 381
Société Royale des Sciences de Liége 303
Danemark : Nominations et distinctions 67, 382
Matematisk Tidsskrift 303
Espagne : Nominations et distinctions — El Progresso scientifico . . 371

Pages
Etats-Unis : Nominations et distinctions 137
Catalogue des périodiques 137
Thèses de doctorat, 1917-1918 223
American Mathematical Society. — Mathematical Association of America 303
France : Académie des Sciences de Paris ; prix décernés 137, 221, 380, 449
Académie des Sciences de Paris ; questions mises au concours . . 222
Nominations et distinctions 68, 137, 303, 382
Société Mathématique de France 303
Université de Strasbourg 382
Italie : Nominations et distinctions 68, 138, 304, 383, 450
Periodico di Matematica 68
Circolo Matematico di Palermo 304
Norvège : Nominations et distinctions. — Société mathématique . . 304
Suisse : Société mathématique suisse ; réunion de Lugano, septembre 1919 . . . . . 68, 436
Société suisse des professeurs de mathématiques ; réunion de Baden, octobre 1917 63
Id. ; réunion de Bâle, octobre 1918 298
Nominations 68, 305, 138
Yougo-Slavie : Nominations 450

Nécrologie.

Cr. Alasia de Quesada . . 305
Léon Ballif 305
Maxime Böcher 226
Matteo Bottasso 305
E. Böttcher 383
C. Brandenberger (H. F.). . 306
G. Cantor 68
François Daniëls 226
O. Danzer 383
G. Demartres 450
Marcel Deprez 226
Ulisse Dini 307
Emile Dumont 307
O. Dziobek 383
Albert Gauthier-Villars (*La Réd.*) 136
F. Græfe 383
J. H. Graf (L. Crelier) 138, 224
Antoine Gob. 383
A. Hurwitz (J. Franel) . . 452
S. Lattès (A. B.) 138
E. E. Levi 69
Emile Lampe (H. F.) . . . 307
A. M. Liapounoff 307
Gaston Milhaud. 226
Paul Mansion (H. F.) . . . 308
E. R. Neovius 69
E. Netto 383
P. Piazetti 138
K. Th. Reye. 383
Max Simon 69
C. Stephanos 139
R. Sturm 383
L. Sylow. 227
A. Viterbi 69
Ch. Wolf 139
J. Wellstein. 383
H. A. Zeuthen (H. F.) 308, 382, 452

NOTES ET DOCUMENTS

Cours universitaires.

Etats-Unis. 139, 384
France 227, 386, 449
Italie 140, 386
Suisse 141, 388

BIBLIOGRAPHIE

Pages

Annuaire pour l'an 1918, publié par le Bureau des Longitudes . . 70
Annuaire général des Universités, Index generalis, publié sous la direction de R. de Montessus de Ballore. *(H. F.)* 454
Appell et Dautheville (P. et S.). — Précis de Mécanique rationnelle. *(A. Buhl)* 369
Bierberbach (L.). — Differential- und Integralrechnung. *(H. F.)* . . 228
Borel (E.). — Leçons sur les fonctions monogènes uniformes d'une variable complexe. *(A. Buhl.)* 143
Bouligand (G.). — Cours de Géométrie analytique. *(C.-A. Laisant)* . 390
Boutroux (P.). — Les principes de l'analyse mathématique. *(A. Buhl)* 391
Caratheodory (C.). — Vorlesungen über reelle Funktionen. *(M. Plancherel)* 453
Clapier (F.-C.). — Sur les surfaces minima ou élassoïdes. *(E. Turrière)* 392
Du Pasquier (G.). — Introduction à la science actuarielle. *(R. Masson)* 311
Flamard (E.). — Calcul des systèmes élastiques de la construction. (Encyclopédie industrielle) 144
Forsyth (A. R.). — Solutions of the Examples in a Treatise on Differential Equations 228
Fueter (R.). — Synthetische Zahlentheorie. *(M. Plancherel)* . . . 70
Fricke (R.). — Lehrbuch der Differential- und Integralrechnung und ihrer Anwendungen. *(H. F.)* 312
Galé (J.-G.). — Matematicas Financieras. *(R. Masson)* 71
Gerbaldi et Loria (Fr. et G.). — Scritti Matematici offerti ad Enrico d'Ovidio. *(H. F.)* 229
Goursat (E.). — Cours d'analyse mathématique. *(H. F.)* 313
Guimares (R.). — Sur la vie et l'œuvre de Pedro Nunes. *(E. Turrière)* 312
Halphen (G. H.). — Œuvres, t. II. *(A. Buhl)*. 393
Hermite (Ch.). — Œuvres, t. IV. *(H. F.)* 145
Kollros (L.). — Géométrie descriptive. *(H. F.)* 146
Kiepert (L.). — Grundriss der Differential- und Integral-Rechnung . 230
Landau (E.). — Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale. *(M. Plancherel)* . . . 147
Lecornu (L.). — Cours de Mécanique. *(A. Buhl)*. 149
Lœwy (A.). — Lehrbuch der Algebra. *(H. F.)* 395
Montessus de Ballore (R. de). — Introduction à la Theorie des courbes gauches algébriques. *(A. Buhl)* 395
D'Ocagne (M.). — Cours de Géométrie pure et appliquée de l'Ecole Polytechnique. *(A. Buhl)* 151
Pringsheim (A.). — Vorlesungen über Zahlen- und Funktionenlehre *(H. F.)* 72
Ramsey (A. S.). — Elementary geometrical optics 154
Selme (L.) — Principe de Carnot contre formule empirique de Clausius. *(A. Schidlof.)* 72
Thomson (J. J.). — La théorie atomique. *(A. Buhl)* 397
Vivanti (G.). — Nuovi Esercizi di Analisi infinitesimale. *(H. F.)* . . 73
Whitehead (A. N.). — The Organisation of Thought. *(A. Reymond)* . 73
Wood (R. W.). — Researches in Physical Optics. *(A. Schidlof)* . . 453
Zoretti (L.). — Tables numériques usuelles 155

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE

I. *Publications périodiques*.

Pages

Acta mathematica (MITTAG-LEFLER, *Stockholm*) 76, 230
American Journal of Mathematics (*Baltimore*) 76, 398
American mathematical Monthly (*Lancaster et Urbana*) 398
Annaes scientificos da Academia Polytechnica do Porto (TEIXEIRA) . . 455
Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse . . 77
Annales de l'Université de Grenoble 313, 455
Annali di matematica pura ed applicata (BIANCHI, DINI, JUNG, SEGRE, *Milan*) 313
Annals of Mathematics (Harvard University, *Cambridge*, Mass.) 230, 457
Archiv der Mathematik und Physik (W. MEYER, JAHNKE, *Leipzig*) 77, 234
Atti della R. Accademia dei Lincei (*Rome*). 77, 234
Bollettino di Bibliographia et Storia delle Science matem. (G. LORIA, *Turin*) 231
Bollettino di Matematica (CONTI, *Rome*) 455
Bulletin de la Société mathématique de France (*Paris*) . . 78, 231, 314
Bulletin des Sciences mathématiques (APPELL, PICARD, *Paris*) . 78, 457
Bulletin of the American Mathematical Society (*New-York*) . 235, 399, 458
Bulletin de l'Académie royale de Belgique 455
Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences (*Paris*) 79, 232
399, 458
Contribucion al Estudio de las Ciencias (*La Plata*) 455
Mathematische Zeitschrift (LICHTENSTEIN, *Berlin*) 314
Intermédiaire des Mathématiciens (LAISANT, MAILLET, MALUSKI, BOULANGER, *Paris*) 455
Giornale di Matematiche di Battaglini (*Naples*) 156
Isis (G. SARTON, *Bruxelles*) 455
Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik (*Berlin*). 455
Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung (*Leipzig*) 157, 400
Journal de Mathématiques élémentaires (H. VUIBERT, *Paris*) . . 455
Journal für die reine und angewandte Mathematik (HENSEL, *Berlin*) . 233
Mathematical Gazette, The (GREENSTREET, *London*) 455
Mathesis (MANSION et NEUBERG, *Gand*) 455
Mathematics Teacher, The (W. H. METZLER, *Syracuse*, N. Y.) . 401, 460
Mathematische Annalen (*Leipzig*) 157, 460
Nieuw Archief voor Wiskunde (*Amsterdam*) 455
Nouvelles Annales de Mathématiques (LAISANT et BRICARD, *Paris*) 158, 402
Nyt Tiddskrift for Mathematik (*Copenhague*) 455
Proceedings of the London Mathematical Society 233, 461
Rendiconti del Circolo matematico di Palermo (*Palerme*) . . 455
Revista de la Sociedad Matematica Espanola (*Madrid*) 456
Revue de Métaphysique et de Morale (X. LÉON, *Paris*) . . . 159, 315
Revue de l'Enseignement des Sciences (*Paris*) 158, 403
Revue générale des Sciences pures et appliquées (*Paris*) 235
Revue scientifique (*Paris*) 315, 456
Revue semestrielle des Publications mathématiques (*Amsterdam*) . 456
School Science and Mathematics (G. W. MYERS, *Chicago*) 456

Pages
Sitzungsberichte der K. Akademie der Wissenschaften *(Wien)* . . . 159
Unterrichtsblätter für Mathematik und Naturwissenschaften *(Berlin)* . 456
Wiskundige Ofgaven *(Amsterdam)* 456
Zeitschrift für das Realschulwesen (Czuber, Bechtel, Glöser, *Wien*) 160, 456
Zeitschrift für mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht *(Leipzig)* 403

2. *Publications non périodiques.*

Livres nouveaux 79, 160, 236, 315, 404, 461

TABLE DE NOMS D'AUTEURS

Cette table comprend les auteurs d'articles généraux ou d'articles de chronique, de lettres ou notes insérées dans la correspondance ou de comptes rendus bibliographiques.
Les numéros qui suivent chaque nom renvoient aux pages du volume.

Pages
Aubry (A.) 199
Ballif (L.) 219
Beritch (M. T.) 194
Boulad (Farid) 421
Brocard (H.) 293
Buhl (A.) 30, 138, 143, 147, 151
309, 391, 393, 395, 397
Cailler (C.) 93, 317
Crelier (L.) 224
Daniels (M. Fr.) 97
Fehr (H.) . 72, 73, 145, 228, 229
307, 312, 313, 395, 454
Franel (J.) 452
Godeaux (L.) 81, 146
Gonseth (F.) 90
Jaccottet (C.) 63, 298
Hilbert (D.) 122
Helmis (J.) 271
Jahnke (E.) 379
Laisant (C.-A.) 390

Pages
Loria (G.) 43, 237
Masson (R.) 71, 311
D'Ocagne (M.) 292
Paschoud (M.) 286, 338
Petrovitch (M.) 268
Plancherel (M.) . . 70, 146, 453
Pleskot (A.) 215
Pólya (G.) 355
Reymond (A.) 73
Redl (F.) 190
Riquier (Ch.) 405
Schidlof (A.) 72, 454
Stuyvaert (M.) 347
Tiercy (G.) 175
Turrière (E.) . 161, 245, 312, 379
392, 433
De la Vallée Poussin (C.) . . 5
Vaney (F.) 338
Zack (M.) 47, 276

ERRATA

Tome XX. N° 3. P. 190, 2me ligne, lire : un rayon *double*.
P. 191, 5me ligne, omettre (respectivement A et A).

Supplément au N° 6 du Tome XX (1918-1919)

Spécimen de langue internationale *Espérantide* (conciliation de l'Esperanto et de l'Ido), offert par l'auteur en hommage aux lecteurs de *L'Enseignement Mathématique*.[1]

SPACO

DA

René de SAUSSURE (Bern, Swislando).

I. La sep fundamentan figuron.

En spaco existas sep, kay nur sep, figuron, kiun estas nur pozician, t. e., kiun entenas nenia grando. Lu estas (fig. 1):

1. La *punkto (P)*. Irg ni punkto estas nura pozicio kay havas neni amplexo; punkto povas rotaci omnimanere sur si self, ne cestante esti la sama punkto.

2. La *reglo (R)*, or rekta senfina linio, konsiderata kom spacelemento, kom nedivizibla tuto (kay ne kom serio de punkton). Irg ni reglo estas nura pozicio kay enhavas nenia grando; reglo povas gliti or rotaci sur si self, ne cestante esti la sama reglo.

3. La *edro (E)*, or senlima plano, konsiderata kom spacelemento, kom nedivizibla tuto (kay ne kom surfaco de punkton). Irg ni edro estas nura pozicio kay enhavas nenia grando; edro povas gliti omnimanere sur si self, ne cestante esti la sama edro.

4. La *sago*, or figuro *PR*, konsistanta el un punkto *P*, ligita al sur un reglo *R*. Punkto *P* estas la *origino*, kay reglo *R* la *stango*, de la sago; ti stango posesas senso plusa (indikata per sagpinto sur fig. 1) kay senso minusa. Irg ni sago estas nura pozicio kay enhavas nenia grando; sago povas rotaci cirker sia stango ne cestante esti la sama sago.

5. La *shildo*, or figuro *PE*, konsistanta el punkto *P* ligita al sur un edro *E*. Punkto *P* estas la origino, kay edro *E* la *folio*, de la shildo; ti folio havas supro (indikata per signo +) kay infro (indikata per signo —). La ye edro *E*, en *P* starigita, ortanto estas la *axo* de la shildo. Irg ni shildo estas nura pozicio kay enhavas nenia grando; shildo povas rotaci cirker sia axo, ne cestante esti la sama shildo.

6. La *flago*, or figuro *RE*, konsistanta el un reglo *R* ligita al sur un edro *E* (tio signifas, ke reglo *R* estas rekta linio markita en la plano de la edro *E*). Reglo *R* estas la stango de la flago; ti stango havas senso plusa (indikata per sagpinto) kay senso minusa. Edro *E* estas la folio de la flago; ti folio posesas supro k. infro. Irg ni flago estas nura pozicio kay enhavas nenia grando; flago povas gliti paralele al sia stango, ne cestante esti la sama flago.

[1] Pour tous renseignements concernant la langue internationale *Espérantide* s'adresser au *Centra Oficeyo*, 10 Hôtelgasse, Berne.

7. La *folyeto,* or figuro *PRE,* konsistanta el un punkto *P,* ligita al sur un reglo *R,* siavice ligita al sur un edro *E.* Punkto *P* estas la origino, reglo *R* la stango, kay edro *E* la folio, de la folyeto; la stango havas antro (indikata per sagpinto) kay postro, kay la folio havas supro kay infro (indikatan per la signon + kay —). Irg ni folyeto estas nura pozicio kay enhavas nenia grando; folyeto ne povas gliti sur si self; el tio seqas, ke se al folyeto *PRE* oni ligas irg nia rigida korpo *K,* la pozicio de ti folyeto plene konigos tiu de la korpo *K.*

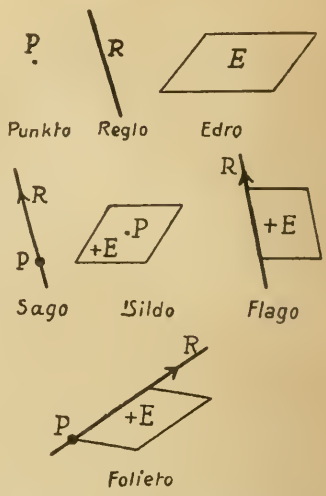


Fig. 1. — La sep fundamentan figuron

La sistemon de rigidan korpon (korparon) estas do reduktiblan al sistemon de folyeton (folyetaron); or, se oni preferas, folyeto estas nenio alia, ol, kio restas, kiam de ni rigida korpo oni forprenas la formo k. la grando.

Resume, el la sep fundamentan pozici-figuron tri estas figuron unelementan (punkto, reglo, edro), tri estas duelementan (sago, shildo, flago), kay un estas trielementa (folyeto).

II. Difinon.

Poliserio estas plurople infinita serio de figuron identan, or almeyne samspecan; seqe:

unopla	serio,	enhavanta	∞^1	elementan	figuron,	nomivos	*monoserio*
duopla	„	„	∞^2	„	„	„	*biserio*
triopla	„	„	∞^3	„	„	„	*triserio*
qaropla	„	„	∞^4	„	„	„	*tetraserio*
&c.							&c.

Exemple, punktlinio estas monoserio de punkton (or punktara monoserio), punktsurfaco estas biserio de punkton, reglosurfaco estas monoserio de reglon (or reglara monoserio), komplexo estas reglara triserio, &c.

Du figuron estas *inversan,* kiam lu estas simetrian una ye la alia relate al ni punkto

Du figuron estas *kontran,* kiam lu estas simetrian una ye la alia relate al ni reglo.

Du figuron estas *reflektan,* kiam lu estas simetrian una ye la alia relate al ni edro.

Du figuron estas *reciprokan,* kiam lu estas inter su ligatan tiamanere, ke una el la du figuron naskas *lineara* poliserio relate al la alia.

Omni speco de geometrio estas fondata sur la reciprokrelato, kiu existas inter du figuron. Kiam tin figuron estas identan, la koresp nda geometrio nomivos geometrio *unsexa;* kiam lu estas malsaman, ji nomivos *dusexa.*

III. La tridimensia spaco.

La tridimensia spaco havas strukturo duala, or, se oni preferas, dusexa, kar omnitempe k. omniloke oni bezonas du fundamentan

grandon por mezuri spaco: la *longo* k. la *angulo*. Tin grandon estas nereduktiblan una ye la alia; lu estas *geandran* grandon kay oni povas diri, almeyne figure, ke la unma estas vira, dur ke la duma estas virina.

Al la longo korespondas la *punkto*, kar longo estas la grando kushanta inter du punkton (dupunkta longo). Al la angulo korespondas la *edro*, kar angulo estas la grando kushanta inter du edron (duedra angulo).

La figuro formita da du punkton P, P', nomivas *dupunkto*, or *punktparo*. La figuro formita da du punkton P, P', kay da la rektopeco PP' nomivas *dupunktlongo*, or *segmento*. Fine la longo PP', kushanta inter du punkton P k. P', nomivas *punktlongo*, or *disto* de tin punkton.

La figuro formita da du edron, E k. E', nomivas *duedro*, or *edroparo*. La figuro formita da du edron E, E', kay da la faskopeco EE' nomivas *duedrangulo*. Fine la angulo EE', kushanta inter du edron E k. E', nomivas *edrangulo* (t. e. angulo formita da edron).

Pli jenerale, la figuro, formita da pluran edron, nomivas *pluredro;* exemple: *triedro, qaredro, qinedro,* &c.

* * *

La fundamenta geometrio de l' tridimensia spaco estas dusexa, kar ji estas fondita sur la reciprokrelato inter la du geandran spacelementon: punkto k. edro.

Punkto P k. edro E estas reciprokan, kiam lu plenumas la kondito:

$$d = 0,$$

en kiu d signas la interspaco, or disto, inter punkto P k. edro E.

Efekte, nu supozu, ke edro E estas fixa; tiam, por plenumi la ci-sura kondito, punkto P devas movivi en la plano de edro E; ji do naskas *lineara* punktaro (biserio de punkton). Reciproke, se punkto P estas fixa, edro E povas movivi nur cirker ti fixa punkto; ji do ulsor naskas *lineara* edraro (biserio de edron, nomita *garbo* de edron).

La punktedrara geometrio estas triparametra, kar la pozicio de un punkto, or de un edro, en la tridimensia spaco, dipendas de tri parametron *(koordinaton)*.

Kar du punkton sufitas por difini lineara monoserio de punkton (punktara *rekto)*, kay tri punkton por difini lineara biserio (punktara *plano)*, kay reciproke: kar du edron sufitas por difini lineara monoserio de edron (edrara *rekto)*, kay tri edron por difini lineara biserio (edrara *punkto)*, oni konstatas, ke la punktedrara geometrio estas *lineara* slo-karaktere.

* * *

Ulter la punktedrara geometrio existas, en tridimensia spaco, alia fundamenta geometrio, nome: la *reglara geometrio*. Ti geometrio estas unsexa, kar la figuro geandra ye reglo ulsor estas reglo. La reglara geometrio estas fondita sur la reciprokrelato inter du reglon (geandran figuron):

Se oni elektas konstanta grando c. *nomita „indico", du reglon R, R', estas reciprokan pere de indico* c, *kiam lu plenumas la kondito:*

$$h \tan \omega = c,$$

en kiu h signas la pley kurta disto, kay ω la angulo, inter la reglon R k. R'.

Efekte, se una el la du reglon, exemple reglo R, estas fixa, la alia reglo R' naskos, konforme al la ci supra kondito, lineara triserio de reglon *(lineara komplexo)*.

Kar tri reglon estas necesan por difini la lineara monoserio *(reglara hiperboloido)*, qar reglon por difini la lineara biserio *(lineara kongruenco)*, kay qin reglon por difini la lineara triserio *(lineara komplexo)*, oni konstatas, ke la reglara geometrio estas *qadratika* slokaraktere. Tio ulsor rezultas de la fakto, ke la reciprokrelato inter du reglon enhavas arbitera konstanto c.

Kiam indico c estas nula, la reglon R k. R' plenumas la kondito: $h \tang \omega = 0$ (t. e.: $h = 0$, or $\omega = 0$), kay la koresponda lineara komplexo farivas *speciala*. Oni tiam diras, ke la du reglon estas „reciprokan pere de indico nul“, or pli simple, ke lu estas „reciprokan“, sen mencii ni indico; kay tio signifas, ke la reglon R k. R' e su renkontas.

La reglara geometrio estas qarparametra, kar la pozicio de omni reglo, en tridimensia spaco, dipendas de qar parametron, or koordinaton.

* * *

Omnin geometrion de la tridimensia spaco estas sinteziblan en un sola geometrio, kies spacelemento estas la *folyeto* PRE; la geometrio de folyeton, or *folyetara geometrio*, estas la pley jenerala el omtiun, kar folyeto estas la sintezo de la tri fundamentan elementon (punkto P, reglo R, k. edro E). Ti geometrio estas sisparametra, kar la pozicio de irg ni folyeto dipendas de sis parametron, or koordinaton; ji estas unsexa, kar la figuro geandra ye folyeto ulsor estas folyeto; fine, ji estas qadratika slokaraktere, kar:

lineara monoserio de folyeton estas difinata per *3 folyeton*,
„ *biserio* „ „ „ „ „ *4* „
„ *triserio* „ „ „ „ „ *5* „
„ *tetraserio* „ „ „ „ „ *6* „
„ *pentaserio* „ „ „ „ „ *7* „

kay reciproke:

2 *linearan pentaserion* e su sekcas slo *lineara tetraserio*,
3 „ „ „ „ „ „ *triserio*,
4 „ „ „ „ „ „ *biserio*,
5 „ „ „ „ „ „ *monoserio*,
6 „ „ „ „ „ *dufolyeto* (folyetparo).

Cetere la qadratika karaktero de l'folyetara geometrio estas qik rekonibla pro la fakto, ke la fundamenta reciprokrelato inter du folyeton (geandran figuron) entenas arbitera konstanto c. Efekte:

Du folyeton PRE k. $P'R'E'$ estas reciprokan, pere de indico c, *kiam lu plenumas la kondito:*

$$h \tang \frac{\omega}{2} = c,$$

en kiu h estas la glitlongo kay ω la angulo de la helicmovo, per kiu la folyeto povas migri de la pozicio PRE al la pozicio $P'R'E'$, or reciproke.[1]

[1] Ti remarkabla formo de la reciprokrelato inter du folyeton estis unmafoye sugestita al mi da nua bone konata samideano Prof. R. Bricard, el Parizo.

Se una el la du folyeton, exemple PRE, estas fixa, la alia folyeto $P'R'E'$, konforme al la ci-sura kondito, naskas lineara pentaserio, kiu ludas, en folyetara geometrio, la sama rolo, kie la lineara komplexo en reglara geometrio.

Kiam indico c estas nula, folyeton PRE k. $P'R'E'$ plenumas la kondito: $h \; tang \frac{\omega}{2} = 0$ (t. e.: $h = 0$, or $\omega = 0$), kay la koresponda lineara pentaserio estas *speciala*. Oni tiam diras, ke folyeton PRE k. $P'R'E'$ estas „reciprokan pere de indico nul", or pli simple, ke lu estas „reciprokan", sen mencii ni indico; kay tio signifas, ke la folyeto povas migri de la pozicio PRE al la pozicio $P'R'E'$ per nura rotaco (sen glitmovo), or reciproke.

Remarko. — La folyetara geometrio estas identa al la *korpara geometrio*, t. e. al la geometrio de rigidan korpon en spaco, kar nu yam konstatis, ke folyeto estas figuro eqalvalora al un *pozicio* de irg nia rigida korpo.[1]

IV. La dudimensian spacon.

Existas du specon de spaco dudimensia: la *plana spaco*, or *plano*, kay la *cirkerpunkta spaco*, or *angula spaco*. Omdu tin spacon havas strukturo duala, or dusexa.

1. — La plana spaco or Plano. — Existas en plano du fundamentan grandon: la *longo* k. la *angulo*. Al la longo korespondas la *punkto*, kar longo estas la grando kushanta inter du punkton *(punktlongo)*. Al la angulo korespondas la *reglo*, or *latro*, kar angulo estas la grando kushanta inter du latron *(latrangulo)*.

Kie en la tridimensia spaco, la figuro, formita da du punkton P k. P', nomivas *dupunkto* or *punktoparo;* la figuro formita da du punkton P, P', kay da la rektopeco PP', nomivas *dupunktlongo*, or *segmento;* kay la longo kushanta inter P k. P' nomivas *punktlongo*, or simple *longo* PP'.

La figuro formita da du reglon, or latron, R, R', nomivas *dulatro*, or *latroparo;* la figuro formita da du latron R, R', kay da la faskopeco RR' nomivas *dulatrangulo;* fine, la angulo kushanta inter la latron R k. R', nomivas *latrangulo*, or simple *angulo* RR'.

Pli jenerale, la figuro, formita da pluran latron, nomivas *plurlatro*, or *plurangulo;* exemple: *trilatro* or *triangulo*, *qarlatro* or *qarangulo*, *qinlatro* or *qinangulo*, &c.

La fundamenta geometrio de l' plana spaco estas dusexa, kar ji estas fondita sur la reciprokrelato, kiu existas en ti spaco inter punkto k. latro (geandran figuron):

Punkto P k. latro R estas reciprokan, kiam lu plenumas la kondito:

$$d = 0,$$

en kiu d signas la interspaco, or disto, inter punkto P k. latro R; alivorte, P k. R estas reciprokan, kiam P situas sur la rekto koincidanta kun latro R.

[1] Por pluan detalon koncerne la folyetara geometrio vidu diversan artiklon, publikigitan en la *Archives des sciences physiques et naturelles*, Genevo (1898—1919), kay en la 36ma tomo de la *Mémoires de la Société de Physique*, Genevo. Ulsor en la *Internacia Scienca Revuo*, 1909.

So, se latro *R* estas fixa, punkto *P* naskas lineara monoserio (punktara *rekto)*. Reciproke, se punkto *P* estas fixa, latro *R* ulsor naskas lineara monoserio (reglara *fasko)* cirker punkto *P*.

Kar du punkton sufitas por difini rekto, kay reciproke kar du reglon sufitas por difini fasko, oni konstatas, ke la punktoreglara geometrio (en plana spaco) estas lineara slokaraktere; ji estas duparametra, kar la pozicio de omni punkto, or reglo, dipendas de du parametron (koordinaton).

Ulter ti geometrio existas en la plana spaco la geometrio de sagon, or *sagara geometrio*, kiu estas la pley jenerala, kar jia spacelemento estas la *sago PR*, recevita per sintezo de la du fundamentan elementon (punkto *P* k. latro *R)* de ti spaco. La sagara geometrio estas triparametra, kar la pozicio de omni sago en la plano dipendas de tri parametron; ji estas unsexa, kar la geandra figuro de sago ulsor estas sago; fine, ji estas lineara slokaraktere, kar:

2 *sagon* difinas *sagkrono* (lineara monoserio de sagon) (fig. 2),
3 „ „ *sagkronoido* („ biserio „ „) (fig. 3);

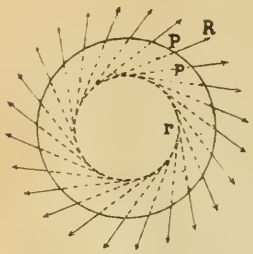


Fig. 2. — Sagkrono.

kay reciproke:

2 *sagkronoidon* e su sekcas slo *sagkrono*
3 „ „ „ „ *un sago.*

La fundamenta formo de la sagara geometrio en plano estas do la *kronoido*, or lineara biserio; ti biserio posesas un, kay nur un, sago *PR* che omni punkto *P* de la plana spaco, kie e ji montras figuro 3ma (Ti figuro prezentas la *flulinion* de la kronoido).

La sagkronoido estas difinata per la cia reciprokrelato, kiu existas inter du sagon (geandran figuron):

Du sagon PR *k.* P'R' *estas reciprokan, kiam lu estas „kontran“*, t. e. simetrian una de la alia relate al ni reglo de la plana spaco (fig. 3). E ti kondito oni povas expresi per la relato:

$$\omega = \omega',$$

en kiu ω signas la angulo kushanta inter reglo *R* k. rekto *PP'*, kay ω' la angulo kushanta inter reglo *R'* k. rekto *P'P*.

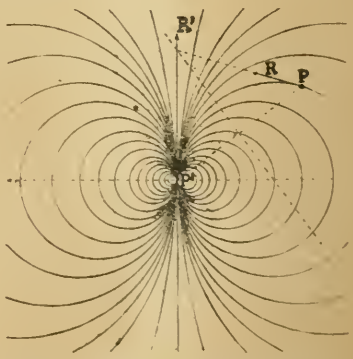


Fig. 3. — Sagkronoido difinita per sian flulinion.

Remarko. — La sagara geometrio estas identa al la geometrio de rigidan korpon en la plana spaco (korpara plangeometrio), kar en ti spaco, sago *PR* estas figuro eqalvalora al un pozicio de irg nia rigida korpo.

2. — La cirkerpunkta spaco or Spaco angula. — Existas en la cirkerpunkta spaco du fundamentan grandon, kiun, spit ke omdu angulan, estas apartigendan: la *reglangulo* k. la *edrangulo.*

Al la reglangulo korespondas la reglo, kay al la edrangulo korespondas la edro.

La figuro formita da du reglon R, R', nomivas *dureglo* (regloparo), kie en la plana spaco. La figuro formita da du reglon R, R', kay da la faskopeco RR', nomivas *dureglangulo*. La angulo kushanta inter du reglon nomivas *reglangulo*, or simple *angulo*, kie en la plana spaco.

La figuro formita da du edron E, E', nomivas *duedro* (edroparo). La figuro formita da du edron E, E', kay da la faskopeco EE', nomivas *duedrangulo*. Fine, la angulo situanta inter du edron nomivas *edrangulo*, kie en tridimensia spaco.

Pli jenerale, la figuro formita da pluran edron (en la angula spaco) nomivas *pluredrangulo;* exemple: *triedrangulo, qaredrangulo, qinedrangulo,* &c.

Oni do vidas, ke:

en la *tridimensia spaco*	la geometrian korpon nomivas	*pluredron,*
„ „ *dudimensia spaco plana*	„ „ „ „	*plurlatron* or *plurangulon,*
„ „ *dudimensia spaco angula*	„ „ „ „	*pluredrangulon.*

La fundamenta geometrio de l' spaco angula estas la *regledrara geometrio;* ji estas dusexa, kar ji estas fondita sur la reciprokrelato, kiu existas, en ti spaco, inter reglo k. edro (geandran figuron):

Reglo R k. edro E estas reciprokan, kiam lu plenumas la kondito:

$$\delta = 0$$

en kiu δ signas la angula interspaco inter reglo R k. edro E; alivorte, reglo k. edro estas reciprokan, kiam la reglo kushas en la plano de la edro.

Efekte, se edro E estas fixa, reglo R naskos lineara monoserio de reglon (reglofasko). Reciproke, se reglo R estas fixa, edro E naskos lineara monoserio de edron (edrofasko) cirker ti reglo.

Kar du reglon sufitas por difini reglofasko, en la spaco angula, kay reciproke kar du edron sufitas por difini edrofasko, oni konstatas, ke la regledrara geometrio cirkerpunkta estas lineara slokaraktere; ji estas duparametra, kar la pozicio de irg ni reglo, or edro, dipendas de du parametron (koordinaton) en ti spaco.

Ulter ti geometrio existas en la angula spaco la geometrio de flagon, or *flagara geometrio,* kiu estas la pley jenerala, kar jia spacelemento estas la *flago RE,* recevita per sintezo de la du fundamentan elementon (reglo R k. edro E) de ti spaco. La flagara geometrio estas triparametra, kar la pozicio de irg ni flago en la angula spaco dipendas de tri parametron; ji estas unsexa, kar la geandra figuro de flago ulsor estas flago; fine, ji estas lineara slokaraktere, kar:

2 *flagon* difinas *flagkrono* (lineara monoserio de flagon),
3 „ „ *flagkronoido* („ biserio „ „);

kay reciproke:

2 *flagkronoidon* esu sekcas slo *flagkrono,*
3 „ „ „ „ *un flago.*

La fundamenta formo de la flagara geometrio en angula spaco, estas do la *kronoido*, or lineara biserio; ti biserio posesas un, kay nur un, flago RE sur omni reglo R de la angula spaco, kie e ji montras figuro 4ma (Ti figuro prezentas la *flukonuson* de la kronoido). La intersekco de flagkronoido kun kuncentra sfero formas *sfera sagkronoido,* prezentita sur figuro 5ma.

Fig. 4. — Flagkronoido difinita per sian flukonuson.

La flagkronoido estas difinita per la cia reciprokrelato, kiu existas inter du flagon (geandran figuron):

Du flagon RE k. $R'E'$ estas reciprokan, kiam lu estas „reflektan“, t. e. simetrian una de la alia relate al ni edro de la angula spaco (fig. 4). E ti kondito oni povas expresi per la relato:

$$\omega = \omega',$$

en kiu ω signas la edrangulo kushanta inter edro E k. plano RR', kay ω' la edrangulo kushanta inter edro E' k. plano $R'R$.

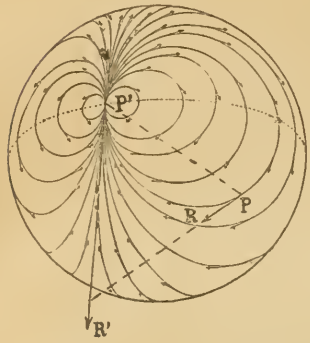


Fig. 5. — Sfera sagkronoido, or intersekco de flagkronoido kun kuncentra sfero.

Remarko. — La flagara geometrio estas identa al la geometrio de rigidan korpon en la angula spaco, t. e. cirker fixa punkto (korpara geometrio cirkerpunkta), kar flago estas figuro eqalvalora al la pozicio de irg nia rigida korpo, kiu posesas un fixa punkto.

V. La undimensia spaco.

La undimensia spaco konsistas: 1me el omnin punkton P lokantan sur fixa rektlinia axo S; 2me el omnin edron E strekiblan cirker ti axo. Existas do, en la undimensia spaco S, du fundamentan grandon: la *longo* (punktlongo), or interspaco inter du punkton P k. P', kay la *edrangulo*, or angula interspaco inter du edron E k. E'.

Kie en tridimensia spaco, la figuro formita da du punkton P, P', nomivas *dupunkto* (punktparo), kay la figuro formita da du edron E, E', nomivas *duedro* (edroparo).

Se ji existus, la fundamenta geometrio de la undimensia spaco S estus dusexa, kar, en ti spaco, punkto P k. edro E estas figuron geandran; sed ti geometrio fakte ne povas existi, kar jia fundamenta formo devus esti fondata sur la reciprokrelato $d = 0$, en kiu d signus la interspaco, or la disto, inter punkto P k. la reciproka edro E, kay oni facile konstatas, ke irg ni punkto P estas reciproka de irg ni edro E de la undimensia spaco, tial ke omni punkto P situas en omni edro E.

Sed existas en la undimensia spaco S, alia fundamenta geometrio, nome la geometrio de shildon, or *shildara geometrio*; ti geometrio estas la pley jenerala en la spaco S, kar jia elemento estas la *shildo* PE, formita per sintezo de la du fundamentan elementon: punkto P k. edro E. La shildo PE truvivas self en la undimensia spaco S, kar omdu jian elementon, P k. E, situas en ti spaco.

La shildara geometrio en spaco S estas duparametra, kar la pozicio de omni shildo, en ti spaco, dipendas de du parametron (kar, se PE estas ni fixa shildo kay $P'E'$ ni moviva shildo, la pozicio de PE relate al $P'E'$ estas difinata per la longo $h = PP'$ kay per la edrangulo $\omega = EE'$). La shildara geometrio estas unsexa, kar la geandra figuro de shildo ulsor estas shildo; fine, ti geometrio estas qadratika slokaraktere, kar jia fundamenta formo (shildara monoserio) estas difinata per la cia reciprokrelato inter du shildon (geandran figuron):

Du shildon PE k. $P'E'$ estas reciprokan pere de indico c, *kiam lu plenumas la kondito:*

$$h \text{ tang } \frac{\omega}{2} = c,$$

en kiu h signas la longo PP', kay ω la edrangulo EE'. La cheesto de arbitera konstanto c en la fundamenta reciprokrelato montras, ke la shildara geometrio, en spaco S, estas qadratika; seqe, ke 3 shildon estas necesan por difini la lineara monoserio (lineara shildaro) reprezentata da la ci-sura relato; seqas anke, ke 2 linearan shildaron e su sekcas slo *dushildo* (shildoparo).

Kiam indico c estas nula, shildon PE k. $P'E'$ plenumas la kondito $h \text{ tang } \frac{\omega}{2} = 0$ (t. e.: $h = 0$, or $\omega = 0$), kay la koresponda lineara monoserio farivas *speciala*. Oni tiam diras, ke la du shildon estas „reciprokan pere de indico nul“, or pli simple, ke lu estas „reciprokan“, sen mencii ni indico; kay tio signifas, ke la shildo povas migri de la pozicio PE al la pozicio $P'E'$ per nura rotaco, sen glito, or per nura glito, sen rotaco; alivorte, tio signifas, ke la shildon PE k. $P'E'$ havas komuna origino P (kay malsaman folion E k. E'), or, ke lu havas komuna folio E (kay malsaman originon P k. P').

Remarko. — La shildara geometrio en undimensia spaco S estas identa al la geometrio de rigidan korpon (korpara geometrio) cirker fixa axo S, kar, en ti spaco, shildo estas figuro eqalvalora al pozicio de irg nia rigida korpo, ligita al axo S.

Oni savas, ke, en la tridimensia spaco, al du irg nin pozicion, K k. K', de rigida korpo korespondas un, kay nur un, axo S tia, ke la korpo povas migri de pozicio K al pozicio K' per nuran rotaco k. glito ye la axo S, seqe per movo tute entenata en la undimensia spaco S.

Oni povas do vortigi la cia teoremo: same ke, inter du irg nin punkton oni povas streki un, kay nur un, rekto, same: *inter du irg nin pozicion, K k. K', de rigida korpo en tridimensia spaco oni povas streki un, kay nur un, undimensia spaco S.*

VI. La spacgrandon.

1. — En la undimensia spaco S la fundamentan grandon estas: 1e la *longo* (punktlongo), or nombro de punkton lokantan inter du punkton P k. P' de la rekto S; 2e la *angulo* (edrangulo), or nombro de edron lokantan inter du edron E k. E' de la sama rekto S.

2a. — En la dudimensia spaco plana la fundamentan grandon undimensian estas: 1me la *longo* (punktlongo), or nombro de punkton lokantan inter du punkton P k. P' de irg ni rekto; 2me la *angulo* (reglangulo), or nombro de reglon kushantan inter du irg nin reglon R k. R'.

Ulter tin undimensian grandon existas, en plano, un dudimensia grando, nomita *areo*, kiu estas la nombro de punkton lokantan intre de klozita kurvo C, or la nombro de reglon sekcantan ti kurvo, kar irg ni plana kurvo estas konceptibla, cor kom punktaro, cor kom reglaro (aro de la ye kurvo C tanjantan reglon).

2b. — En la dudimensia spaco angula, or cirkerpunkta, la fundamentan grandon undimensian estas: 1me la *reglangulo*, or nombro de reglon kushantan inter du reglon R k. R' de irg ni reglofasko; 2me la *edrangulo*, or nombro de edron lokantan inter du irg nin edron E k. E'.

Ulter tin undimensian grandon existas un grando dudimensia, nome la *konusa solidangulo,* or simple *konusangulo,* kiu estas la limo, al kiu kuras la pluredrangulo, kiam la nombro de ties edron kreskas senfine. La konusangulo estas la nombro de reglon R kushantan intre de ni klozita konuso, or la nombro de edron E sekcantan ti konuso, kar konuso estas konceptibla, cor kom reglaro, cor kom edraro (formita da la tanjantan edron).

Konusangulon estas mezuratan per la areo, e kiu lu eltranchas el sfera surfaco kuncentre strekita per radiuslongo 1, kar la punkton lokantan sur ti areo estas evidente samnombran, ol la reglon kushantan intre de la konuso.

3. — En la tridimensia spaco la fundamentan grandon undimensian estas: 1me la *longo* (punktlongo), or nombro de punkton lokantan inter du punkton P k. P' de irg ni rekto; 2me la *angulo* (edrangulo), or nombro de edron situantan inter du irg nin edron E k. E'; 3me la *tordiva angulo* (reglangulo), or nombro de reglon kushantan inter du irg nin reglon R k. R', or pli precize, inter du reglon R k. R' de irg ni orta konoido, kies axo estas la rekto I montrita sur figuro 6ma.

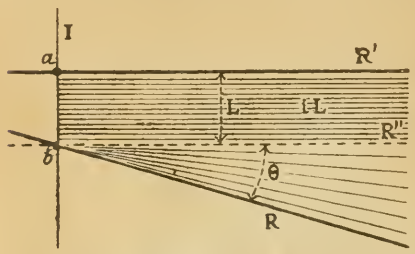


Fig. 6. — La tordiva reglangulo.

La tordiva angulo RR' estas *komplexa grando* (reglara), kar la dureglangulo RR' estas formata da la radiantan reglon kushantan en la planangulo RR'' $(= \vartheta)$ kay da la paralelan reglon kushantan inter la reglon R'' k. R'. Se nu nomas L la pley kurta distanco ab de la reglon R k. R', la valoro de la tordiva angulo RR' estos:

$$\lambda = \vartheta + iL,$$

en ki valoro la litero i signas la imaginara uno $(\sqrt{-1})$ uzata en algebro.

Kie en la kutima reprezento de komplexan qantiton, la pure komplexa parto (iL) staras orte ye la reala parto ϑ, kar la plano $R''R'$ staras orte ye la plano RR''; kay la valoro de la komplexa qantito $(\vartheta + iL)$ estas sendipenda de la voyo seqita por migrigi la reglo de la pozicio R al la pozicio R', kar ti qantito restas la sama, irg nia estu la formo de la orta konoido kuniganta la reglon R k. R', kondite nur, ke la konoidaxo estu la komunortanto I.

Kar la du membron de la eqaluro $\lambda = \vartheta + iL$ devas esti *homogenan* (or samspecan), kay kar la grandon λ k. ϑ omdu estas grandon reglaran, la grando iL ulsor devas esti reglara (efekte, ji konsistas el la paralelan reglon, kushantan inter R'' k. R'); alilatre la grando L estas punktara grando (pley kurta disto ab inter R k. R'): oni do konstatas, ke faktoro i transformas punktara grando en samvalora reglara grando, or, se oni preferas, faktoro i transformas punkto en reglo.[1]

La nombro $n = iL : \vartheta$ estos nomata *picho* de la tordiva angulo RR'.

[1] Por pluan detalon koncerne reglaran grandon en spaco vidu artiklo aperinta en „Revue Scientifique" (23ma Septembra 1905), Parizo. — Ulsor, pri la korespondo inter reglara spaco k. punktara sfersurfaco imaginara, vidu artiklo titulita *Calcul géométrique réglé* en „The American Journal of Mathematics" (1895), Baltimore, Md., U. S. A. En ti korespondo la imaginara uno i ne plu estas difinata per la eqaluro $i^2 = -1$, sed per la eqaluron $i \geqslant o$ kay $i^2 = o$, kie e tio montris Prof. C. Cailler, el la Geneva Universitato.

La dudimensian grandon en tridimensia spaco estas unme la *areo*, t. e. la nombro de punkton lokantan sur ni kurva surfaco intre de ni klozita kurvo C, strekita sur la surfaco, or la nombro de edron, kiun tuchas la surfaco en punkto intre de kurvo C. Areo estas do grando punktedrara.

La dua fundamenta grando dudimensia de la tridimensia spaco estas la *tordiva solidangulo* (reglara grando), or nombro de reglon entenatan en difinita parto de reglara biserio (kongruenco).

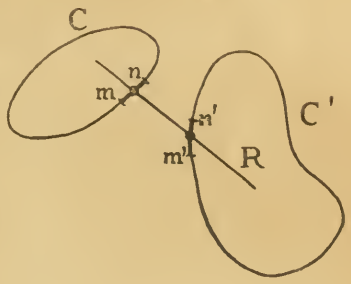


Fig. 7.

Nu konsideru, exemple, la kongruenco formata da omnin reglon, kiun e si apogas sur du irg nin kurvon, C k. C' (fig. 7). Oni savas, ke tin kurvon estas la *fokusan kurvon* de la kongruenco.[1] Por limigi difinita parto de la kongruenco, sufitas limigi difinita parto de la fokusan kurvon. Nu unme supozu, ke la fokusan kurvon estas du rekton A k. A' (fig. 8), kay nu marku sur tin rekton du segmenton mn $(= dL)$ kay $m'n'$ $(= dL')$; la figuro $m\,n\,m'\,n'$ estas qaredro tia, ke omnin reglon R, e si apogantan sur la segmenton dL k. dL', kushas intre de la qaredro. La reglon R formas tordiva solidangulo, kies fokusan segmenton estas mn k. $m'n'$. La valoro de ti solidangulo estas:

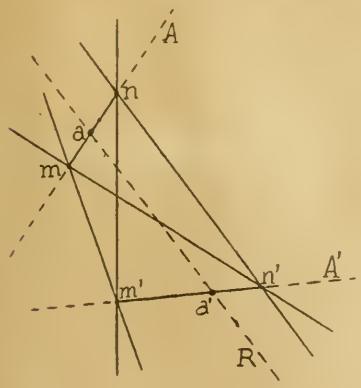


Fig. 8.

$$d\,\Sigma = \frac{dL\;dL'}{r^2}\,\sin\omega\,\sin\omega'\,\sin\varphi,$$

en ki formulo ω signas la angulo AR, ω' la angulo $A'R$, φ la edrangulo inter la planon AR k. $A'R$.

Ti formulo estas nenio alia, ol la Gauss'a formulo, kun la sola difero, ke Gauss ne parolas pri tordivan solidangulon, sed nur pri konusan solidangulon; efekte la tordiva angulo $(mn,\ m'n')$ estas eqala ye la konusa angulo, naskita per un punkto m, kiu migras dey m til n kay regardas la segmento $m'n'$, or per fixa punkto m, kiu regardas segmento $m'n'$, migranta ye disto dL en direkto de mn.

Seqe, se P, Q, estas du irg nin punkton, markitan sur la fokusa kurvo C, kay P', Q', du irg nin punkton, markitan sur la fokusa kurvo C', la koresponda tordiva solidangulo de la kongruenco estos:

$$\Sigma = \int_P^Q \int_{P'}^{Q'} \frac{dL\;dL'}{r^2}\,\sin\omega\,\sin\omega'\,\sin\varphi,$$

[1] Mi elektis kongruenco posesanta fokusan kurvon, kar la kompreno estas pli facila en ti kazo, ol en la kazo de fokusan surfacon. Tamor, la aqerotan rezulton valoras ulsor por omnin kazon.

kay la sumita solidangulo de la kongruenco estos recevata per integralado cirker la klozan kurvon C k. C':

$$\Sigma = \int_C \int_{C'} \frac{dL\ dL'}{r^2} \sin \omega \sin \omega' \sin \varphi = 4\ k\pi,$$

en kiu k signas la nombro de foyon, ye kiu kurvon C k. C' e su krucas, kie chenunon de cheno.

Ti formulo estas aplikibla al la teorio de elektromagnetismo por kalkuli la interago inter du elektran fluon C k. C'.

Fine, la fundamenta tridimensia grando en tridimensia spaco estas la *volumo,* t. e. la nombro de punkton lokantan intre de klozita surfaco S, or la nombro de edron sekcantan ti surfaco. Volumo estas do punktedrara grando.

Remarko pri la simbolo i. — Nu diris ci-sure, ke faktoro i $(= \sqrt{-1})$ transformas punkto P en reglo R; alivorte la produto de i kay de irg ni punktlongo L estas homogena kun reglangulo ϑ, or λ. Simile, faktoro i transformas reglo R en edro E, alivorte la produto de i kay de irg ni reglangulo ϑ, or λ, estas homogena kun edrangulo l. Oni do havas:

$$(iL) = (\lambda) \quad \text{kay} \quad (i\lambda) = (l),$$

seqe:

$$(l) = (i\lambda) = (i^2 L) = (-L);$$

kay tio signifas, ke: *edrangulo = minus longo,*[1] or: *edro = minus punkto.* Exemple, se n estas la nombro, kiu mezuras la disto inter du punkton P k. P', kay se (L) estas la longuno, la longo PP' (nombro de punkton lokantan inter P k. P') estos: $n(L)$; se oni strekas du reglon R k. R', paralelan inter su ye disto PP', la nombro de paralelan reglon kushantan inter R k. R' estos n (kar ti nombro estas la sama, ol la nombro de punkton inter P k. P'), sed la reglara grando formata da tin paralelan reglon ne plu estos $n(L)$, sed $n(iL)$; fine, se oni strekas du edron E k. E', paralelan inter su ye sama disto PP', la nombro de paralelan edron lokantan inter E k. E' ulsor estos n, sed la edrara grando formata da tin paralelan edron ne plu estos $n(L)$, sed $n(i^2 L)$, t. e.: $n(-L)$, slo la homogena vidpunkto.

Oni do ritruvas ci tiey la dusexeco de spaco, kar punkto aperas naw, kom plusa $(+1)$, or vira, spacelemento, dur ke edro aperas, kom minusa (-1), or virina, spacelemento; fine, la reglo aperas kom hermafrodita elemento $(\pm i)$, kar irg ni reglo estas konceptibla, kom rekto, cor punktara cor edrara.

[1] Oni ne mixu *minus longo* kun *longo minusa.*

QA
11
E65
t.19-20

L'Enseignement mathématique

Physical &
Applied Sci.
Serials

Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY